Beiträge zur Algebra und Geometrie
12 (1982), 103–115

Gruppentheoretischer Aufbau affiner Räume einer beliebigen Dimension $\geqq 2$ auf der Grundlage von Schrägspiegelungen

ERHARD QUAISSER

Anknüpfend an BACHMANN [1] hat KLOTZEK in [6, 7] einen gruppentheoretischen Aufbau der äquiaffinen Ebenen (d. h. der papposschen Ebenen mit Char $\neq 2$) durch die Gruppe äquiaffiner Abbildungen gegeben, die von Schrägspiegelungen erzeugt wird. Durch KLOTH erfolgte in [5] eine entsprechende Charakterisierung der räumlichen äquiaffinen Geometrie (d. h. der dreidim. affinen Räume über einem kommutativen Körper der Char. $\neq 2$); erzeugende Elemente sind hier die Schrägspiegelungen an Ebenen in Richtungen von Geraden. Schließlich gelang KLOTZEK in [8a] die affinen Räume (über einem Körper der Char. $\neq 2$) einer beliebigen Dimension $\geqq 3$ mit Hilfe des Schrägspiegelungsbegriffs aufzubauen. Eine Übersicht über diese und damit zusammenhängende Arbeiten wird in [9] und [10] gegeben.
Die Arbeit [8a, b] zeigte, daß bei einer Dimension $\geqq 3$ auf die Gültigkeit des papposschen Satzes verzichtet werden kann und damit der Zusammenhang zwischen dem Schrägspiegelungs- und Inhaltsbegriff keineswegs so eng ist, wie es in der ebenen Geometrie den Anschein hatte. Das legte die Frage nach einer Darstellung desarguesscher Ebenen auf der Grundlage von Schrägspiegelungen nahe. Diese wird in [16] unter weitgehender Nutzung der Ausarbeitungen von KLOTZEK [7] und WERNICKE [18, 19] gegeben.
In der vorliegenden Arbeit wird die grundlegende Frage untersucht, welche affinen Räume sich gruppentheoretisch auf der Grundlage von Schrägspiegelungen darstellen lassen. Dabei wird eine einheitliche Beschreibung für 2- und höherdimensionale Räume gewonnen, die durch die Arbeiten [6, 7, 18, 16] einerseits und [8a, b; 5] andererseits nicht besteht. Naheliegenderweise werden Punkt- und Schrägspiegelungen an Geraden zugrunde gelegt. Das vorgelegte gruppentheoretische Axiomensystem unterscheidet sich in seiner Anlage wesentlich von denen der oben genannten Arbeiten. Die gewonnene Darstellbarkeitsbedingung bedeutet für die ebene affine Geometrie eine wesentliche Erweiterung des Darstellungsbereichs. Ferner werden einige offene Fragen aus [9] und [10] beantwortet.
Die Geometrie der betrachteten affinen Räume und die Theorie der vorgelegten Gruppen ist ineinander interpretierbar; es besteht eine volle Übersicht über die Modelle des gruppentheoretischen Axiomensystems.
Als Grundlage für die Formulierung eines einheitlichen inzidenzgeometrischen Axiomensystems bot sich die Arbeit [12] von LENZ an, in der Geradenaxiome der affinen Geometrie einer Dimension $\geqq 3$ gegeben und dabei nur die Grundbegriffe Punkt, Gerade, Inzidenz und Parallelität von Geraden verwendet werden.
Aus Platzgründen können hier an einigen Stellen nur Ergebnisse angegeben werden.

Der Verfasser hofft, daß dennoch die Darlegung weitgehend auch ohne die Kenntnis der angegebenen Literatur lesbar sind.
Für freundliche Hinweise möchte ich Herrn Prof. KLOTZEK und den Kollegen der von ihm geleiteten Potsdamer Forschungsgruppe danken.

1. Inzidenzgeometrie und Spiegelungen in affinen Räumen

1.1. Inzidenzgeometrisches Axiomensystem

Grundannahme. *Gegeben sei eine Menge* $\mathfrak{P} = \{A, B, C, \ldots\}$, *eine Menge* $\mathfrak{G} = \{a, b, c, \ldots\}$ *von Teilmengen von* $\mathfrak{P}$ *sowie eine binäre Relation* $\parallel$ *in* $\mathfrak{G}$.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ heißen *Punkte* bzw. *Geraden*; für $A \in a$ benutzen wir die üblichen Sprechweisen. Man nennt *a parallel zu b*, wenn $a \parallel b$; $a \nparallel b$ ist die Verneinung von $a \parallel b$. Punkte einer Geraden heißen *kollinear*. Man nennt *a komplanar zu b* genau dann, wenn $a \parallel b$ oder $a \cap b \neq \emptyset$.

Inzidenzaxiome:

I 1. *Zu zwei verschiedenen Punkten* A, B *gibt es genau eine Gerade* a *mit* $A, B \in a$ (Axiom G_aIa in [12]).

Diese Gerade a wird *Verbindungsgerade* von A, B genannt und mit AB bezeichnet. Zwei Geraden mit genau einem gemeinsamen Punkt heißen *sich schneidend*.

I 2. *Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte* (Axiom G_aIII in [12]).

I 3. *Es gibt drei Punkte, die nicht kollinear sind.*

I 4. *Die Relation* $\parallel$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

I 5. *Zu jedem Punkt* A *und jeder Geraden* a *gibt es genau eine Gerade* b *mit* $A \in b$ *und* $a \parallel b$ (Euklidisches Parallelenaxiom, Axiom G_aIb in [12]).

Diese Gerade b heißt die *Parallele zu a durch A* und wird mit $\mathsf{par}\,(a, A)$ bezeichnet.

I 6. *Sind* A, B, C *nicht kollineare Punkte und* a *eine zu* BC *komplanare Gerade mit* $a \ni A$ *und ferner* c *eine zu* AB *komplanare Gerade mit* $c \ni C$, *so ist* a *komplanar zu* c.

