

Werk

Titel: Konstruktion von Kreisbogendreiecken

Autor: SCHREIBER, P.

Jahr: 1982

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0013|log12

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Konstruktion von Kreisbogendreiecken

PETER SCHREIBER

Unter einem *Kreisbogendreieck* (im folgenden kurz: *Dreikreis*) verstehen wir eine aus drei Kreisbogenstücken $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{CA}$, $c = \widehat{AB}$ zusammengesetzte einfach geschlossene Kurve. Dabei sei der Fall nicht ausgeschlossen, daß einige oder alle *Seiten* a , b , c zu Strecken (hier aufgefaßt als Bogenstücke von Kreisen mit unendlichem Radius) entarten. Daher sind die gewöhnlichen Dreiecke Spezialfälle von Dreikreisen. Der Amateurmathematiker W. K. B. HOLZ hat seit 1944 mehrfach angeregt, eine zur euklidischen Dreiecksgeometrie analoge Geometrie der Dreikreise aufzubauen (in der die bekannten Sätze über Dreiecke möglichst als Spezialfälle entsprechend allgemeinerer Sätze über Dreikreise erscheinen sollen) und selbst einige Beiträge dazu geliefert. Bisher hat im wesentlichen nur L. BIEBERBACH diese Idee aufgegriffen und vor allem für eingeschränkte Klassen von Dreikreisen bewiesen, daß je zwei Elemente einer solchen Klasse kongruent sind, wenn sie in den drei Seitenlängen und den drei *Innenwinkeln* (d. h. Winkeln zwischen den Bogentangenten in den Ecken A , B , C) übereinstimmen [6]. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß Seitenlängen nicht als Vorgabe für die elementare Konstruktion von Dreikreisen dienen können. (Ein nichtelementares Näherungsverfahren zur Konstruktion eines Dreikreises aus Seitenlängen und Innenwinkeln hat HOLZ angegeben [10].) Aus der Sicht elementarer Konstruktionen sind andere Bestimmungsstücke wie z. B. *Sehnen* (die geradlinigen Verbindungen der Eckpunkte) oder die zu den Kreisbogenstücken gehörigen *Radien* und *Zentriwinkel* näherliegend. Im folgenden wird gezeigt, daß es genau 31 wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt, einen Dreikreis durch Vorgabe von jeweils sechs Stücken aus der Menge der Sehnen, Radien, Innen- und Zentriwinkel zu determinieren. Von den entsprechenden Konstruktionsaufgaben sind 28 mit Zirkel und Lineal lösbar, die drei restlichen nicht. Die lösbaren Aufgaben empfehlen sich einerseits zur Belebung von Schulmathematik, Olympiaden u. ä., da hier durch eine Fragestellung ein ganzes Spektrum von Aufgaben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades erzeugt wird, andererseits zur psychologisch nützlichen „Verfremdung“ der üblichen Dreiecksgeometrie, insbesondere zur Diskussion des Zusammenhanges zwischen der Anzahl und Art der Lösungen einer Konstruktionsaufgabe und dem jeweils „zugehörigen“ Kongruenzsatz. Auch die drei unlösbaren Aufgaben, die überdies jeweils zu anderen hier angegebenen Aufgaben äquivalent sind, verdienen Beachtung, da bisher ein offensichtliches Mißverhältnis zwischen der überaus umfangreichen (meist alten) Literatur über geometrische Konstruktionen und der geringen Zahl derjenigen Aufgaben besteht, deren Unlösbarkeit mit Zirkel und Lineal definitiv bekannt ist, insbesondere soweit es sich um Auf-

gaben handelt, denen eine echt geometrische Frage zugrunde liegt. Wesentliche Anregungen zur Problemstellung und zur Durchführung verdanke ich der Arbeit [12] von O. KRÖTENHEERDT. Abb. 1 zeigt verschiedene Formen und Spezialfälle von Dreikreisen.

