Beiträge zur Algebra und Geometrie
13 (1982), 55–60

# Erzeugung isophotischer Streifen bei geometrischer Zentralbeleuchtung zweiter Art, wenn die Leitkurve eine Gerade ist

ERHART BOHNE

## 0. Einleitung

Besitzt im $E^3$ jedes Flächenelement eines orientierten Streifens $\big(\boldsymbol{r}(u), \boldsymbol{n}(u)\big)$[1]) mit der Leitkurve $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u)$ bei geometrischer Beleuchtung die gleiche Beleuchtungsstärke, so heißt dieser Streifen ein *isophotischer Streifen*. In [2] wurde von E. BOHNE ein Verfahren zur Erzeugung isophotischer Streifen bei geometrischer Parallelbeleuchtung und Zentralbeleuchtung erster und zweiter Art mit einer Lichtquelle angegeben, wenn die Leitkurve des zu erzeugenden Streifens, eine feste Beleuchtungsstärke und die Lichtquelle gegeben sind.
Nachfolgend wird das Beleuchtungskegelverfahren zur Erzeugung isophotischer Streifen bei geometrischer Zentralbeleuchtung zweiter Art (Berücksichtigung des Abstands der Lichtquellen von den Aufpunkten der Flächenelemente) verwendet. Die Leitkurve ist eine Gerade. Mit der Methode der konstruktiven Geometrie werden unter Berücksichtigung der Lagebeziehungen zwischen Lichtquelle und Leitgerade sowie beliebig vorgegebener Beleuchtungsstärken Aussagen über die Existenz, Anzahl und Art der zu erzeugenden isophotischen Streifen hergeleitet und Konstruktionen zur Ermittlung der Streifenerzeugenden und Streifenbegrenzungen angegeben. Ein interessantes Resultat der Erzeugung isophotischer Streifen bei Zentralbeleuchtung zweiter Art ist eine Schar trizirkularer algebraischer Kurven sechster Ordnung, auf denen die Streifenbegrenzungspunkte isophotischer Streifenstücke liegen. Diese Kurven haben offensichtlich auch physikalisch-lichttechnische Bedeutung.
Nach [2] wird jedem Flächenelement $(P, \tau)$ und jeder Lichtquelle $Q_Z$ $(\neq P)$ eines isophotischen Streifens genau ein Beleuchtungskegel $\big(P, l = l(PQ_Z), \psi = \sphericalangle (l, \tau)\big)$ mit $Q_Z$ als zentrale Lichtquelle, $l$ als Kegelachse und $\psi$ als halber Öffnungswinkel des geraden Kreiskegels zugeordnet. Dabei gilt $\psi + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, wenn $\varphi$ der Winkel zwischen der Normalen $n$ des Flächenelements und dem Lichtstrahl $l$ ist, der das Flächenelement in $P$ trifft. Bei Zentralbeleuchtung zweiter Art ändert sich der halbe Öffnungswinkel $\psi$ des Beleuchtungskegels $\Phi_{BK}$ längs eines isophotischen Streifens im allgemeinen bei konstanter Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 = \dfrac{\cos\varphi}{a^2}$ mit $a = \|\overline{PQ_Z}\| \neq 0$ stetig, und alle Kegelachsen gehören dem Bündel $(Q_Z)$ der orientierten Lichtstrahlen an.

---

[1]) Vgl. etwa W. BLASCHKE [1] oder K. STRUBECKER [6].