Ein *affiner Raum* A ist nun ein System $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \parallel)$, das der Grundannahme und den Axiomen I 1—I 6 genügt.

Das Axiomensystem ist inhaltlich widerspruchsfrei — auch ohne Bezug auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik —, denn das bekannte Minimalmodell der affinen Geometrie aus vier Punkten und sechs Geraden ist Modell.

Das Axiomensystem ist nicht unabhängig; so folgt z. B. aus I 5 und der Reflexivität der Parallelität im Rahmen der übrigen Axiome die Symmetrie für diese Relation. Unabhängigkeitsforderungen sind hier nicht von wesentlicher Bedeutung; als Axiome wurden möglichst einfache Aussagen angestrebt und offensichtlich Entbehrliches weggelassen.

Im Rahmen der übrigen Axiome ist I 6 gleichwertig mit der Konjunktion der beiden Aussagen

IP. *Sind* A, B, C *nicht kollineare Punkte, so gibt es einen Punkt* D *mit* $D \in \mathsf{par}\,(AB, C), \mathsf{par}\,(BC, A)$. (Parallelogrammaxiom; in [12] als Axiom G_aIIb nur für den Fall, daß card $a = 2$ für alle Geraden a.)

IT. *Sind* A, B, C *nicht kollineare Punkte und* E *ein von* B, C *verschiedener Punkt aus* BC, *so gibt es einen Punkt* D *mit* $D \in \mathsf{par}\,(AB, C), AE$. (Trapezaxiom; Axiom G_aIIa in [12].)

Dies ist leicht einzusehen; überdies folgt IP aus IT, falls eine und damit jede Gerade mehr als zwei Punkte enthält.
Es gilt

(1.1) $\quad \mathsf{card}\, a = \mathsf{card}\, b$ *für alle Geraden* a, b.

1.2. Unterräume

Eine Punktmenge $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{P}$ heißt *Unterraum* genau dann, wenn für alle Punkte $A, B, C \in \mathfrak{U}$ mit $A \neq B$ gilt $\mathsf{par}\,(AB, C) \subseteqq \mathfrak{U}$. Dann ist auch $AB \subseteqq \mathfrak{U}$ für alle Punkte $A, B \neq A$ aus $\mathfrak{U}$. Diese Eigenschaft, die gewöhnlich zur Definition eines Unterraumes benutzt wird, ist schwächer als die hier (wie in [12]) benutzte, und zwar gerade in dem Fall, daß jede Gerade genau zwei Punkte enthält.
Unter der *Hülle* einer Punktmenge $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{P}$ — kurz $\overline{\mathfrak{B}}$ — wird der Durchschnitt aller Unterräume verstanden, die $\mathfrak{B}$ umfassen. $\overline{\mathfrak{B}}$ ist selbst Unterraum.
Für Unterräume gilt der Darstellungssatz (vgl. [12], S. 25)

(1.2) $\quad$ *Ist* $\mathfrak{U}$ *Unterraum,* $A \in \mathfrak{U}$ *und* $B \notin \mathfrak{U}$, *dann gilt* $\overline{\mathfrak{U} \cup \{B\}} = \bigcup_{P \in \mathfrak{U}} \mathsf{par}\,(AB, P)$

sowie die Abhängigkeitseigenschaft

(1.3) $\quad$ *Ist* $\mathfrak{U}$ *Unterraum,* $A \notin \mathfrak{U}$ *und* $A \in \overline{\mathfrak{U} \cup \{B\}}$, *so gilt* $B \in \overline{\mathfrak{U} \cup \{A\}}$.

Man nennt $\mathfrak{B}(\subseteqq \mathfrak{P})$ *unabhängig* genau dann, wenn $P \notin \overline{\mathfrak{B} \setminus \{P\}}$ für alle $P \in \mathfrak{B}$; und $\mathfrak{B}(\subseteqq \mathfrak{U})$ heißt *Basis* des Unterraumes $\mathfrak{U}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}$ unabhängig und $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{U}$ ist. Das Zornsche Lemma sichert die Existenz und Gleichmächtigkeit von Basen für alle Unterräume eines affinen Raumes. Als *Dimension* von $\mathfrak{U}$ wird $\mathsf{card}\,(\mathfrak{B} \setminus \{P\})$ mit $P \in \mathfrak{B}$ verstanden.
Die Geraden sind eindimensionale Unterräume. Als *Ebenen* werden zweidimensionale Unterräume erklärt. Es gilt: $\varepsilon \subseteqq \mathfrak{P}$ *ist Ebene genau dann, wenn* ε *nicht kollineare Punkte* A, B, C *mit* $\varepsilon = \overline{\{A, B, C\}}$ *enthält.*
Nach (1.3) besitzt auch jedes andere Tripel nicht kollinearer Punkte einer Ebene diese Eigenschaft. Die durch ein nicht kollineares Tripel von Punkten A, B, C bestimmte Ebene wird kurz mit $\varepsilon(A, B, C)$ bezeichnet.
$H \subseteqq \mathfrak{P}$ heißt *Hyperebene* des affinen Raumes genau dann, wenn H Unterraum ist und es einen Punkt $P \in \mathfrak{P} \setminus H$ mit $\overline{H \cup \{P\}} = \mathfrak{P}$ gibt. Die Existenz von Hyperebenen folgt nicht aus dem Axiomensystem; sie wird durch das Zornsche Lemma gesichert.
Schließlich erklären wir für zwei Unterräume $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ mit $1 \leqq \dim \mathfrak{U} \leqq \dim \mathfrak{B}$ folgende Parallelität:

$\mathfrak{U} \parallel \mathfrak{B} :\Leftrightarrow$ *zu jeder Geraden* $a \subseteqq \mathfrak{U}$ *gibt es eine Gerade* $b \subseteqq \mathfrak{B}$ *mit* $a \parallel b$.