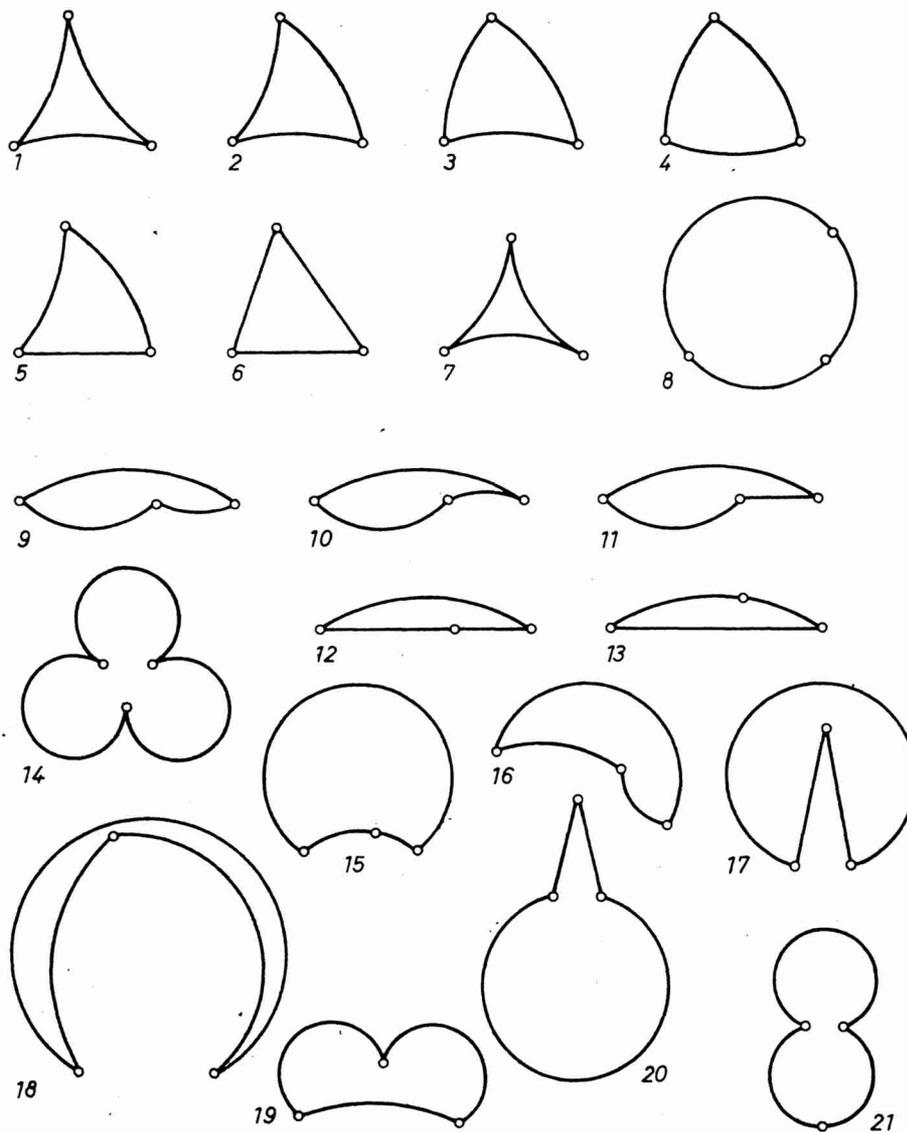


Abb. 1. Verschiedene Formen und Spezialfälle von Dreikreisen:
 6 Dreieck (alle Zentriwinkel 0), 7 Dreispitz (alle Zentriwinkel 0), 8 Vollkreis (alle Innenwinkel π); 14 Kleeblatt (alle Innenwinkel 2π); 9–12 Formen mit kollinearen Ecken; 8, 12, 13, 15, 21 Kreisbogenzweiecke

1. Bezeichnungen

Ecken: A, B, C ; Krümmungsmittelpunkte der Seiten: M_a, M_b, M_c ;
 Mittelpunkt des Umkreises: M ; Seiten: a, b, c (Kreisbogenstücke);
 Sehnen: $s_a = \overline{BC}, s_b = \overline{CA}, s_c = \overline{AB}$ (Sehnenlängen stets positiv);
 Radien: $r_a = \overline{M_aB} (= \overline{M_aC}), r_b = \overline{M_bC}, r_c = \overline{M_cA}$;
 Sehnen und Radien werden gemeinsam als *metrische Stücke* bezeichnet;
 Innenwinkel: α, β, γ ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2\pi$);
 Innenwinkel des Sehnendreiecks: $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ($\alpha^* = \sphericalangle CAB$ usw.);
 Zentriwinkel: α', β', γ' ($\alpha' = \sphericalangle BM_aC$ usw.). Vgl. Abb. 2.

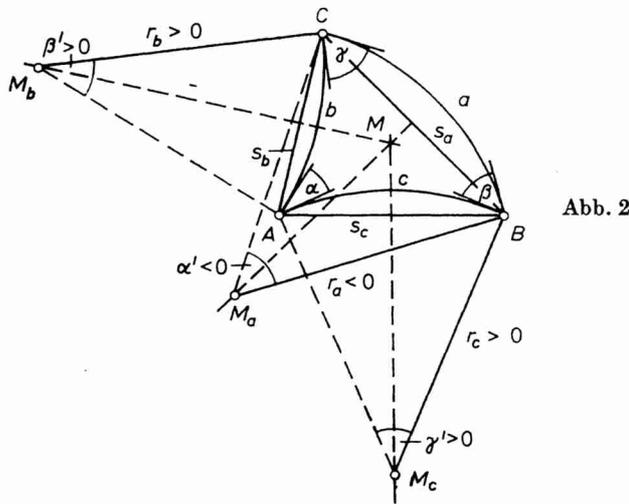


Abb. 2

Radien und Zentriwinkel sind vorzeichenbehaftet, und zwar

$$r_c \text{ und } \gamma' \begin{cases} > 0, \text{ falls } c \text{ bezüglich } AB \text{ in der gleichen Halbebene wie } C \text{ liegt} \\ < 0, \text{ falls } c \text{ und } C \text{ bezüglich } AB \text{ in verschiedenen Halbebenen} \\ & \text{liegen,} \\ r_c = \infty, \gamma' = 0, \text{ falls } c = AB. \text{ (Für } a, b \text{ analog.)} \end{cases}$$

Für den nicht ausgeschlossenen Fall kollinearere Ecken (vgl. Abb. 1) zeichnen wir willkürlich die bezüglich des von A in Richtung B verlaufenden Strahls linker Hand gelegene Halbebene als diejenige aus, aus der der Punkt C in die kollineare Grenzlage geraten ist. Daraus ergibt sich sinngemäß z. B. im Fall „B zwischen A und C“:

$r_a, r_c, \alpha', \gamma' > 0$, falls c, a in der ausgezeichneten Halbebene,
 $r_b, \beta' < 0$, falls b in der ausgezeichneten Halbebene.

Durch Vorgabe der Absolutbeträge von je zwei der drei Stücke Radius, Sehne, Zentriwinkel einer Seite ist das dritte Stück bestimmt und mit Zirkel und Lineal konstruierbar und damit die ganze Seite bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.¹⁾ Durch die Vorzeichen von Radius und Zentriwinkel wird die relative Lage der Seite bezüglich der Eckpunktfigur ABC bestimmt. Bei jeder Lage von (o. B. d. A.) M_c auf der Mittelsenkrechten von A, B wird der Kreis vom Radius $\overline{AM_c}$ um M_c durch die Punkte

¹⁾ Die Angaben $r_c = \infty$ und $\gamma' = 0$ bedingen sich gegenseitig und legen s_c noch nicht fest. Daher muß in diesem Fall eines der für c gegebenen Stücke s_c sein (analog für a, b).