## 1. Erzeugung isophotischer Streifen für $b_2 = 0$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Lichtquelle $Q_Z$ mit der Leitgeraden $g$ inzidiert. Ist $\bar{b}_2 > 0$ und damit der Beleuchtungswinkel $\psi > 0$, so liegt die Kurventangente $t = g$ der Leitlinie $g$ für jeden Kurvenpunkt $P$ im Innern des zugehörigen Beleuchtungskegels $\Phi_{BK}$. Damit gibt es durch keinen Punkt $P$ von $g$ ein Flächenelement der konstanten Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 > 0$ als Tangentialebene an $\Phi_{BK}$ durch die Spitze $P$, welches zugleich die Kurventangente $t$ enthält. Bei $\psi = 0$ entarten alle Beleuchtungskegel, und die Streifenerzeugenden fallen mit $g$ zusammen. Also gilt

Satz 1. *Inzidiert die Lichtquelle $Q_Z$ bei Zentralbeleuchtung zweiter Art mit der Leitgeraden $g$, so existieren zu $g$ dann und nur dann isophotische Streifen, wenn die Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 = 0$ ist. Jeder unbegrenzte planare Streifen mit $g$ als Leitgerade ist ein isophotischer Streifen dieser Beleuchtungsstärke.*

Im folgenden wird der Sonderfall, daß $Q_Z$ mit $g$ inzidiert, ausgeschlossen. Dann spannen $g$ und $Q_Z$ stets eine Verbindungsebene $\varepsilon(gQ_Z)$ auf. Durch $\varepsilon$ wird aus dem Bündel $(Q_Z)$ ein Lichtstrahlenbüschel $\{Q_Z\}$ herausgeschnitten, dem alle Achsen der Beleuchtungskegel der Leitkurvenpunkte von $g$ angehören. Ist für die Erzeugung isophotischer Streifen längs $g$ die Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 = 0$ gegeben, so entarten alle Beleuchtungskegel mit $\psi = 0$, und die erzeugten Ebenen der Flächenelemente isophotischer Streifen fallen mit $\varepsilon$ zusammen.

Satz 2. *Ist $g$ Leitgerade und inzidiert die Lichtquelle $Q_Z$ nicht mit $g$, so existiert für $\bar{b}_2 = 0$ längs $g$ bei Zentralbeleuchtung zweiter Art genau ein unbegrenzter planarer isophotischer Streifen.*

## 2. Erzeugung isophotischer Streifen für $\bar{b}_2 \neq 0$

Bei Zentralbeleuchtung zweiter Art mit der Lichtquelle $Q_Z$ liegen die Trägerpunkte $P$ $(\neq Q_Z)$ aller Flächenelemente gleicher Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ im abgeschlossenen Gebiet der Beleuchtungssphäre $\left(Q_Z, \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}\right)$. Der Schnitt der Beleuchtungssphäre $\Phi_{BK*}$ mit der Ebene $\varepsilon(gQ_Z)$ liefert für den betrachteten Fall das abgeschlossene Kreisgebiet $k_B\left(Q_Z, \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}\right)$, in dem die Träger von Flächenelementen der festen Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 \neq 0$ liegen. Hieraus folgt sofort

Satz 3. *Schneidet oder berührt eine nicht durch $Q_Z$ gehende Leitgerade $g$ den Beleuchtungskreis $k_B$, so gibt es auf $g$ bei Zentralbeleuchtung zweiter Art Trägerpunkte $P$ von Flächenelementen der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2 \neq 0$.*

Berührt $g$ den Kreis $k_B$ in einem Punkt $P_T$, so existiert genau ein $g$ enthaltendes Flächenelement der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ $(\neq 0)$.
$\tau_T$ ist die $g$ enthaltende und zu $\varepsilon$ orthogonale Tangentialebene an die Beleuchtungssphäre in $P_T$. Schneidet $g$ den Beleuchtungskreis $k_B$ in zwei Punkten, so gibt es in einer Umgebung des Mittelpunktes $P_M$ der Sehne auf $g$ stets $\infty^1$ Trägerpunkte erster Art mit genau zwei Flächenelementen der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ $(\neq 0)$, die $g$ enthalten und den zugehörigen Beleuchtungskegel berühren. Als Schnitt dieser Tangentialebenen mit dem Beleuchtungskegel erhält man die Streifenerzeugenden $e_{1,2}$.