Es gilt: *Zu jedem Unterraum* $\mathfrak{U}$ ($\dim \mathfrak{U} \geqq 1$) *und jedem Punkt* A *gibt es genau einen Unterraum* $\mathfrak{B}$ *der gleichen Dimension mit* $A \in \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{U} \parallel \mathfrak{B}$; wir setzen $\mathsf{par}\,(\mathfrak{U}, A) := \mathfrak{B}$.

1.3. Affine Ebenen und Räume einer Dimension $\geqq 3$

Eine *affine Ebene* wird häufig als eine Inzidenzstruktur ausgezeichnet, die bekannten ebenen Inzidenzaxiomen genügt (siehe u. a. LENZ [13], S. 135) und in der die Parallelität von Geraden eine definierte Relation ist, nämlich durch

(P) $\quad a \parallel b \Leftrightarrow a = b \vee a \cap b = \emptyset$.

Zur Einordnung dieser affinen Ebenen in den eingangs erklärten affinen Raumbegriff ist nützlich

(1.4) *$a \parallel b$ genau dann, wenn es eine Ebene ε mit $a, b \subseteqq \varepsilon$ gibt und $a = b \vee a \cap b = \emptyset$ gilt.*

Wir zeigen nun

(1.5) *Die affinen Räume $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \parallel)$, in denen* (P) *gilt, sind genau die affinen Ebenen* (im Sinne von [13]).

Beweis. In $\mathfrak{P}$ gibt es drei nicht kollineare Punkte A, B, C (I 3); und P sei ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{P}$. Da nun $\mathsf{par}(AB, P) \nparallel BC$ ist, gibt es nach (P) einen Punkt $Q \in BC \cap \mathsf{par}(AB, P)$, und demnach ist $P \in \varepsilon(A, B, C)$. Daraus folgt bereits $\mathfrak{P} = \varepsilon(A, B, C)$, d. h., der affine Raum ist zweidimensional, also eine Ebene. Überdies sind unter Bezug auf (1.4) die bekannten Inzidenzaxiome der ebenen affinen Geometrie ([13]) erfüllt. — Umgekehrt genügt offensichtlich eine affine Ebene (im Sinne von [13]) den Forderungen I 1—I 6 sowie per definitionem (P). ∎

Der Beweis zeigt, daß affine Räume $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \parallel)$, in denen (P) nicht gilt, von einer Dimension $\geqq 3$ sein müssen. Weiterhin ist $\neg$ (P) gleichwertig mit

(R) *Es gibt Geraden a, b mit $a \nparallel b$ und $a \cap b = \emptyset$.*

Diese Aussage (R) ist bei LENZ [12] das Axiom G_aIV. Das Axiom I 3 ist dann entbehrlich.

Man prüft ohne Mühe nach, daß die affinen Räume mit $\neg$ (P) genau die Inzidenzstrukturen sind, die durch die Inzidenzaxiome (bis auf das Fano-Axiom) bei KLOTZEK [8a, b] bestimmt sind. (Grundbegriffe sind hier Punkte, Geraden, Ebenen; die Axiome sind an HILBERT [9] und LENZ [13_1] orientiert.) In diesen Räumen ist der *Satz von Desargues* — kurz (D) — ableitbar; sie sind gerade die affinen Räume einer Dimension $\geqq 3$ über beliebigen Körpern.

1.4. Spiegelungen

Von wesentlicher Bedeutung ist, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen sich aus der Existenz (und Eindeutigkeit) von Punktspiegelungen und Schrägspiegelungen an Geraden für den affinen Raum ergeben. Im Rahmen einer späteren Präzisierung sind dies nämlich notwendige Bedingungen für eine spiegelungsgeometrische Darstellung eines affinen Raumes.

Wir erklären in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \parallel)$: σ ist eine *Spiegelung an dem Punkt A* bzw. eine *Schrägspiegelung an der Geraden a* genau dann, wenn σ eine involutorische Kollineation von $\mathfrak{P}$ mit $P^\sigma = P \Leftrightarrow P = A$ bzw. $P^\sigma = P \Leftrightarrow P \in a$ ist.[1]) In [8a, b] werden Punkt- und Schrägspiegelungen als gewisse Mittelpunktsabbildungen eingeführt. (Dazu wird von vornherein vorausgesetzt, daß die Ebenen Translationsebenen mit Fano-Axiom sind und Hyperebenen existieren.)

Zunächst bemerken wir

(1.6) *Ist σ Kollineation von $\mathfrak{P}$, so folgt aus $a \parallel b$ stets $a^\sigma \parallel b^\sigma$.*

Wir wenden uns den Konsequenzen zu, die sich aus der Existenz von Punktspiegelungen ergeben. Bereits schwache Voraussetzungen ergeben nennenswerte Folgerungen, so

Ist σ eine Spiegelung an A, so ist $A \in PP^\sigma$ für alle Punkte $P \neq A$.

---

1) Durch spätere Ergebnisse ist die Exponentialschreibweise für das Bild gerechtfertigt.

Denn wäre $A \notin PP^\sigma$, dann müßten sich — da A, P, P^σ nicht kollinear sind — die Parallelen $\mathsf{par}(AP, P^\sigma)$, $\mathsf{par}(AP^\sigma, P)$ nach I P in einen Punkt $Q \neq A$ schneiden. Mit (1.6) ergibt sich aber $Q^\sigma = Q$ und damit $Q = A$.
Weitere Sätze dieser Art sind:

Ist σ eine Spiegelung an A und sind A, P, Q nicht kollineare Punkte, dann ist $PQP^\sigma Q^\sigma$ ein Parallelogramm mit sich in A schneidenden Diagonalen.
Sind σ_1 und σ_2 Spiegelungen an A_1 und A_2 ($\neq A_1$), so ist $\sigma_1\sigma_2$ eine nicht identische Verschiebung, und es existiert nur eine Spiegelung an A_1.