A, B in zwei Kreisbögen zerlegt, von denen bezüglich des Eckpunktdreiecks ABC der zu positivem Vorzeichen von r_c und γ' gehörende Teilbogen in Richtung C und der zu negativem Vorzeichen gehörende Teilbogen in die entgegengesetzte Halbebene geklappt ist. Umgekehrt ist die Lage von M_c bezüglich A, B wie folgt von γ' abhängig:

$$-\pi < \gamma' < -\frac{\pi}{2} \rightarrow M_c, C \text{ in verschiedenen Halbebenen bezüglich } AB,$$

$$\gamma' = -\frac{\pi}{2} \rightarrow M_c \in AB,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma' < 0 \rightarrow M_c, C \text{ in der gleichen Halbebene,}$$

$$\gamma' = 0 \rightarrow M_c \text{ unendlich fern,}$$

$$0 < \gamma' < \frac{\pi}{2} \rightarrow M_c, C \text{ in verschiedenen Halbebenen,}$$

$$\gamma' = \frac{\pi}{2} \rightarrow M_c \in AB,$$

$$\frac{\pi}{2} < \gamma' < \pi \rightarrow M_c, C \text{ in der gleichen Halbebene.}$$

Ferner seien noch folgende allgemeine Bezeichnungen vereinbart: Für Punkte $P \neq Q$ bezeichne PQ die Verbindungsstrecke, \overline{PQ} die Klasse aller zu PQ kongruenten Strecken bzw. die Länge von PQ , $L(P, Q)$ die Verbindungsgerade. Für Punkte P, Q, R mit $Q \neq R$ bezeichne $Z(P; Q, R)$ den Kreis vom Radius \overline{QR} um den Mittelpunkt P , $Z(P, x)$ bezeichne den Kreis vom Radius x um P .

An Dreikreisen sei stets g_a die Mittelsenkrechte von BC , g_b die Mittelsenkrechte von CA , g_c die Mittelsenkrechte von AB , σ_x die Spiegelung an g_x ($x = a, b, c$).

2. Satz über die Winkelsumme in Dreikreisen

Die getroffenen Festlegungen über das Vorzeichen der Zentriwinkel sichern die allgemeine Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha + \frac{\beta'}{2} + \frac{\gamma'}{2}, \\ \beta^* &= \beta + \frac{\gamma'}{2} + \frac{\alpha'}{2}, \\ \gamma^* &= \gamma + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Abb. 3a begründet das Auftreten der halben Zentriwinkel an den Ecken und stellt den Fall $\beta', \gamma' > 0$ dar, Abb. 3b zeigt den Fall $\beta', \gamma' < 0$, Abb. 3c den Fall $\beta' > 0, \gamma' < 0$. Die logisch möglichen Fälle, die in Abb. 3d und 3e dargestellt sind, können wegen der Voraussetzung, daß die Dreikreise einfach geschlossene Kurven sein sollen,

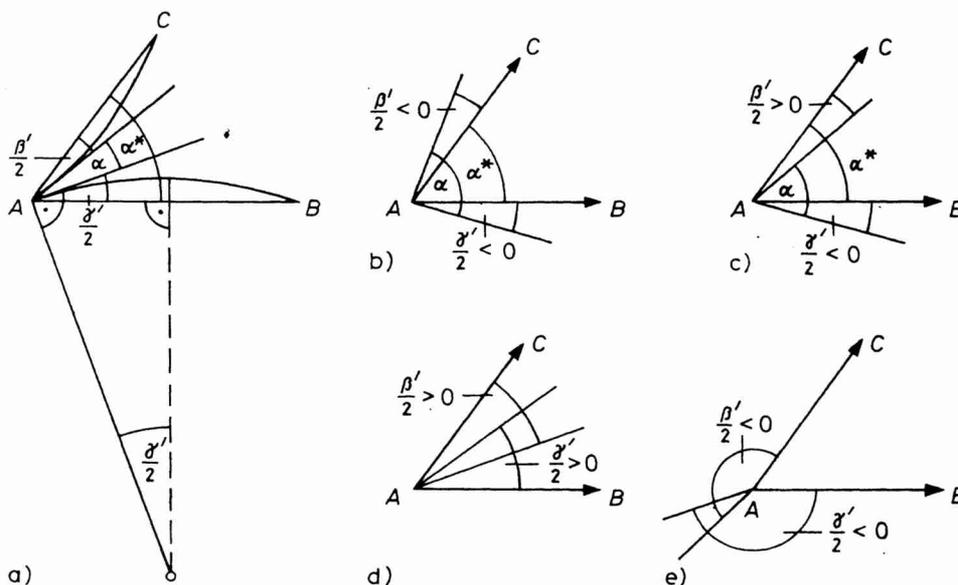


Abb. 3

nicht eintreten. (Will man diese Voraussetzung streichen, so muß man, um den Satz über die Winkelsumme zu retten, auch die Innenwinkel in naheliegender Weise als vorzeichenbehaftet ansehen.)

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich durch Addition unmittelbar der Satz über die Winkelsumme in Dreikreisen:

In jedem Dreikreis ist die Gesamtsumme der Innen- und Zentriwinkel gleich π .

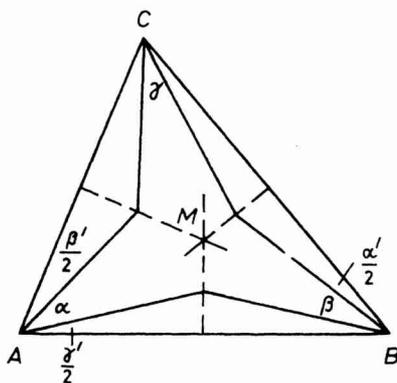


Abb. 4

Da die gewöhnlichen Dreiecke in der Menge der Dreikreise durch die Bedingung $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ charakterisiert sind, ergibt sich hieraus als Spezialfall der Satz über die Winkelsumme in Dreiecken. Der entgegengesetzte Spezialfall besagt, daß in einem Dreispitz (Abb. 1, 7) die Summe der Zentriwinkel gleich π ist. Als leichte Folgerung erhält man ferner, daß nur der mit drei Punkten versehene Vollkreis (Abb. 1, 8) der Bedingung $\alpha = \beta = \gamma = \pi$ genügt.

Die bisherigen Betrachtungen lehren, daß die Aufgabe, einen Dreikreis aus gegebenen Stücken zu konstruieren, äquivalent zur Konstruktion der (mehr symbolischen) Figur Abb. 4 ist, sofern die zugelassenen Konstruktionsmittel die Konstruktion eines Kreises aus zwei seiner Punkte und der Tangente in einem dieser Punkte gestatten. Dabei ist in Abb. 4 o. B. d. A. der Fall dreier positiver Zentriwinkel gezeichnet.