Satz 4. *Bei Zentralbeleuchtung zweiter Art gibt es auf einer Leitgeraden g für* $\bar{b}_2 \neq 0$ *und* $Q_Z \notin g$ *genau ein Kurvenstück mit Trägerpunkten erster Art, wenn* $0 < \|\overline{PQ_Z}\| < \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}$ *gilt. Somit existieren längs des Kurvenstücks genau zwei isophotische Streifenstücke der Beleuchtungsstärke* $\bar{b}_2$.

Von Bedeutung sind die Begrenzungspunkte der isophotischen Streifenstücke auf $g$. Das sind Trägerpunkte zweiter Art mit genau einem Flächenelement der gegebenen Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$. Diese Flächenelemente gehören beide isophotischen Streifenstücken an. In Trägerpunkten zweiter Art berührt die Kurventangente den zugehörigen Beleuchtungskegel, und die doppelt zu zählende Streifenerzeugende fällt mit $t$ zusammen. Es sei $(O; x_2, x_3)$ ein kartesisches Normalkoordinatensystem in der Ebene $\varepsilon(gQ_Z)$ mit $Q_Z(0, 0) = \mathbf{0}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe die Leitgerade $g$ die Gleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a}$ mit Richtungsvektor $\boldsymbol{a} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ und

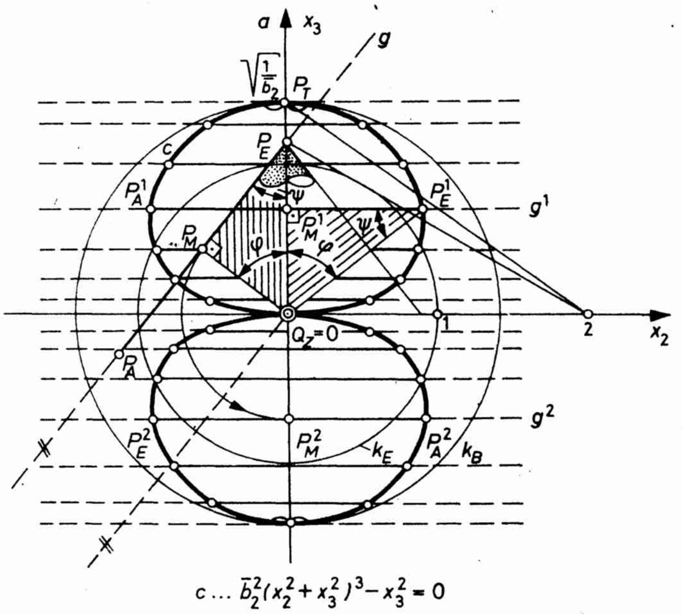


Abb. 1

$\boldsymbol{r}_0 = (0, x_3)^{\mathrm{T}}$. Für die Trägerpunkte zweiter Art einer Leitkurve isophotischer Streifen gilt $\cos^2 \alpha = \cos^2 \psi$, wobei $\alpha = \sphericalangle\, (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{t})$ ist. Mit $\boldsymbol{r}^2(u) = x_2^2 + x_3^2 = a^2$ ist $\cos^2 \alpha = \dfrac{x_2^2}{x_2^2 + x_3^2}$. Ferner ist $\cos^2 \psi = 1 - \bar{b}_2^2 a^4 = 1 - \bar{b}_2^2(x_2^2 + x_3^2)^2$. Also gilt

$$\bar{b}_2^2(x_2^2 + x_3^2)^3 - x_3^2 = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{b}_2 \neq 0. \tag{1}$$

Diese algebraische Kurve sechster Ordnung ist in Abb. 1 dargestellt. Sie gehört zu der Familie der Rosenkurven und fand bisher keine Erwähnung.[1]) Die trizirkulare Kurve (1) liegt im Inneren des durch $\bar{b}_2 =$ konstant bestimmten Beleuchtungskreises $k_B\left(Q_Z, \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}\right)$. Sie besitzt den Doppelpunkt $Q_Z = O$ als Symmetriepunkt und