(Der Beweis, den LINGENBERG [14] in der Ebene für die zweite Aussage (unter etwas anderen Begriffserklärungen) gibt, läßt sich übertragen.)
Im Hinblick auf die Zielstellung interessieren uns aber besonders Bedingungen, die mit der Existenz von Spiegelungen an jedem Punkt äquivalent sind. Anhand der obigen Teilergebnisse (und Resultate für die affine Ebene in [15]) erhält man

(1.7) *Existiert an jedem Punkt eine Spiegelung, so gilt der kleine affine Satz von Desargues* (d) (d. h., jede Ebene ist eine Translationsebene) *und die Fano-Aussage* (F) (d. h., in jedem Parallelogramm schneiden sich die Diagonalen). *Umgekehrt gibt es unter diesen Bedingungen an jedem Punkt A eine und auch nur eine Spiegelung* — im folgenden kurz mit σ_A bezeichnet.

Für eine Dimension $\geqq 3$ sind die bisherigen Erörterungen weit weniger ergiebig, da der recht starke Schließungssatz (D) und damit erst recht die kleine desarguessche Aussage (d) zur Verfügung stehen.

Im weiteren setzen wir (d) und die Fano-Aussage (F) voraus. Dann gibt es zu je zwei Punkten A und B genau eine Translation τ mit $A^\tau = B$, die kurz mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet wird, und überdies gibt es genau einen Punkt M mit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, den *Mittelpunkt von* (A, B) — kurz $\mathsf{Mp}(A, B)$. Mit der schon genannten Beziehung zwischen Punktspiegelungen und Translationen ergibt sich dann

(1.8) *Q ist Bild von P bei der Spiegelung an A* $\Leftrightarrow A = \mathsf{Mp}(P, Q) \Leftrightarrow \sigma_P\sigma_A = \sigma_A\sigma_Q$.

Entsprechend den Punktspiegelungen werden nun Schrägspiegelungen an Geraden betrachtet; dabei geht es vor allem um zusätzliche (über (1.7) hinausgehende) Bedingungen, die für den affinen Raum entstehen. Diesbezügliche Ergebnisse, ohne von vornherein die kleine desarguessche und die Fano-Aussage vorauszusetzen, enthält [17].

(1.9) *Ist σ eine Schrägspiegelung an a und P irgendein Punkt, dann ist* $\mathsf{Mp}(P, P^\sigma) \in a$.

Beweis. Sei $A = \mathsf{Mp}(P, P^\sigma)$. Aus $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP^\sigma}$ folgt $\overrightarrow{P^\sigma A^\sigma} = \overrightarrow{A^\sigma P}$ nach (1.6) und den Eigenschaften von σ. Demnach ist $A^\sigma = \mathsf{Mp}(P, P^\sigma) = A$ und damit $A \in a$. ∎

(1.10) *Ist σ eine Schrägspiegelung an a und sind $P, Q \notin a$ verschiedene Punkte, für die PQ komplanar zu a ist, so gilt $PP^\sigma \parallel QQ^\sigma$.*

Bei einer Schrägspiegelung σ an a liegen also innerhalb einer Ebene ε durch a die Bilder in einer Richtung von den Originalpunkten aus (*Spiegelungsrichtung* von σ bezüglich ε).
Zur Vorbereitung des nächsten Satzes setzen wir für eine Schrägspiegelung σ an a und einen Punkt $A \in a$

$$\mathsf{H}_A := \{P \in \mathfrak{P} : \mathsf{Mp}(P, P^\sigma) = A\}.$$

Von grundlegender Bedeutung ist nun

(1.11) H_A *ist eine Hyperebene.*

Beweis. Zunächst ist $\mathsf{H}_A \cap a = \{A\}$, denn für $P \neq A$ aus a gilt $\mathsf{Mp}(P, P^\sigma) = P \neq A$. Ferner ist mit P auch P^σ aus H_A. — Wir zeigen nun, daß $PQ \subseteqq \mathsf{H}_A$, wenn P, Q verschiedene Punkte aus H_A sind. Sei $R \in PQ$ und o. B. d. A. $P \notin a$.

Nun enthält $\overline{\{P, P^\sigma, Q\}}$ mit R und Q^σ auch die Punkte R^σ und $\mathsf{Mp}(R, R^\sigma)$. Außerdem ist $\overline{\{P, P^\sigma, Q\}} \cap a = \{A\}$ nach (1.10). Da $\mathsf{Mp}(R, R^\sigma)$ in a liegt, muß nun $R \in \mathsf{H}_A$ sein. Damit ist H_A Unterraum. — Schließlich seien jetzt $X \in \mathfrak{P}$ und $B\,(\neq A) \in a$ beliebig gewählte Punkte und $M = \mathsf{Mp}(X, X^\sigma)$ und $\tau = \overrightarrow{MA}$ (Abb. 1). Aus $\overrightarrow{XX^\tau} = \overrightarrow{MA}$ folgt $\overrightarrow{X^\sigma(X^\tau)^\sigma} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{XX^\tau}$ und daraus $\overrightarrow{XX^\sigma} = \overrightarrow{X^\tau(X^\tau)^\sigma}$. Außerdem gilt $\overrightarrow{XX^\sigma} = \overrightarrow{X^\tau(X^\sigma)^\tau}$, so daß nun $(X^\tau)^\sigma = (X^\sigma)^\tau$ und damit $\mathsf{Mp}(X^\tau, (X^\tau)^\sigma) = \mathsf{Mp}(X^\tau, (X^\sigma)^\tau) = A$ ist. Also gilt $X^\tau \in \mathsf{H}_A$. Wegen $M \in a$ und $B \notin \mathsf{H}_A$ ist $X \in \mathsf{par}(AB, X^\tau) \subseteqq \overline{\mathsf{H}_A \cup \{B\}}$ und damit schließlich $\mathfrak{P} = \overline{\mathsf{H}_A \cup \{B\}}$, d. h., H_A ist Hyperebene. ∎

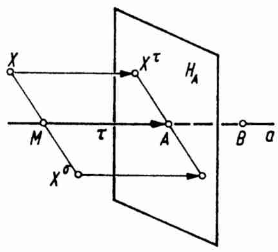

Abb. 1

Damit ist im wesentlichen eine Fragestellung aus [10] geklärt: Während bei Klotzek [8a, b] in die Ableitung des gruppentheoretischen Axiomensystems aus einem inzidenzgeometrischen das Zornsche Lemma eingeht, um die Existenz von Hyperebenen und damit von Schrägspiegelungen zu sichern, wird dort bei der gegenläufigen Herleitung keine dem Auswahlaxiom gleichwertige Aussage der Mengenlehre benötigt. Aus der Existenz einer Schrägspiegelung an einer Geraden folgt aber — wie nun (1.11) zeigt — bereits die Existenz einer Hyperebene.

