

Werk

Titel: Über Erzeugung isophotischer Streifen

Autor: BOHNE, E.

Jahr: 1981

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0012|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über Erzeugung isophotischer Streifen

Herrn Prof. Dr. G. GEISE zum 50. Geburtstag gewidmet

ERHART BOHNE

0. Einleitung

Die geometrische Beleuchtungstheorie befaßt sich heute mit der mathematischen Modellierung und Analyse der Beleuchtungsstärke- und Leuchtdichteverteilung auf Polyedern und krummen Flächen bei Parallel- und Zentralbeleuchtung mit einer und mehreren Lichtquellen. Sie bedient sich dabei der Methoden der konstruktiven Geometrie.¹⁾ Neuere Beiträge zur geometrischen Beleuchtungslehre stammen von F. RÖSSLER [8], J. KRAMES [6], E. BOHNE [2], R. MÖLLER [7] und W. STRASSER [10]. Zur geometrischen Beleuchtung gelangt man durch idealisierende Abstraktion von physikalisch-lichttechnischen Sachverhalten (vgl. [3]). Unter einem geometrischen Beleuchtungssystem mit einer Lichtquelle verstehen wir ein Tripel $B_i = [F, (Q_i), \beta_i]$ ($i = 1, 2$), wobei F eine nichtleere Menge orientierter Flächenelemente $(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, (Q_i) bei Parallelbeleuchtung ein Bündel (Q_1) orientierter Geraden, bei Zentralbeleuchtung ein Bündel (Q_2) orientierter Halbgeraden und β_i eine reellwertige Beleuchtungsstärke-Funktion ist, die jedem Flächenelement aus F und dem das Flächenelement im Trägerpunkt P treffenden Lichtstrahl l aus (Q_i) genau eine Beleuchtungsstärke $b_i \in \mathbb{R}$ zuordnet. Die Menge F kann finit oder transfinit sein, und die Flächenelemente können einem Streifen oder einem Flächenstück angehören.

Alle bisherigen Arbeiten befaßten sich mit der Darstellung der Beleuchtung auf krummen Flächen. Durch die Dissertation von E. BOHNE [3] konnte ein Beitrag zu den Grundlagen der geometrischen Beleuchtungslehre, zu ihrem weiteren Ausbau und Anwendungen geleistet werden. Angeregt durch G. GEISE wurde die Beleuchtung von Streifen und die Erzeugung isophotischer Streifen zu einem fruchtbaren Ansatz neuerer Untersuchungen.

Nachfolgend werden einige Resultate über die geometrische Beleuchtung von Flächenelementen und Streifen, die keine Flächenstreifen sein müssen, mitgeteilt und ein Verfahren zur Erzeugung isophotischer Streifen für den Fall hergeleitet, daß eine Raumkurve als Leitkurve des Streifens, eine feste Beleuchtungsstärke und eine Parallel- oder Zentralbeleuchtung gegeben sind. Das sog. Beleuchtungskegelverfahren zur Erzeugung isophotischer Streifen gestattet zugleich die Erzeugung adjungierter Regelflächen, welche die erzeugten isophotischen Streifen als isophotische Flächenstreifen tragen.

¹⁾ Darunter verstehen wir im Sinne des Wiener Geometers E. KRUPPA (1953) eine mit analytischen und graphischen Mitteln arbeitende Geometrie, die sich der anschaulich-konstruktiven Denkweise bedient und von der automatischen Rechen- und Zeichentechnik Gebrauch macht.

1. Geometrische Beleuchtung von Flächenelementen

Im euklidischen Raum E^3 ist ein orientiertes Flächenelement (r, n) durch den Ortsvektor r seines Trägerpunktes P und einen Normaleneinheitsvektor n der durch P gehenden Ebene τ bezüglich eines kartesischen Normalkoordinatensystems $(0; x_1, x_2, x_3)$ eindeutig bestimmt. Die Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ eines Flächenelements läßt sich für Parallelbeleuchtung (Beleuchtung 1. Art) nach dem Lambertschen Gesetz¹⁾ und bei Zentralbeleuchtung (Beleuchtung 2. Art) nach dem fotometrischen Abstandsgesetz mit Hilfe des Skalarproduktes darstellen. Es gilt

$$\beta_i: \quad \bar{b}_i = \frac{(N, a_i)}{\|N\| \|a_i\|^{2i-1}} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

mit $0 \leq \bar{b}_1 \leq 1$, $0 \leq \bar{b}_2 < \infty$, $\varphi = \angle(N, a_i)$, wobei für Parallelbeleuchtung $a_1 = l \equiv \text{konst.}$ und bei Zentralbeleuchtung $a_2 = q - r$ zu setzen ist. q ist der Ortsvektor der Lichtquelle Q_2 .