3. Zur Untauglichkeit von Seitenlängen als Bestimmungsstücke

In Verallgemeinerung von Zirkel und Lineal, Einschiebung usw. verstehen wir unter *algebraischen Konstruktionsmitteln* solche, bei denen bezüglich kartesischer Koordinatensysteme die Koordinaten der konstruierbaren Stücke Nullstellen von Polynomen sind, deren Koeffizienten rational von den Koordinaten der gegebenen Stücke abhängen. Wir nehmen an, Dreikreise seien mit algebraischen Mitteln aus einem hinreichenden und unabhängigen System von Stücken konstruierbar, zu denen die als Punktepaar vorgegebene Länge wenigstens einer Seite (o. B. d. A. c) gehört. Eine solche Konstruktion muß auch auf den Fall anwendbar sein, in dem die gegebenen Stücke einen gleichseitigen (d. h. a, b, c von gleicher Länge) und gleichwinkligen (d. h. $\alpha = \beta = \gamma$) Dreikreis determinieren. Ein solcher kommt nach dem Kongruenzsatz von BIEBERBACH bei jeder Permutation von A, B, C mit sich selbst zur Deckung. Daher sind in diesem Fall auch die Zentriwinkel und damit die Seiten a, b, c paarweise kongruent. Wählt man die gegebenen Stücke etwa so, daß sie den gleichseitigen und gleichwinkligen Dreispitz determinieren, so ist $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$. Demnach wäre nach Ausführung der Konstruktion zugleich der gemeinsame Radius r der drei Seiten und ihre Länge $\frac{\pi \cdot r}{3}$ als Punktepaar auf dem Papier repräsentiert, mithin durch eine nur noch rationale Operation eine Strecke der Länge π konstruierbar.

4. Klassifikation und Aufzählung aller wesentlich verschiedenen Aufgaben, einen Dreikreis aus je sechs Stücken aus der Menge der Sehnen, Radien, Innen- und Zentriwinkel zu konstruieren

Zur Reduktion der Zahl der $\binom{12}{6} = 924$ Fälle und zur übersichtlichen Aufzählung der wesentlich verschiedenen Fälle verwenden wir folgende Prinzipien:

1. Auf Grund der trivialen Konstruierbarkeit eines Kreisbogens aus je zwei der drei Stücke Sehne, Radius, Zentriwinkel ist es sinnvoll, sich auf solche Aufgaben zu beschränken, bei denen von jeder Seite höchstens ein metrisches Stück gegeben ist. Beispielsweise wird Vorgabe von r_a und s_a mit Vorgabe von r_a (oder s_a) und α' identifiziert. Wir klassifizieren primär nach der Zahl der gegebenen metrischen Stücke, d. h. nach der Zahl der Seiten, von denen ein metrisches Stück bekannt ist. Dies ergibt die Aufgabenklassen 1., 2., 3. (0. kommt nicht in Frage, da eine Figur, von der nur Winkel gegeben sind, höchstens bis auf Ähnlichkeit bestimmt sein kann. Außerdem lassen sich wegen des Satzes über die Winkelsumme nur fünf Winkel unabhängig voneinander vorgeben.)

2. Da bei Vorgabe eines Zentriwinkels die zusätzliche Vorgabe des zugehörigen Radius

Nr. der Aufgabe	Bemerkungen zur Klassifikation und zu den gegebenen Stücken	o. B. d. A. gegeben
1.	fünf (d. h. sechs) Winkel und ein metr. Stück, dann egal, welches; keine weit. Unterteilg.	$r_c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$
2.1.	zwei Seiten vollständig u. zwei weitere Winkel gegeben	a, b , d. h. $r_a, r_b, \alpha', \beta'$ und γ, γ'
2.1.1.		γ, γ'
2.1.2.		α, γ'
2.1.3.		α, β
2.1.4.		α, γ
2.2.	eine Seite vollständig, ein metrisches Stück von (o. B. d. A.) a und drei weitere Winkel $\neq \alpha'$	c
2.2.1.		r_a und α, β, γ
2.2.1.1.		α, β, γ
2.2.1.2.		α, β, β'
2.2.1.3.		α, γ, β'
2.2.1.4.		β, γ, β'
2.2.2.		c, s_a und α, β, γ
2.2.2.1.		α, β, γ
2.2.2.2.		α, β, β'
2.2.2.3.		α, γ, β'
2.2.2.4.*		β, γ, β'
2.3.	je ein metrisches Stück von o. B. d. A. a, b , vier von α', β' verschiedene Winkel, d. h.	$\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ und s_a, s_b
2.3.1.		s_a, s_b
2.3.2.	(wegen Symmetrie bzgl. a, b) o. B. d. A.	s_a, r_b
2.3.3.		r_a, r_b
3.1.	drei metr. Stücke u. drei Zentriwinkel	a, b, c
3.2.	drei metr. Stücke, zwei Zentriwinkel, ein Innenwinkel γ , dann s_c schon bestimmt, es muß gegeben sein	a, b und r_c, γ
3.2.1.	o. B. d. A. α gegeben	r_c, α
3.2.2.		s_c, α
3.3.	drei metr. Stücke, ein Zentriwinkel, o. B. d. A. zwei Innenwinkel (α, β gleichwertig)	$\gamma',$ d. h. c und α, γ und s_a, s_b
3.3.1.		α, γ und s_a, s_b
3.3.1.1.		s_a, s_b
3.3.1.2.		s_a, r_b
3.3.1.3.*		r_a, s_b
3.3.1.4.		r_a, r_b
3.3.2.		c, α, β und s_a, s_b
3.3.2.1.		s_a, s_b
3.3.2.2.	(o. B. d. A.)	s_a, r_b
3.3.2.3.		r_a, r_b
3.4.	je ein metrisches Stück von a, b, c und	α, β, γ
3.4.1.		s_a, s_b, s_c
3.4.2.		s_a, s_b, r_c
3.4.3.*		r_a, r_b, s_c
3.4.4.		r_a, r_b, r_c

bzw. der zugehörigen Sehne trivial äquivalent sind, identifizieren wir jeweils diese beiden Fälle und klassifizieren sekundär nach der Zahl der Seiten, für die der Zentriwinkel und ein metrisches Stück (also die Seite bis auf Kongruenz) gegeben sind.