---

[1]) Vgl. etwa G. LORIA [5], S. 305, J. KRAMES [4], S. 210, oder K. FLADT [3].

hat die Koordinatenachsen als Symmetrieachsen. Der Schnitt einer zur $x_2$-Achse parallelen Leitgeraden $g$ mit der Kurve (1) liefert die Begrenzungspunkte der erzeugten isophotischen Streifenstücke. Die zu diesen Punkten zweiter Art gehörenden Streifenebenen enthalten die Leitgerade $g$ und haben orthogonale Lage zur $x_2, x_3$-Ebene.

Satz 5. *Bei paralleler Lage der Leitgeraden $g$ zur $x_2$-Achse und Zentralbeleuchtung zweiter Art mit $Q_Z = O$ und $\bar{b}_2 \neq 0$ ist der Ort für die Trägerpunkte zweiter Art als Begrenzungspunkte isophotischer Streifenstücke die algebraische Kurve* (1), *welche dem Beleuchtungskreis $k_B$ einbeschrieben ist.*

Eine punktweise Konstruktion der algebraischen Kurve sechster Ordnung ist möglich. Man konstruiert zu den Punkten auf der $x_3$-Achse im Intervall $\left(0, \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}\right)$ die Beleuchtungskegel und betrachtet eine der beiden Kegelerzeugenden des wahren Umrisses als Leitgerade $g$ (Abb. 1). Der Lotfußpunkt $P_M$ des Lotes von $Q_Z = O$ auf $g$ ist Mittelpunkt des Leitkurvenstücks erster Art, von dem $P_A$ (= Anfangspunkt) konstruiert werden kann. Durch Rotation $r(Q_Z, -\varphi$ bzw. $\pi - \varphi)$ von $g$ erhält man $g_1$ und $g_2$ parallel zur $x_2$-Achse. Dabei wird die Trägerstrecke $P_A P_E$ der isophotischen Streifen auf die Bildstrecken $P_A^1 P_B^1$ und $P_A^2 P_B^2$ abgebildet, und die Bildpunkte von $P_A$ und $P_B$ sind Punkte der Sektrix (1). Für $\bar{b}_2 = 0$ entartet die Kurve (1) zu der reellen Doppelgeraden $x_3 = 0$. Inzidiert $g$ mit $Q_Z$, so schrumpft die Strecke $P_A P_B$ zum Punkt $Q_Z$ zusammen.

## 3. Analytische und konstruktive Darstellung der isophotischen Streifen

Die erzeugten isophotischen Streifen sind längs $g$ gegeben, wenn in jedem Leitkurvenpunkt $P$ die Tangente $t$ und die Streifenerzeugenden $e_{1,2}$ als Schnitt des Beleuchtungskegels $\big(P(u), l(Q_Z P), \psi(u)\big)$ der gegebenen Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ ($\neq 0$) mit den die Kurventangente $t$ enthaltenen Tangentialebenen analytisch oder durch Konstruktion bestimmt sind.
Mit $\boldsymbol{a}_Z = \big(0, a_{Z2}(u), a_{Z3}(u)\big)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}_0 - u\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_Z^2 = 1$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{a} = (0, 1, 0)^{\mathsf{T}}$ und $\cos^2\psi = c_2^2 = 1 - \bar{b}_2^2(u^2 + x_{30}^2)^2$ gilt für die Formenmatrix der Beleuchtungskegel nach [2] (6)

$$\boldsymbol{M}_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} -c_2^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{Z2}^2(u) - c_2^2 & a_{Z2}(u)\, a_{Z3}(u) \\ \hline 0 & a_{Z2}(u)\, a_{Z3}(u) & a_{Z3}^2(u) - c_2^2 \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad c_2^2 \neq 0. \tag{2}$$