Ein $FE(r, n)$ heißt durch ein Bündel (Q_i) orientierter Lichtstrahlen beleuchtet, wenn der Lichtstrahl $l = l(Q_i P)$ die durch n als positiv ausgezeichnete Seite des Flächenelements trifft oder in der Ebene τ liegt.

Durch (1) wird bei Parallelbeleuchtung jedem Flächenelement des E^3 genau eine Beleuchtungsstärke $\bar{b}_1 = \cos \varphi$ mit $\varphi = \angle(l, n)$ zugeordnet. Zu jedem Flächenelement (P, τ) existiert genau ein gerader Kreiskegel Φ_{BK} mit der Achse $l = l(Q_1 P)$, der Spitze P und dem halben Öffnungswinkel $\psi = \angle(l, \tau)$, der τ in einer Kegel-erzeugenden e berührt. Die Lichtquelle Q_1 ist ein Fernpunkt des E^3 . Φ_{BK} entartet zu

einer Doppelebene, die mit τ zusammenfällt, wenn $\bar{b}_1 = 1$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist. Für $\bar{b}_1 = 0$

entartet Φ_{BK} zur Geraden l , und ψ wird zum Nullwinkel. Der Tangentialkegel $\Phi_{BK}(P, l, \psi)$ eines Flächenelements (P, τ) heißt der Beleuchtungskegel und ψ der Beleuchtungswinkel des beleuchteten Flächenelements. φ und ψ sind Komplementwinkel. Bei Beleuchtung 1. Art gibt es zu jedem Punkt P des E^3 für eine Beleuchtungsstärke $\bar{b}_1$ ($0 \leq \bar{b}_1 < 1$) stets ∞^1 Flächenelemente gleicher Beleuchtungsstärke, die P zum Träger haben. Der zugehörige Beleuchtungskegel Φ_{BK} ist die Hüllfläche 2. Ordnung für alle diese Flächenelemente. Für $\psi = 0$ bilden diese Flächenelemente

ein Ebenenbüschel mit l als Trägergerade, und bei $\psi = \frac{\pi}{2}$ gibt es in P genau ein Flächenelement der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_1 = 1$.

Nach (1) ist $\bar{b}_2 = \frac{\cos \varphi}{a^2}$ ($a \neq 0$) die Beleuchtungsstärke eines Flächenelements bei

Zentralbeleuchtung. Bei gegebenem Beleuchtungswinkel ψ und fester Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ ($0 < \bar{b}_2 < \infty$) kann damit der Abstand $a = |Q_2 P|$ aller Trägerpunkte von Flächenelementen des E^3 einer Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ mit gleichem Beleuchtungs-

winkel ψ durch Konstruktion des Ausdrucks $a^2 = \frac{1}{\bar{b}_2} \cos \varphi$ bestimmt werden. Man

invertiert $\bar{b}_2$ am Einheitskreis mit dem Mittelpunkt Q_2 und erhält über den Höhensatz den gesuchten Abstand $a(\bar{b}_2, \psi)$ der Flächenelemente von der Lichtquelle. In

Abbildung 1 ist die Konstruktion für $\bar{b}_2 = \frac{1}{2}$ ausgeführt. Für jede Beleuchtungsstärke $\bar{b}_2$ liegen die Flächenelemente mit dem Beleuchtungswinkel $\psi = \frac{\pi}{2}$ und

¹⁾ J. H. LAMBERT ist der Begründer der geometrischen Beleuchtungslehre.

elemente schließen sich nur dann zu einem Streifen zusammen, wenn sie die jeweiligen Kurventangenten enthalten, und es gilt $(t(u), n(u)) = 0$. Insbesondere können Flächenstreifen betrachtet werden. Ein Streifen heißt beleuchtet, wenn jedes Flächenelement des Streifens beleuchtet ist. Dabei können einzelne Flächenelemente oder Streifenstücke des Streifens im Streiflicht liegen.