In der Tabelle auf S. 67 sind die drei nicht mit Zirkel und Lineal lösbaren Aufgaben durch einen Stern hinter der Nummer gekennzeichnet.

5. Skizze einiger Lösungen

Zu den einfachsten Aufgaben gehört 1. Nach Konstruktion der vollständig bekannten Seite c ergeben sich aus den bekannten Winkeln zwei von B bzw. A ausgehende Strahlen als geometrische Örter für C , und der Einbau der Seiten a, b kann dann jeweils auf der Grundlage zweier bekannter Punkte und der bekannten Tangente in einem dieser Punkte erfolgen. Die an die gegebenen Stücke zu stellende Bedingung, die die Lösbarkeit sichert, erfordert hier nur die Existenz eines Schnittpunktes der erwähnten Strahlen in der durch die gewählte Lage und das gegebene Vorzeichen von c bestimmten Halbebene für C , d. h., es muß

$$\begin{aligned} 0 < \alpha + \frac{\beta'}{2} + \frac{\gamma'}{2} < \pi, \\ 0 < \beta + \frac{\gamma'}{2} + \frac{\alpha'}{2} < \pi, \\ 0 < \gamma + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2} < \pi, \\ \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi \end{aligned} \tag{2}$$

gelten.

Bei kollinear Lage von A, B, C reicht ein metrisches Stück nicht zur Determination des Dreikreises aus. Demnach erhalten wir den folgenden zur Aufgabe 1. gehörigen „erweiterten“ Kongruenzsatz:

Zu einem beliebigen metrischen Stück und beliebigen sechs Winkeln, die die Bedingungen (2) erfüllen, gibt es bis auf Kongruenz genau einen Dreieck mit den vorgegebenen Stücken.

Allgemein verstehen wir unter einem *erweiterten Kongruenzsatz* einen solchen, der nicht nur die Kongruenz je zweier Figuren aussagt, die in gewissen genannten Stücken übereinstimmen, sondern auch unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen über die gegebenen Stücke die Existenz solcher Figuren behauptet. Er läßt sich unter Benutzung von Variablen x_i, y_j, y'_j für geometrische Objekte verschiedener Art immer in der folgenden normierten Form aussprechen:

Für alle x_1, \dots, x_n gilt (Wenn $H'(x_1, \dots, x_n)$, so gibt es y_1, \dots, y_m , so daß $(H''(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ und für alle y'_1, \dots, y'_m mit $H''(x_1, \dots, x_n, y'_1, \dots, y'_m)$ gibt es eine Bewegung b mit $b(y_1) = y'_1$ und ... und $b(y_m) = y'_m$).

Zum Beispiel könnte und sollte man den Kongruenzsatz „SSS“ in der folgenden schulgemäßen erweiterten Form behandeln:

- a) *Zu je drei Strecken a, b, c , die den Dreiecksungleichungen $a < b + c, b < c + a, c < a + b$ genügen, gibt es ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ und $\overline{CA} = b$.*
- b) *Je zwei Dreiecke, die in den Seiten übereinstimmen, sind kongruent.*

Zusatz: Aus je drei Strecken, die den Dreiecksungleichungen genügen, ist das demnach bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte Dreieck mit diesen Seiten auf folgende Weise mit Zirkel und Lineal konstruierbar ...

Eine Reihe von Dreikreisaufgaben ist nach der „Methode der geometrischen Örter“ lösbar, z. B. 2.2.1.3. (gegeben $c, r_a, \alpha, \gamma, \beta'$). Nachdem man c an beliebiger Stelle konstruiert hat, ergibt sich als erster Ort für M_a der Kreis $Z(B, r_a)$. Aus A, α, β' erhält man einen Strahl als Ort für C und bei zunächst beliebiger Wahl von C auf diesem Strahl aus β', γ und r_a die jeweils zugehörige Lage von M_a . Verschiebt man C auf seinem Ort, so bewegt sich M_a auf einem dazu parallelen Strahl, dem zweiten Ort für M_a . (Hat man M_a , so auch den zugehörigen Punkt C und dann leicht den gesuchten Dreikreis.) Je nachdem, ob die beiden Örter für M_a keinen, genau einen oder zwei Punkte gemeinsam haben, gibt es keine, eine oder zwei Lösungen der Aufgabe. Dem Leser sei empfohlen, die Bedingungen dafür in Bedingungen für die ursprünglich gegebenen Stücke zu übersetzen und den zugehörigen erweiterten Kongruenzsatz zu formulieren.

Eine Reihe von Aufgaben läßt sich mittels einer oder mehrerer Spiegelungen an Mittelsenkrechten des Sehnendreiecks lösen, z. B. 2.3.1. (gegeben $s_a, s_b, \alpha, \beta, \gamma, \gamma'$). Hintereinanderausführung der Spiegelungen σ_a, σ_b an g_a bzw. g_b (Abb. 5) ist, da

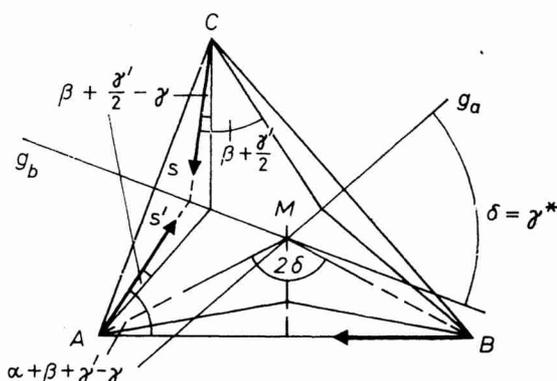


Abb. 5

hierbei B in A übergeführt wird, eine Drehung um M um den Winkel $2\delta = \sphericalangle BMA$, wobei $\delta = \sphericalangle g_a, g_b = \sphericalangle BCA = \gamma^*$ ist. Bei σ_a geht Strahl (B, A) über in den in Abb. 5 mit s bezeichneten Strahl und s bei σ_b in den Strahl s' , woraus sich schließlich $2\delta = \pi + \gamma - (\alpha + \beta + \gamma')$, mithin für γ^* der bekannte Winkel $\frac{\pi + \gamma - (\alpha + \beta + \gamma')}{2}$

ergibt. Aus γ^*, s_a und s_b ist nun das Sehnendreieck konstruierbar, in das man mittels γ', α, β die Seiten c, b, a eintragen kann.