Wegen $\boldsymbol{a}_Z^2 = 1$ ist $\boldsymbol{a}_Z = \boldsymbol{a}_Z(u) = \dfrac{(0, u, x_{30})^{\mathsf{T}}}{\sqrt{u^2 + x_{30}^2}}$, und das quadratische System (9) von [2] hat die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \Phi_{BK}: & -c_2^2 x_1^2 + (a_{Z2}^2 - c_2^2)\, x_2^2 + (a_{Z3}^2 - c_2^2)\, x_3^2 + 2a_{Z2}a_{Z3}x_2x_3 = 0, \\ \text{(II)} & \pi: & (a_{Z2}^2 - c_2^2)\, x_2 + a_{Z2}a_{Z3}x_3 = 0, \\ \text{(III)} & \Phi_{BK_u}: & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \end{array} \tag{3}$$

$\pi(u)$ ist die Polarebene der Leitkurventangente $\boldsymbol{t}(u)$ bezüglich des Beleuchtungskegels $\Phi_{BK}(u)$ und $\Phi_{BK_u}$ die Einheitskugel. Die Lösungen des Gleichungssystems sind die Erzeugendeneinheitsvektoren der isophotischen Streifen. Es gilt

$$\boldsymbol{e}_k(u) = \left(\pm \frac{1}{c_2 a_{Z3}} \sqrt{a_{Z3}^2(c_2^2 - a_{Z2}^2) - (c_2^2 - a_{Z2}^2)^2},\ \frac{a_{Z2}}{c_2},\ \frac{c_2^2 - a_{Z2}^2}{c_2 a_{Z3}}\right)^{\mathsf{T}}$$

mit $k = 1, 2$.

Die Normalvektoren für die erzeugten isophotischen Streifen $(\boldsymbol{r}(u), \boldsymbol{N}_k(u))$ erhält man mit dem Kreuzprodukt

$$\boldsymbol{N}_k = \boldsymbol{N}_k(u) = [\boldsymbol{t}(u), \boldsymbol{e}_k(u)] \qquad (k = 1, 2).$$

Das Kreuzprodukt verschwindet in den Trägerpunkten zweiter Art, den Begrenzungen der isophotischen Streifenstücke. Wegen $\boldsymbol{N}_k(u) = (0, 0, -1)^{\mathsf{T}}$ gilt $\boldsymbol{t}(u) = \lambda \boldsymbol{e}_k(u)$ mit $\lambda \neq 0$.

Die Vektoren $\boldsymbol{e}_k(u)$ sind zugleich die Erzeugendenvektoren der zu den isophotischen Streifen adjungierten Regelflächen $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_k(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{e}(u)$ $(k = 1, 2)$, die die erzeugten isophotischen Streifen als isophotische Flächenstreifen tragen.