Durch den Streifen $(r(u), N(u))$ und die aus (1) folgende Gleichung

$$N^2(u) (a_i^2)^{2i-1} \bar{b}_i^2 - (N(u), a_i)^2 = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

mit $0 \leq \bar{b}_1 \leq 1$, $0 \leq \bar{b}_2 < \infty$, $a_1 = l$ und $a_2 = q - r(u)$ sind die Beleuchtungsverhältnisse des Streifens eindeutig bestimmt. Jedem Flächenelement des Streifens wird durch (2) genau eine Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ oder keine Beleuchtungsstärke zugeordnet. Jedes beleuchtete Flächenelement besitzt genau einen Beleuchtungskegel $\Phi_{BK}(r(u), a_i(u), \tau(u))$ mit $\psi = \psi(u) = \angle(a_i(u), \tau(u))$. Bewegt sich ein Kurvenpunkt längs der orientierten Streifenkurve, so ändern sich im allgemeinen die Beleuchtungswinkel, die Achslagen der zugeordneten Beleuchtungskegel und die Beleuchtungsstärken der Flächenelemente eines beleuchteten Streifenstücks stetig.

Definition 1. Ein beleuchteter Streifen (beleuchtetes Streifenstück), dessen Flächenelemente alle gleiche Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ haben, heißt ein isophotischer Streifen (isophotisches Streifenstück).

Aus diesen Einsichten in die Beleuchtung von Flächenelementen und Streifen ergibt sich das folgende Beleuchtungsproblem: Zu einer glatten Raumkurve c und einem Bündel von parallelen oder zentralen Lichtstrahlen sind diejenigen isophotischen Streifen (oder Streifenstücke) gegebener Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ zu erzeugen, die c zur Leitkurve haben.

3. Erzeugung isophotischer Streifen

3.1. Synthetische Lösung des Beleuchtungsproblems

Durch ein festes $\bar{b}_i$ ist in jedem Leitkurvenpunkt P einer stetig gekrümmten Kurve c genau ein Beleuchtungskegel $\Phi_{BK}(P, l, \psi)$ mit der Achsrichtung $l = l(PQ_i)$ und dem Beleuchtungswinkel $\psi = \angle(l, \tau)$ definiert. Dann haben alle Flächenelemente eines Kurvenpunktes P , deren Ebenen den zugehörigen Beleuchtungskegel berühren, die gegebene Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$. Berücksichtigt man die Streifenbedingung, daß die Flächenelemente eines Streifens die jeweilige Kurventangente t enthalten müssen, so gibt es durch P und t höchstens zwei Flächenelemente, deren Ebenen den Beleuchtungskegel berühren. Ist nämlich die Kurventangente t zugleich Erzeugende des Beleuchtungskegels, so existiert durch P und t an Φ_{BK} nur eine einzige Tangentialebene. Liegt t innerhalb des Beleuchtungskegels, so gibt es keine Tangentialebene der verlangten Art. Es sei ferner $\alpha = \angle(l, t)$ der Winkel zwischen der Achse des Beleuchtungskegels und der Kurventangente t in einem Kurvenpunkt P . Wie man leicht erkennt, gibt es bei $\psi = 0$ und $\alpha \neq 0$ in einem Leitkurvenpunkt P stets genau eine Tangentialebene an Φ_{BK} durch P , die t enthält, und im Fall $(\psi, \alpha) = (0, 0)$ existieren an den entarteten Beleuchtungskegel ∞^1 Tangentialebenen durch P und $t = l$. Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ entartet der Beleuchtungskegel zu einer doppelt zu zählenden

¹⁾ Man vgl. etwa W. BLASCHKE [1] oder K. STRUBECKER [9].