Wegen ihrer Verwandtschaft mit einer der nicht mit Zirkel und Lineal lösbaren Aufgaben ist 2.3.3. von Interesse (gegeben $r_a, r_b, \alpha, \beta, \gamma, \gamma'$). Da man aus r_a, r_b und γ sofort die Strecke $\overline{M_a M_b}$ konstruieren kann, ist diese Aufgabe (Abb. 6a) äquivalent zu der Aufgabe, ein Viereck aus drei Seiten und den der unbekannteten Seite anliegenden Winkeln zu konstruieren (Abb. 6b). Die Lösung der transformierten Aufgabe erhält man wie folgt: Ausgehend von $r_a = \overline{BM_a}$ erhält man den Kreis $Z(M_a; M_a, M_b)$ als ersten Ort für M_b und durch den bekannten Winkel bei B einen Strahl als Ort für A . Aus dem bekannten Winkel bei A ergibt sich zu jeder zunächst will-

kürlichen Wahl von A auf diesem Strahl eine zugehörige Lage von M_b . Bewegt man A auf seinem Ort, so bewegt sich M_b auf einem hierzu parallelen Strahl, dem zweiten Ort für M_b .

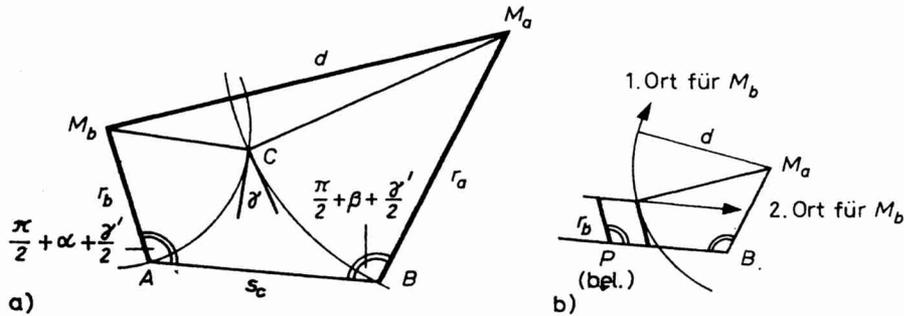


Abb. 6

6. Die Aufgabe 2.2.2.4.

Gegeben sind $s_a, s_c, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$. Daher ist der Dreikreis konstruierbar, sobald man das zugehörige Sehnendreieck kennt. Die Analysisfigur Abb. 7a zeigt, daß man die Aufgabe, das Sehnendreieck zu finden, als Aufgabe **D** formulieren kann, ein gewöhnliches Dreieck aus zwei Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}$ und der Differenz δ der Winkel bei B und C zu konstruieren. ($\delta = \gamma^* - \beta^*$ ergibt sich in unserem Fall als $\frac{\beta'}{2} + \gamma - \beta - \frac{\gamma'}{2}$ aus den gegebenen Winkeln.)

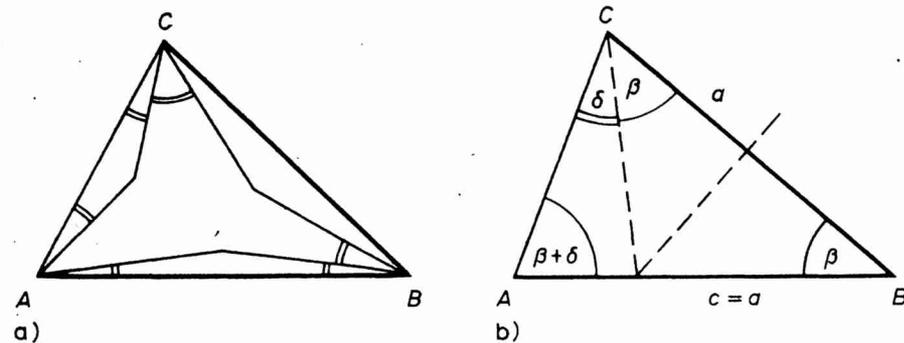
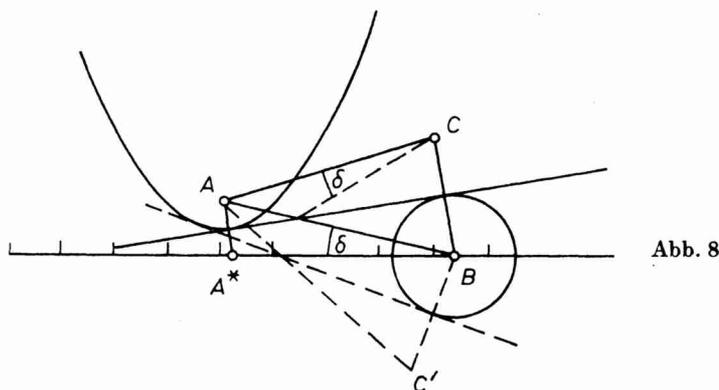


Abb. 7

Wäre die Aufgabe **D** mit Zirkel und Lineal lösbar, so auch im Fall $\overline{AB} = \overline{BC}$. In diesem Fall wäre daher (mit den Bezeichnungen von Abb. 7b) aus einem beliebig gegebenen Winkel δ der Winkel $\beta = \frac{\pi - 2\delta}{3}$ konstruierbar.