Im folgenden Satz bedeutet (d_P) den *Parallelogramm-Desargues*, d. h. die Aussage

Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ Dreiecke und g_1, g_2, g_3 verschiedene Geraden mit gemeinsamem Punkt 0 *und $A_i, B_i \in g_i, \notin g_k$ $(i \neq k; i, k = 1, 2, 3)$ und sind ferner $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel g_3$ und $A_2A_3 \parallel B_2B_3 \parallel g_1$, so ist $A_3A_1 \parallel B_3B_1$* (Abb. 2).

Sie ist natürlich ein Spezialfall der desarguesschen Aussage (D), aber in Translationsebenen nicht ableitbar. (Ein Gegenbeispiel geht auf Hall zurück, siehe [4], S. 142). Die Translationsebenen mit Fano-Aussage und (d_P) sind die *Moufang-Ebenen* (Char. $\neq 2$). Näheres zur Einordnung enthält [17].

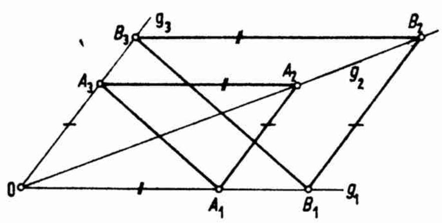

Abb. 2

Generelle und zur Existenz von Schrägspiegelungen an Geraden äquivalente Bedingungen gibt

(1.12) *Existiert zu je zwei sich schneidenden Geraden a und b eine Schrägspiegelung an a mit b als Fixgerade, so gilt der Schließungssatz* (d_P) *und die Aussage* (H): *Es gibt eine Hyperebene H mit $b \subseteqq H$ und $a \nparallel H$.*
Umgekehrt gibt es unter der zusätzlichen Bedingung (d_P) *zu jeder Geraden a und Hyperebene H mit $a \nparallel H$ eine und nur eine Schrägspiegelung an a mit H als Fixhyperebene* — dann kurz mit σ_a^H bezeichnet — *und gilt überdies* (H), *dann gibt es zu je zwei sich schneidenden Geraden a, b eine Schrägspiegelung an a mit b als Fixgerade.*

Beweis. Die Notwendigkeit von (d_P) besteht nach [17]. Den restlichen Beweis erbringt (1.11). — Zur Umkehrung wird die gewünschte Abbildung σ konstruktiv geschaffen, indem man durch einen beliebig vorgegebenen Punkt $X \in \mathfrak{P}$ die zu H parallele Hyperebene H' legt und X^σ durch $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AX^\sigma}$ mit $\{A\} = H' \cap a$ festlegt. Die Invarianz der Kollinearität für diese Abbildung sichert in der Ebene der Schließungssatz (d_P).

1.5. Einiges zur Spiegelungsgruppe

Im folgenden betrachten wir nur affine Räume, die den inzidenzgeometrischen Bedingungen aus den Sätzen (1.7) und (1.12) genügen, d. h. den Aussagen (d), (F), (d_P) und (H).

Es sei Π die Menge der Punktspiegelungen und Γ die Menge der Schrägspiegelungen an Geraden eines affinen Raumes A sowie $\mathsf{S}(\mathsf{A})$ die durch Π und Γ (endlich) erzeugte Gruppe (mit der identischen Abbildung als Einselement), die *Spiegelungsgruppe des affinen Raumes* A. Für eine gruppentheoretische Darstellung affiner Räume auf der Grundlage von (Schräg-) Spiegelungen ist wesentlich, Charakterisierungen der inzidenzgeometrischen Grundbegriffe — hier Inzidenz von Punkt und Gerade sowie die Parallelität von Geraden — in der Spiegelungsgruppe aufzuzeigen. Man erklärt dazu für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathsf{S}(\mathsf{A})$:

$$\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{ab} \textit{ involutorisch.}$$

(1.13) *Sei σ_a eine Schrägspiegelung an a. Dann ist $A \in a$ genau dann, wenn $\sigma_A \mid \sigma_a$.*

Beweis. Sei $A \in a$ und $X \in \mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt sowie $\varrho = \sigma_A$ und $\sigma = \sigma_a$. Aus $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AX^\varrho}$ folgt zunächst $\overrightarrow{X^\sigma A} = \overrightarrow{AX^{\varrho\sigma}}$. Wegen $\overrightarrow{X^\sigma A} = \overrightarrow{AX^{\sigma\varrho}}$ ergibt sich daraus weiter $X^{\varrho\sigma} = X^{\sigma\varrho}$. Damit gilt bereits $\varrho \mid \sigma$, denn $\varrho = \sigma$ ist nicht möglich. — Der Beweis für $A \notin a \Rightarrow \sigma_A \nmid \sigma_a$ kann aus [8b] direkt übernommen werden. ∎

Der nächste Satz zeigt den engen Bezug zwischen Schrägspiegelungen an Geraden und an Hyperebenen. Dabei versteht man unter einer *Schrägspiegelung σ an der Hyperebene H* entsprechend den Erklärungen in 1.4. eine involutorische Kollineation von σ mit $P^\sigma = P \Leftrightarrow P \in H$. Unter den gegebenen inzidenzgeometrischen Voraussetzungen gibt es an jeder Hyperebene H und zu jeder Geraden $a \nparallel H$ genau eine Schrägspiegelung σ mit $PP^\sigma \parallel a$ für alle Punkte $P \notin H$, kurz mit σ_H^a bezeichnet.