Ebene durch P mit orthogonaler Lage zu l , und es gibt nur dann genau eine Tangentialebene durch t an Φ_{BK} , wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Existieren in einem Kurvenpunkt P durch t Flächenelemente gegebener Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$, so berühren ihre Ebenen den zugeordneten Beleuchtungskegel in den Erzeugenden e_k ($k = 1, 2$). Diese Erzeugenden spannen mit der jeweiligen Kurventangente die gesuchten Flächenelemente $(P, \tau(t, e_k))$ des zu erzeugenden isophotischen Streifens gegebener Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ auf. Hieraus folgt

Satz 2. *Ist c die gegebene Leitkurve und befindet sich bei $(\psi, \alpha) \neq (0, 0)$ die Tangente t in einem Kurvenpunkt P*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{außerhalb des Beleuchtungskegels} \\ \text{auf dem Beleuchtungskegel} \\ \text{innerhalb des Beleuchtungskegels} \end{array} \right\}, \text{ so gibt es durch } P \text{ für}$$

eine Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{genau zwei Erzeugende} \\ \text{genau eine Erzeugende} \\ \text{keine Erzeugende} \end{array} \right\} \text{ des zugeordneten Beleuchtungs-}$$

kegels, die zugleich den Flächenelementen durch P und t mit der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$ angehören.

Somit gibt es längs eines Kurvenstücks entweder zwei, einen oder keinen isophotischen Streifen der Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$. Insbesondere treten mehrere isophotische Streifenstücke mit der gegebenen Leitkurve auf, deren Kurvenstücke Träger von einem oder zwei isophotischen Streifen sein können. Schließlich kann es auf einer Leitkurve auch nur einzelne Flächenelemente der gegebenen Beleuchtungsstärke geben.

Gibt es zu einer Streifenkurve c einen isophotischen Streifen gegebener Beleuchtungsstärke, so wird mit der Konstruktion der Streifenerzeugenden $e(u)$ durch das Beleuchtungskegelverfahren zugleich eine Regelfläche adjungiert, die den isophotischen Streifen längs ihrer Leitlinie als isophotischen Flächenstreifen trägt.

3.2. Bündelpolarität eines isophotischen Streifens

Untersuchungen zur Existenz isophotischer Streifen bei gegebener Leitkurve, Lichtquelle und Beleuchtungsstärke, über die Anzahl der Streifen, zur Begrenzung isophotischer Streifenstücke und die Konstruktion der Streifenerzeugenden lassen sich einfacher im Geradenbündel (0) der zu den Kurventangenten parallelen Geraden durchführen, in denen durch die Paare $(\Phi_{BK}(u), t(u))$ der Kurvenpunkte P Bündelpolaritäten erzeugt werden. Eine Bündelpolarität

$$A: (\Phi_{BK}(u), t(u)) \mapsto \pi(u) \text{ aus } (0) \text{ in } [0] \quad (3)$$

ist im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum $\bar{E}^3$ eine involutorische Abbildung, die der Kurventangente $t \in (0)$ eines Leitkurvenpunktes P vermöge des (reellen, nicht zerfallenden) Beleuchtungskegels 2. Ordnung genau eine Polarebene π aus dem Ebenenbündel $[0]$ zuordnet. Die Richtungen der Streifenerzeugenden e_k ($k = 1, 2$) isophotischer Streifen in P erhält man als Schnitt von Φ_{BK} mit der zugehörigen Polarebene π (Abb. 2).

Der Schnitt einer Bündelpolarität mit der Fernebene ω erzeugt in ω eine Fernpolarität

$$A_u: (FC_2, T_u(u)) \mapsto p_u(u), \quad (4)$$

und der Durchschnitt $FC_2 \cap p_u = \{E_{1u}, E_{2u}\}$ liefert die Richtungen $e_k(u) = g(0, E_{ku})$ ($k = 1, 2$) der Streifenerzeugenden.

Die Bündelpolarität (3) ordnet auch bei $\alpha < \psi$ jeder Geraden t innerhalb des Ordnungskegels genau eine Polarebene π durch 0 zu. Diese schneidet Φ_{BK} in zwei konjugiert komplexen Erzeugenden. Damit lassen sich die Leitkurvenpunkte isophotischer Streifen klassifizieren.