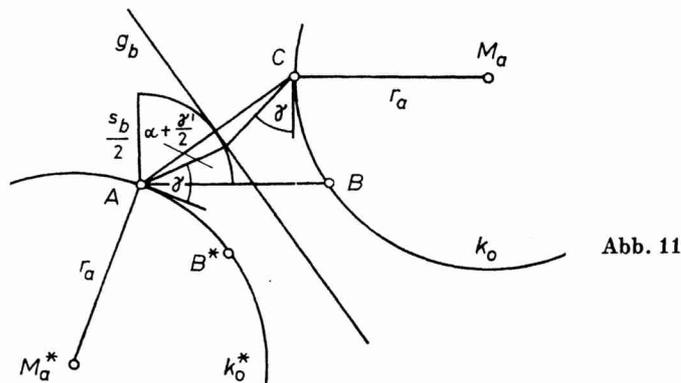
Aufgabe **D** ist äquivalent zu einem Spezialfall der Aufgabe **TPK**, die gemeinsamen Tangenten an einen gegebenen Kreis und eine durch Brennpunkt und Leitlinie gegebene Parabel zu legen (deren Unlösbarkeit mit Zirkel und Lineal also ebenfalls auf die als bekannt angenommene Unlösbarkeit der Dreiteilung beliebiger Winkel

zurückgeführt ist): Die Aufgabe, bei gegebenem A und B den Punkt C so zu finden, daß BC die gegebene Länge und die Differenz der Winkel den gegebenen Wert δ hat, ist offenbar gleichwertig der Aufgabe, die Mittelsenkrechte g_a zu finden. g_a ist einerseits Tangente an den bekannten Kreis $Z\left(B, \frac{s_a}{2}\right)$, spiegelt andererseits den Strahl (C, A) auf einen Strahl (B, A^*) , der mit Strahl (B, A) den bekannten Winkel δ einschließt (Abb. 8). Die letztere Bedingung wird bekanntlich gerade von den Tangenten derjenigen Parabel erfüllt, die A als Brennpunkt und $L(B, A^*)$ als Leitgerade hat. Demnach ist die Aufgabe **D** äquivalent zu demjenigen Spezialfall von **TPK**, in dem der Mittelpunkt des Kreises auf der Leitlinie der gegebenen Parabel liegt. Übrigens ist **TPK** und damit auch **D** bzw. 2.2.2.4. zeichenpraktisch sehr gut mit einem rechtwinkligen Dreieck zu lösen. Bewegt sich der Scheitel des rechten Winkels so auf der Scheiteltangente der Parabel, daß der eine Schenkel durch den Brennpunkt gleitet, so durchläuft der andere Schenkel die Tangenten der Parabel (Lambertscher Parabelsatz). Durch Verschieben des Zeichendreiecks findet man mit guter Genauigkeit diejenigen Tangenten, die gleichzeitig Tangenten an den gegebenen Kreis sind.



Wir wollen uns noch mit der interessanten Determination der Aufgabe **D** beschäftigen. In einem Dreieck ABC hängt (bezüglich in Dreiecken üblicher Bezeichnungen) γ bei festem c und a stetig von β ab. Für $a \leq c$ ist $\gamma(\beta)$ monoton fallend, und zwar $\gamma(0) = \pi$, $\gamma(\pi) = 0$ bei $a < c$, $\gamma(\beta) = \frac{\pi - \beta}{2}$ bei $a = c$ sogar linear. Daher gibt es zu festem δ genau ein β_0 mit $\gamma(\beta_0) = \beta_0 + \delta$. (Bei $a = c$ muß $\delta < \frac{\pi}{2}$ sein, andernfalls gilt dies für $\delta < \pi$.) Von den im allgemeinen vier gemeinsamen Tangenten von Kreis und Parabel ergeben in diesem Fall zwei die bei festem A und B spiegelbildlichen Lagen von C , während die beiden anderen den Punkt A nicht auf die durch den Winkel δ gegebene Halbgerade der Leitlinie spiegeln. Im Fall $c < a$ liegen bei festem A, B die Scheitel C mit festem $\sphericalangle BCA$ auf einem Kreisbogen über der Sehne AB , dessen Zentriwinkel größer als π ist. Die Scheitel C mit festem BC liegen auf einem Kreis um B (Abb. 9). Daher gibt es zu $\gamma_0 < \gamma_1$ ($\sin \gamma_1 = \frac{c}{a}$) zwei Werte β mit $\gamma(\beta) = \gamma_0$, zu $\gamma_0 = \gamma_1$ genau ein solches β und zu $\gamma_0 > \gamma_1$ kein β . Da ferner in diesem Fall $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$ ist, ist die Funktion $\gamma(\beta)$ im Intervall $[0, \beta_1]$ monoton wachsend und im Intervall $[\beta_1, \pi]$ monoton fallend. Abb. 10 macht plausibel, daß es in diesem Fall

Kegelschnittes zu konstruieren. Zeichenpraktisch läßt sich diese Aufgabe wiederum sehr gut mit einem rechtwinkligen Zeichendreieck lösen. Gleitet sein Scheitel auf dem Hauptscheitelkreis und sein einer Schenkel durch einen Brennpunkt, so durchläuft der andere Schenkel alle Tangenten des Kegelschnittes, insbesondere diejenigen, die gleichzeitig Tangenten an den gegebenen Kreis $Z\left(A, \frac{s_b}{2}\right)$ sind.



Die Aufgabe **TKK** ist dual zur Aufgabe, die Schnittpunkte eines Kreises und einer Ellipse/Hyperbel/Parabel zu konstruieren. Auf die letztere Aufgabe (und damit durch einfache Umdeutung der Punktkoordinaten in Geradenkoordinaten auch auf **TKK**) lassen sich nach dem Satz von SMITH und KORTUM ([1], pp. 155f. und dort angegebene Literatur sowie [13], pp. 285ff.) alle Aufgaben dritten Grades mit Zirkel und Lineal reduzieren. Daher ist die Aufgabe **TKK** und damit die Aufgabe 3.3.1.3. nicht allgemein mit Zirkel und Lineal lösbar.

Nachträglich erkennt man, daß diese Begründung auch zur Unlösbarkeit der Aufgabe 2.2.2.4. reicht. Jedoch ist die in 6. angegebene Reduktion der Winkeldreiteilung auf den Fall **TPK** der Aufgabe **TKK** neu und durch ihre Einfachheit überaus reizvoll. Leider ist es trotz langer Bemühungen nicht gelungen, eine ähnlich schöne, rein geometrische Reduktion einer bereits als mit Zirkel und Lineal unlösbar bekannten Aufgabe auf die Fälle Ellipse/Hyperbel der Aufgabe **TKK** zu finden.