(1.14) *Wenn $A \in a$, so ist $\sigma_A\sigma_a^H = \sigma_{H'}^a$, wobei $H' = \mathsf{par}(H, A)$.*

Zur Beschreibung der Geradenparallelität wird entsprechend [8b] erklärt

$$\sigma_a^H \parallel \sigma_b^K :\Leftrightarrow a \parallel b \wedge H \parallel K.$$

(1.15) *Es gilt $\sigma_a^H \parallel \sigma_b^K$ genau dann, wenn für alle Produkte $\sigma_g\sigma_P$ mit $P \in g$ gilt $\sigma_a^H\sigma_g\sigma_P \in \Pi \Leftrightarrow \sigma_b^K\sigma_g\sigma_P \in \Pi$.*

Beweis. Sei $\sigma_a^H \parallel \sigma_b^K$ und $\sigma_a^H \sigma_g \sigma_P$ die Spiegelung an einem Punkt Q; o. B. d. A. sei $K = H$. Wegen $P \in g$ gibt es eine Hyperebene H' mit $\sigma_g \sigma_P = \sigma^g{}_{H'}$, so daß dann $\sigma_Q = \sigma_a^H \sigma^g_{H'}$ und damit $\sigma_a^H \sigma_Q = \sigma^g_{H'}$ und weiter $Q \in a$, $H' = \mathsf{par}(H, Q)$ und $g \parallel a$ nach (1.13) und (1.14) ist. Nun erhalten wir $\sigma_b^K \sigma_g \sigma_P = \sigma_b^K \sigma^g_{H'} = \sigma_b^{H'} \sigma^b_{H'}$, und das letzte Produkt ist nach (1.14) eine Punktspiegelung.
Umgekehrt folgt aus $\sigma_a^H \sigma_g \sigma_P = \sigma_A$ und $\sigma_b^K \sigma_g \sigma_P = \sigma_B$ zunächst $A \in a$, $B \in b$ und damit $\sigma^a_{H'} = \sigma_A \sigma_a^H = \sigma_B \sigma_b^K = \sigma^b_{K'}$ für $H' = \mathsf{par}(H, A)$ und $K' = \mathsf{par}(K, B)$. Folglich ist $H' = K'$ und $a \parallel b$, d. h. $\sigma_a^H \parallel \sigma_b^K$. ∎
Wir bemerken noch

(1.16) *Das Erzeugendensystem $\Pi \cup \Gamma$ ist invariant gegenüber inneren Automorphismen der Spiegelungsgruppe* $\mathsf{S}(\mathsf{A})$.

Dieser Satz ist äquivalent damit, daß für alle Punktspiegelungen σ_A, σ_B und Schrägspiegelungen σ_a, σ_b die Produkte $\sigma_A^{-1}\sigma_B\sigma_A$ und $\sigma_a^{-1}\sigma_B\sigma_a$ Punktspiegelungen und die Produkte $\sigma_A^{-1}\sigma_b\sigma_A$, $\sigma_a^{-1}\sigma_b\sigma_a$ Schrägspiegelungen sind.
Da die von den Schrägspiegelungen an Geraden erzeugte Gruppe bei einem unendlich dimensionalen Raum die von den Punktspiegelungen erzeugte Gruppe nicht enthält (vgl. u. a. [10]), wird im folgenden gruppentheoretischen Aufbau von einem zweiteiligen Erzeugendensystem ausgegangen.

2. Gruppentheoretisches Axiomensystem

Wir setzen in der Grundannahme nur so viel voraus wie zur Formulierung der Axiome bereits ausreicht. Als ersten Teil des gruppentheoretischen Axiomensystems (den G-Axiomen) verwenden wir eine Übersetzung der inzidenzgeometrischen Axiome, die durch den Abschnitt 1.5. vorgezeichnet ist.

2.1. Grundannahme, G-Axiome und grundlegende Folgerungen

Grundannahme. *Gegeben seien Mengen $\Pi = \{A, B, C, \ldots\}$ und $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ und eine Halbgruppe $\mathsf{S} = [\circ, e, \Pi \cup \Gamma]$* mit *Einselement e und Erzeugendensystem $\Pi \cup \Gamma$.* Die Mengen Π, Γ seien nicht notwendig von der leeren Menge verschieden; die Elemente von Π heißen *Punkte.*
Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathsf{S}$ wird erklärt

$$\mathfrak{a} \textit{ involutorisch}: \Leftrightarrow \mathfrak{a} \neq e \wedge \mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} = e$$

$$\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}: \Leftrightarrow \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \text{ involutorisch};$$

$$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \mid \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m: \Leftrightarrow \bigwedge_{i,j} \mathfrak{a}_i \mid \mathfrak{b}_j$$

und ferner sei für $\alpha \in \Gamma$

$$(\alpha) := \{A : A \in \Pi \wedge A \mid \alpha\}.$$

Diese Teilmengen aus Π heißen *Geraden* und werden auch mit $g, h, \ldots$ bezeichnet, $\mathfrak{L}$ bezeichnet die Menge der Geraden. Weitere Festlegungen sind (motiviert durch 1.5.)

$$\alpha \parallel \beta :\Leftrightarrow \textit{für alle } \gamma \circ C \in \mathsf{S} \textit{ mit } C \mid \gamma \textit{ gilt } \alpha \circ \gamma \circ C \in \Pi \Leftrightarrow \beta \circ \gamma \circ C \in \Pi$$

$$g \parallel h :\Leftrightarrow \textit{für alle } \alpha \in \Gamma \textit{ mit } (\alpha) = g \textit{ gibt es ein } \beta \textit{ mit } \alpha \parallel \beta \textit{ und } (\beta) = h.$$

G-Axiome.