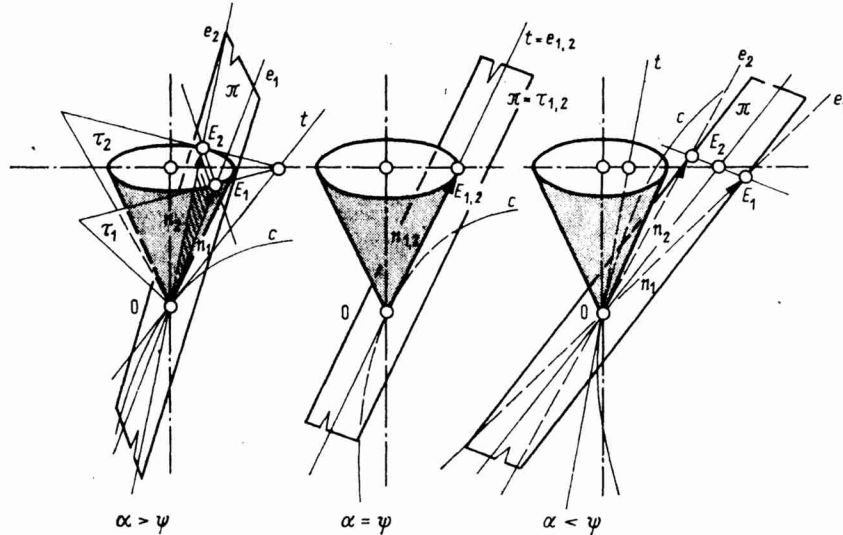


Abb. 2

Definition 2. Ein Punkt P der Leitkurve c eines isophotischen Streifens heißt ein Kurvenpunkt $\begin{Bmatrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{Bmatrix}$ Art, wenn er Träger von zwei $\begin{Bmatrix} \text{verschiedenen reellen} \\ \text{zusammenfallenden reellen} \\ \text{konjugiert komplexen} \end{Bmatrix}$ Erzeugenden $e_k(u)$ ($k = 1, 2$) ist.

Entsprechend kann man die Kurvenstücke der Streifenkurven isophotischer Streifen klassifizieren.

Bei Vergleich der Kosinus der Winkel α und ψ erhält man ein analytisches Kriterium für die Art der Leitkurvenpunkte eines isophotischen Streifens.

Satz 3. Ein Leitkurvenpunkt eines isophotischen Streifens ist genau dann von $\begin{Bmatrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{Bmatrix}$ Art,

wenn $\cos^2 \alpha \lessgtr \cos^2 \psi$ gilt,¹ wobei für $\cos^2 \alpha = \frac{(a_i, t(u))^2}{a_i^2}$ und für $\cos^2 \psi = \frac{(a_i, x)^2}{a_i^2 x^2}$ zu setzen ist.

Für den vom Trägerpunkt eines beleuchteten Flächenelements zur Lichtquelle zeigenden Achsvektor $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})^T$ des Beleuchtungskegels wird im folgenden einfachheitshalber $a_i^2 = 1$ gesetzt. Der Beleuchtungskegel eines isophotischen Streifens hat in kartesischen Koordinaten die Gleichung

$$\Phi_{BK}: x^T(a_i a_i^T - c_i^2 E_3) x = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

mit $\cos^2 \psi = c_i^2$, $c_1^2 = 1 - \bar{b}_1^2$, $c_2^2 = 1 - \bar{b}_2^2(a_i^2)^2$, der Einheitsmatrix E_3 und der Formenmatrix $M_3 = (a_i a_i^T - c_i^2 E_3)$, wobei stets $\det(M_3) \neq 0$ ist. M_3 hat die Gestalt

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_{i1}^2 - c_i^2 & a_{i1}a_{i2} & a_{i1}a_{i3} \\ a_{i1}a_{i2} & a_{i2}^2 - c_i^2 & a_{i2}a_{i3} \\ a_{i1}a_{i3} & a_{i2}a_{i3} & a_{i3}^2 - c_i^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Damit ergibt sich für die Quadrik Φ_{BK} die Gleichung

$$\Phi_{BK}: \mathbf{x}^T M_3 \mathbf{x} = 0 \quad \text{mit } \det(M_3) \neq 0. \quad (7)$$