Zum Nachweis der Unlösbarkeit der Aufgabe 3.4.3. mit Zirkel und Lineal zeigen wir, daß diese Aufgabe äquivalent zum Fall Ellipse der oben behandelten Aufgabe **TKK** ist. Gegeben sind $r_a, r_b, s_c, \alpha, \beta, \gamma$. Wie bei Aufgabe 2.3.3. ist aus r_a, r_b und γ sofort die Strecke $\overline{M_a M_b}$ konstruierbar, und wie dort erkennt man, daß 3.4.3. äquivalent zur Aufgabe ist, ein Viereck zu konstruieren, von dem aber diesmal alle vier Seiten und die Differenz δ zweier benachbarter Winkel gegeben sind (Abb. 12a). Diese Vierecksaufgabe bezeichnen wir mit **V**, und in unserem Fall ist die Differenz $\delta = \alpha - \beta$ der Winkel bei A und B bekannt. Umgekehrt kann jeder Fall der Aufgabe **V** als Aufgabe 3.4.3. interpretiert werden, wenn nur für die bezüglich der Lage der Winkel, deren Differenz bekannt ist, als r_a, r_b und $\overline{M_a M_b}$ zu deutenden Viereckseiten die Ungleichung $\overline{M_a M_b} \leq r_a + r_b$ erfüllt ist. Durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten g_c geht A in B und M_b in einen Punkt M_b^* über, der durch $\overline{M_b^* B} = r_b$ und $\sphericalangle M_a B M_b^* = \delta$ charakterisiert ist. Daher läßt sich die Figur $M_a B M_b^*$ aus den gegebenen Stücken sofort zeichnen, und die Auffindung des Punktes A (oder M_b), der das Viereck

fixiert, ist äquivalent zur Auffindung der Mittelsenkrechten g_c . Diese ist einerseits Tangente des Kreises $Z\left(B, \frac{s_c}{2}\right)$, andererseits Tangente der Ellipse mit den Brennpunkten M_a, M_b^* und der großen Achse $2a = \overline{M_a M_b} = \overline{M_a P M_b^*}$ (P Berührungspunkt, siehe Abb. 12 b).

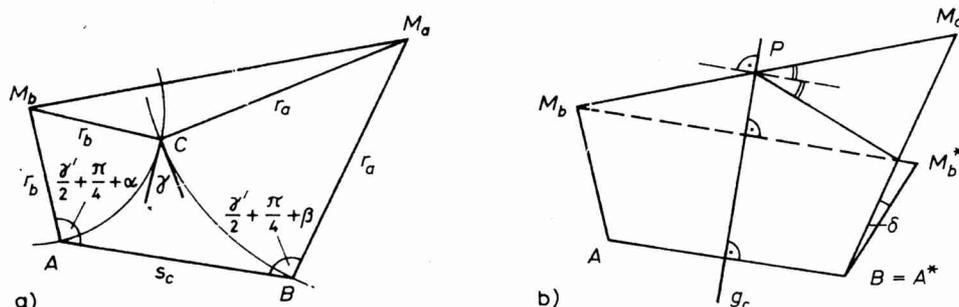


Abb. 12

Umgekehrt kann der Fall Ellipse der Aufgabe **TKK** immer als Aufgabe **V** und damit auch als Aufgabe 3.4.3. gedeutet werden, sofern die große Achse der gegebenen Ellipse kleiner oder gleich der Summe der Abstände r_a, r_b der Brennpunkte vom Mittelpunkt B des gegebenen Kreises ist. Erwähnt sei abschließend, daß die Aufgabe **V** u. a. im Spezialfall $\delta = 0$ mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Dies entspricht dem Fall $\alpha = \beta$ der Aufgabe 3.4.3. bzw. dem Fall der Aufgabe **TKK**, wo der Mittelpunkt des Kreises zu den Brennpunkten der Ellipse kollinear ist.

LITERATUR

- [1] BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Verlag Birkhäuser, Basel 1952.
- [2] BIEBERBACH, L.: Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke. Math. Ann. 130 (1955), 46–86.
- [3] JACOBSTHAL, E.: Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach über Kreisbogendreiecke. Math. Ann. 132 (1956), 145–147.
- [4] BIEBERBACH, L.: Über die Euklidischen Invarianten der gleichwinkligen Kreisbogendreiecke mit der Winkelsumme π . THE GOLDEN JUBILEE COMMEMORATION VOLUME (1958–1959), Calcutta Math. Soc., 33–63.
- [5] BIEBERBACH, L.: Dreiblatt und Brocardsche Punkte. Elemente der Mathematik XX/5 (1965), 109–112.
- [6] BIEBERBACH, L.: Zwei Kongruenzsätze für Kreisbogendreiecke in der Euklidischen Ebene. Math. Ann. 190 (1970), 97–118.
- [7] HOLZ, W. K. B.: Das ebene obere Dreieck. Eine Aufgabenstellung. Selbstverlag, Hagen. Druck Bologna 1944.
- [8] HOLZ, W. K. B.: Entwurf einer künftigen Dreipunkttheorie. Vermessungstechnische Rundschau, 15. Jg., H. 2 (1933), 53–55.
- [9] HOLZ, W. K. B.: Der Dreipunkt und seine primitiven Lösungen Dreieck/Dreikreis/Umkreis. Der math. u. naturwiss. Unterricht 8 (1955), 108–112.
- [10] HOLZ, W. K. B.: Über eine einfache zeichnerische Lösungsmethode zur Grundaufgabe der Kreisbogendreiecke, Allgemeine Vermessungsnachrichten, H. 8 (1957), 243–247.

- [11] HOLZ, W. K. B.: Über einige Berührungs- und Orthogonalkreise am Dreikreis. Elemente der Mathematik XVIII/6 (1963), 136—137.
- [12] KRÖTENHEERDT, O.: Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen. Wiss. Z. Univ. Halle 1966, 677—700.
- [13] SCHREIBER, P.: Theorie der geometrischen Konstruktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

Manuskripteingang: 30. 3. 1980

VERFASSER:

PETER SCHREIBER, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Greifswald