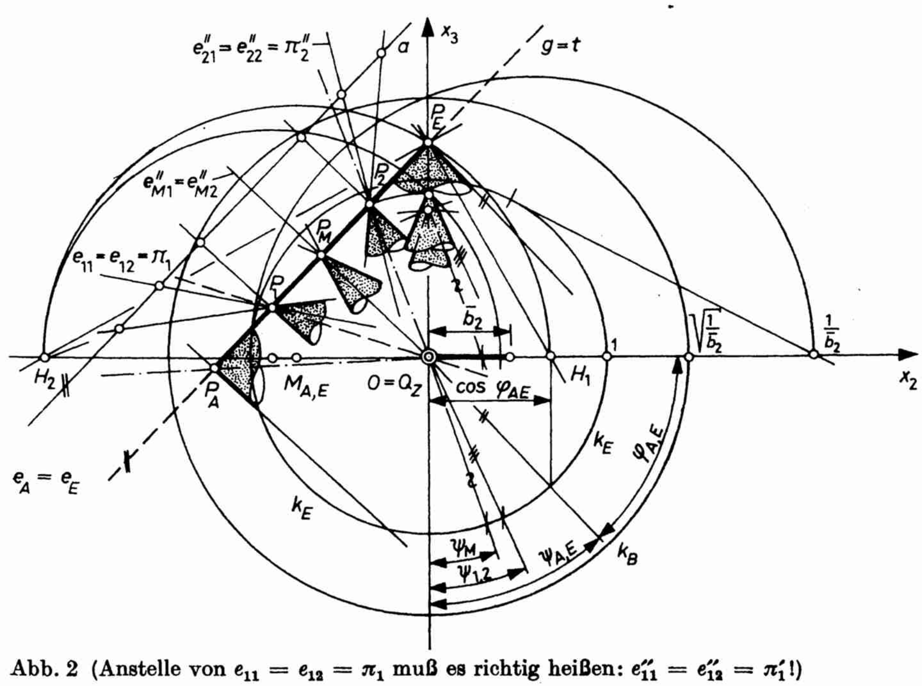


Abb. 2 (Anstelle von $e_{11} = e_{12} = \pi_1$ muß es richtig heißen: $e''_{11} = e''_{12} = \pi''_1$!)

In Abb. 2 ist die Konstruktion zur Klassifizierung der Punkte der Leitgeraden und der Streifenerzeugenden ausgeführt. Nach Konstruktion des Einheitskreises um $Q_Z$ und Vorgabe von $\bar{b}_2$ $(\neq 0)$ erhält man $\frac{1}{\bar{b}_2}$ durch Inversion an $k_B$ und den Beleuchtungskreis $k_B \left(Q_Z, a = \sqrt{\frac{1}{\bar{b}_2}}\right)$. Mit $\varphi_{A,E}$ folgen $\psi_{A,E}$, $\cos \varphi_{A,E}$ und $P_E$ als Schnitt des Kreises über $\overline{H_1 H_2}$ mit der $x_3$-Achse. In $P_E$ läßt sich der zugehörige Beleuchtungskegel mit $\psi_{A,E}$ als halben Öffnungswinkel konstruieren, und $g$ fällt mit einer der beiden in der $x_2, x_3$-Ebene liegenden Kegelerzeugenden zusammen. Das Lot von $Q_Z$ auf $g$ liefert $P_M$.

$P_A$ und $P_E$ sind Trägerpunkte zweiter Art. Für die im Inneren von $\overline{P_A P_E}$ liegenden Trägerpunkte erster Art lassen sich die Beleuchtungskegel in analoger Weise konstruieren. Die Bilder der Streifenerzeugenden erhält man unter Verwendung der zugehörigen Bündelpolaritäten. Alle außerhalb $\overline{P_A P_E}$ liegenden Punkte auf $g$ sind Träger dritter Art mit je zwei konjugiert komplexen Streifenerzeugenden; diese haben für Realisierungen keine Bedeutung. Somit liegen auf $g$ längs $\overline{P_A P_E}$ nach Satz 4 zwei isophotische Streifenstücke, deren Streifenebenen in $P_M$ den größten Schnittwinkel haben und in $P_A$ und $P_E$ zusammenfallen. Die adjungierten Regelflächen durchdringen sich längs $g$.

## LITERATUR

[1] BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] BOHNE, E.: Über Erzeugung isophotischer Streifen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *12* (1982), 37—44.

[3] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt a. M. 1962.

[4] KRAMES, J.: Konstruktive Behandlung der Strahlflächen. Vorlesung über Darstellende Geometrie, III. Band, Leipzig—Wien 1931.

[5] LORIA, G.: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig 1911.

[6] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie, III. Teil. Sammlung Göschen Band 1180/1180a, W. de Gruyter, Berlin 1959.

Manuskripteingang: 20. 3. 1980

VERFASSER:

ERHART BOHNE, Sektion Mathematik/Geographie der Pädagogischen Hochschule Dresden