Mit der Matrizenungleichung $M_3 \mathbf{t}(u) = \mathbf{n}_\pi(u)$ erhält man einen Normalenvektor der Polarebene $\pi(u)$ zur Polaren $\mathbf{t}(u)$, und

$$\pi: \mathbf{t}^T(u) M_3 \mathbf{x} = 0 \quad \text{mit } \det(M_3) \neq 0 \quad (8)$$

ist die Gleichung der Polarebene $\pi(u)$ zur Leitkurventangente $\mathbf{t}(u)$ bezüglich des Beleuchtungskegels Φ_{BK} eines isophotischen Streifens. Berücksichtigt man die Polarität (3) und fügt dem quadratischen System (7) und (8) noch die Gleichung der Einheitsphäre hinzu, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Phi_{BK}: \mathbf{x}^T M_3 \mathbf{x} &= 0 \\ \pi: \mathbf{t}^T M_3 \mathbf{x} &= 0 \\ \Phi_{Ku}: \mathbf{x}^T E_3 \mathbf{x} &= 1 \quad \text{mit } \det(M_3) \neq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Als Lösung des quadratischen Systems (9) folgen die Einheitsvektoren $\mathbf{x}_k(u) = \mathbf{e}_k(u)$ ($k = 1, 2$) der Erzeugenden der isophotischen Streifen gegebener Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$. Diese können in einem Leitkurvenpunkt entweder reell verschieden, reell zusammenfallend oder konjugiert komplex sein. Durch die Vektorfunktionen $\mathbf{t}(u) = \mathbf{r}'(u)$ und $\mathbf{e}_k(u)$ werden die Streifenebenen aufgespannt, und mit dem Kreuzprodukt $[\mathbf{t}(u), \mathbf{e}_k(u)] = \mathbf{N}_k(u)$ ($k = 1, 2$) erhält man die Normalenvektoren $\mathbf{N}_k(u)$ der erzeugten isophotischen Streifen (-stücke) ($\mathbf{r}(u)$, $\mathbf{N}_k(u)$).

Berücksichtigen wir die physikalisch-lichttechnische Realität, so gehen durch einen Leitkurvenpunkt entweder zwei, ein oder kein isophotischer Streifen gegebener Beleuchtungsstärke $\bar{b}_i$.

Mit dem dargestellten Verfahren können nun für spezielle Leitkurven bei Parallel- und Zentralbeleuchtung unter Berücksichtigung der Lagebeziehungen von Leitkurve und Lichtquelle und für verschiedene Beleuchtungsstärken isophotische Streifen erzeugt und Untersuchungen über die Anzahl und Art der Streifen (-stücke), deren Begrenzungen und die Eigenschaften der adjungierten Regelflächen sowie deren Beleuchtungsverhältnisse durchgeführt werden. Davon und über weitere Beleuchtungsprobleme soll an anderer Stelle berichtet werden.

LITERATUR

- [1] BLASCHKE, W.: Einführung in die Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1945.
- [2] BOHNE, E.: Über Isophoten bei Drehquadriken. Wiss. Z. TU Dresden 18 (1969) Heft 2, 477—486.
- [3] BOHNE, E.: Ein Beitrag zu den Grundlagen der geometrischen Beleuchtungstheorie. Dissertation (B), PH Dresden 1978.
- [4] BOHNE, E., und R. MÖLLER: Über geometrische Beleuchtung von Ebene und Kugel aus mehreren Lichtquellen. Wiss. Z. PH Dresden 3 (1979).

- [5] KNABE, P., und R. MÖLLER: Über Isophoten des Ellipsoids und des elliptischen Paraboloids. Wiss. Z. TU Dresden 20 (1971) Heft 4, 967—974.
- [6] KRAMES, J.: Über Helligkeitskonstruktionen auf experimenteller Grundlage und einige Bemerkungen über „graphische Funktionen“. Monatsh. Math. Phys. 49 (1940), 279—294.
- [7] MÖLLER, R.: Über Isophoten auf Drehquadriken bei zentraler geometrischer Beleuchtung. Dissertation (A), PH Dresden 1974.
- [8] RÖSSLER, F.: Geometrische Grundlagen der Konstruktion von Helligkeitsgleichungen für eine neue Helligkeitshypothese. Monatsh. Math. Phys. 46 (1937), 157—171.
- [9] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie I, II, III. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1964, 1969, 1959.
- [10] STRASSER, W.: Schnelle Kurven- und Flächendarstellung auf graphischen Sichtgeräten. Dissertation (A), TU Westberlin 1974.

Manuskripteingang: 25. 5. 1979

VERFASSER:

ERHART BOHNE, Sektion Mathematik/Geographie, Wissenschaftsbereich Geometrie der Pädagogischen Hochschule Dresden