G 1. *Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es ein Element $\alpha \in \Gamma$ mit $A, B \mid \alpha$; für $A, B \in \Pi$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$ folgt aus $A, B \mid \alpha, \beta$ und $A \neq B$ stets $(\alpha) = (\beta)$.*

Für (α) wird dann auch (A, B) gesetzt.

G 2. *Zu jedem Element $\alpha \in \Gamma$ gibt es verschiedene Punkte A, B mit $A, B \mid \alpha$.*

G 3. *Es gibt $A, B, C \in \Pi$, so daß für kein $\alpha \in \Gamma$ gilt $A, B, C \mid \alpha$.*

Derartige Punkte werden *nicht kollinear* genannt.

Aus G 3 folgt $\mathsf{card}\, \Pi \geqq 3$ und weiter aus G 1, daß alle Punkte involutorisch sind und $\Gamma \neq \emptyset$. Schließlich hat G 2 zur Folge, daß alle Elemente aus Γ involutorisch sind und $(\alpha) \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \Gamma$ ist. Daraus folgt leicht

(2.1) S *ist eine von involutorischen Elementen erzeugte Gruppe.*

Bereits aus der Definition der Relation $\parallel$ in Γ ergibt sich, daß sie eine Äquivalenzrelation ist; damit besteht auch Reflexivität und Transitivität für die Relation $\parallel$ in $\mathfrak{L}$. Die Symmetrie folgt aus der Übertragung der euklidischen Parallelenaussage (I 5) in $\mathfrak{L}$, so daß eine Übertragung von I 4 für den gruppentheoretischen Aufbau völlig entbehrlich wird. Auf Grund der Darlegungen im Abschnitt 1.5 ist als Axiom gerechtfertigt

G 4. *Zu jedem $\alpha \in \Gamma$ und $A \in \Pi$ gibt es genau ein Element $(\beta) \in \mathfrak{L}$ mit $A \mid \beta$ und $(\alpha) \parallel (\beta)$.*

Damit gilt die euklidische Parallelenaussage (I 5) für $\parallel$ in $\mathfrak{L}$. Wir setzen $\mathsf{par}(AB, C)$ für die Gerade $g \in \mathfrak{L}$ mit $C \in g$ und $(A, B) \parallel g$.

GP. *Sind $A, B, C \in \Pi$ nicht kollinear, dann gibt es einen gemeinsamen Punkt D von $\mathsf{par}(AB, C)$ und $\mathsf{par}(BC, A)$.*

GT. *Sind $A, B, C \in \Pi$ nicht kollinear und E ein Punkt aus (B, C) mit $E \neq B$, dann gibt es einen gemeinsamen Punkt D von $\mathsf{par}(AB, C)$ und (A, E).*

Die durch Π, $\mathfrak{L}$ und $\parallel$ vorliegende Inzidenzstruktur $(\Pi, \mathfrak{L}, \parallel)$ heißt *Gruppenraum von* S und wird mit $A(\mathsf{S})$ bezeichnet.
Wesentlich für eine gruppentheoretische Darstellung affiner Räume (und hier sofort einzusehen) ist der Satz

(2.2) *Genügt S der Grundannahme und den G-Axiomen, so ist der zugehörige Gruppenraum $A(\mathsf{S})$ ein affiner Raum.*

Weitere Axiome (sogenannte S-Axiome) werden aus der Forderung erwachsen, daß Π und Γ gerade die Punkt- bzw. Schrägspiegelungen (an Geraden) im Gruppenraum $A(\mathsf{S})$ darstellen. Zuvor stellen wir noch einige Hilfssätze bereit.

(2.3) *$\alpha \parallel \beta$ genau dann, wenn es zu jedem Punkt $A \in (\alpha)$ einen Punkt $B \in (\beta)$ mit $\alpha A = \beta B$ gibt und umgekehrt.*

(2.4) *Es ist $\Pi \cap \Gamma = \emptyset$.*

Beweis. Angenommen, es gibt Erzeugende $A \in \Pi$ und $\alpha \in \Gamma$ mit $A = \alpha$. Dann existieren nach G 4 und (2.3) eine Erzeugende β mit $\alpha \parallel \beta$ und $A \mid \beta$ sowie ein Punkt $B \in (\alpha)$ mit $\alpha B = \beta A$; offensichtlich ist $B = \beta$.
Aus (α) steht ein weiterer Punkt D zur Verfügung (G 2) und dazu ein Punkt $C \in (\beta)$ mit $\beta C = \alpha D$. Damit ist $D = D\beta\beta = \alpha C\beta = AC\beta = \beta AC = \beta D\beta$. Wegen $D \neq B = \beta$ folgt daraus $D \mid \beta$ und zusammen mit $(\alpha) \parallel (\beta)$ schließlich $(\alpha) = (\beta)$ und damit $A \mid \alpha$. Dies widerspricht $A = \alpha$. ∎

Im weiteren sei

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \text{für } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathsf{S}.$$

(2.5) (a) *Aus* $A, B \mid \gamma$ *folgt* $B^A \mid \gamma$.

(b) *Aus* $B \mid \alpha A$ *und* $B \nmid \alpha$ *folgt* $B^A \neq B$.

2.2. Spiegelungen im Gruppenraum und S-Axiome

Auf Grund von (1.8) erwarten wir, daß für jede Erzeugende $A \in \Pi$ die Abbildung

$$\bar{A} : \Pi \to \Pi \text{ vermöge } P \mapsto P^A$$

eine Punktspiegelung im Gruppenraum $A(\mathsf{S})$ ist.
Wir zeigen, daß dazu die Gültigkeit der folgenden beiden Forderungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

S 1. *Für alle* $A, B \in \Pi$ *ist* $B^A \in \Pi$.

S 2. *Für alle* $A \in \Pi$ *und* $\beta \in \Gamma$ *ist* $(\beta)^A := \{B^A : B \mid \beta\} \in \mathfrak{L}$.

Die Axiome S 1 und S 2 sichern zunächst unmittelbar, daß $\bar{A}$ eine Kollineation in $A(\mathsf{S})$ ist. Allein mit dem zusätzlichen Axiom S 1 gilt

(2.6) *Wenn* $B \neq A$, *so ist* $B^A \neq A$.

Beweis. Zunächst gibt es ein $\alpha \in \Gamma$ mit $A \mid \alpha$ und $B \nmid \alpha$ (nach G 1—G 3) und dazu die Parallele $\beta \in \Gamma$ zu α mit $B \mid \beta$ sowie $C \in (\alpha)$ und $D \in (\beta)$ mit $\alpha A = \beta D$ und $\alpha C = \beta B$ (Abb. 3). — Nach (2.5b) ist $B^C \neq B$.

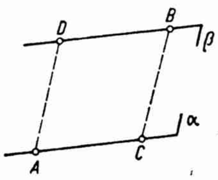

Abb. 3

Außerdem gilt $AC = A\alpha\alpha C = \alpha A\alpha C = \beta D\beta B = D\beta\beta B = DB$. Wäre $B^A = A$, so würde $B^C = B^{AC} = B^{DB}$ und so mit $B \mid \beta$ (und $D \mid \beta$) auch $B^C \mid \beta$ nach (2.5a) sein. Erst jetzt machen wir von S 1 Gebrauch, danach ist B^C ein Punkt. Wegen $B^C \neq B$ ist $C \in (B, B^C) = (\beta)$ und damit $(\beta) = (\alpha)$, da $(\alpha) \parallel (\beta)$ und $C \in (\alpha)$. Das wäre aber ein Widerspruch zu $B \notin (\alpha)$. ∎
Jetzt ist einzusehen, daß

$$P = A \Leftrightarrow P^A = P$$

und $\bar{A}$ involutorisch ist.
Damit ist bewiesen: *Jede Abbildung* $\bar{A}$ *ist eine Punktspiegelung an* A *im Gruppenraum* $A(\mathsf{S})$.

Der Satz (1.7) hat nun sofort zur Folge

(2.7) *Im Gruppenraum* $A(\mathsf{S})$ *gelten die Inzidenzaussagen* (d) *und* (F).

(2.8) *Für jedes* $A \in \Pi$ *ist* $\bar{A} = \sigma_A$ *in* $A(\mathsf{S})$, *d. h., die Abbildungen* $\bar{A}$ *sind genau die Punktspiegelungen in* $A(\mathsf{S})$.

Wir wenden uns nun den zusätzlichen Bedingungen für S zu, unter denen für alle $\alpha \in \Gamma$ die Abbildung $\bar{\alpha}: \Pi \to \Pi$ vermöge $P \mapsto P^\alpha$ eine Schrägspiegelung an (α) ist. Dafür sind als zusätzliche Forderungen ausreichend (und notwendig)

S 3. *Für alle* $\alpha \in \Pi$ *und* $B \in \Pi$ *ist* $B^\alpha \in \Pi$.

S 4. *Für alle* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *ist* $(\beta)^\alpha \in \mathfrak{L}$.

Auf Grund der Axiome S 3 und S 4 ist nämlich $\bar{\alpha}$ eine Kollineation in $A(\mathsf{S})$.
Mit (2.4) ergibt sich leicht, daß

$$P \in (\alpha) \Leftrightarrow P^\alpha = P$$

und $\bar{\alpha}$ involutorisch ist.
Demnach gilt: *Jede Abbildung* $\bar{\alpha}$ *ist eine Schrägspiegelung an* (α) *im Gruppenraum* $A(\mathsf{S})$.
Für $A \mid \alpha$ ist wegen $P \mid \alpha A \Leftrightarrow P^\alpha = P^A$ nach (1.11) die Menge $(\alpha A) = \{P: P \mid \alpha A\}$ eine Hyperebene im Gruppenraum $A(\mathsf{S})$. Das sind im allgemeinen jedoch nicht alle Hyperebenen in $A(\mathsf{S})$, und damit sind die Abbildungen $\bar{\alpha}$ nicht alle Schrägspiegelungen im Gruppenraum, wie folgendes Modell zeigt.
Es sei Π und Γ die Menge der Punkt- bzw. der Schrägspiegelungen an Geraden im dreidimensionalen affinen Raum über dem Körper der reellen Zahlen; und Γ_0 sei die Menge jener Spiegelungen σ_a^H aus Γ, für die H zu einer Koordinatenebene bezüglich eines vorgegebenen affinen Koordinatensystems parallel ist. Die durch Π und Γ_0 erzeugte Gruppe S_0 genügt den bisher vorgelegten gruppentheoretischen (G- und S-) Axiomen. Aber die Mengen (αA) mit $A \mid \alpha$ sind nicht alle Hyperebenen in $A(\mathsf{S}_0)$.
Mit diesem Modell ist eine andere bemerkenswerte strukturelle Eigenschaft bewiesen: *Aus der Grundannahme, den* G- *und den bisherigen* S-*Axiomen folgt nicht die Invarianz des Erzeugendensystems* $\Pi \cup \Gamma$ *gegenüber inneren Automorphismen von* S. Diese Invarianz bedeutet S 1 und S 3 sowie die Verschärfungen S 2′ (*Für alle* $A \in \Pi$, $\beta \in \Gamma$ *ist* $\beta^A \in \Gamma$.) und S 4′ (*Für alle* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *ist* $\beta^\alpha \in \Gamma$.). Sie wird oft — falls möglich — bereits als Forderung in die Grundannahme aufgenommen. Das wäre auch hier auf Grund des Satzes (1.16) gerechtfertigt. Der hier vorliegende gruppentheoretische Aufbau zeigt, daß dieser Forderung keineswegs eine besondere tragende Rolle zukommen muß. Im Modell gilt zwar noch S 2′, aber nicht S 4′.
Das folgende (und letzte gruppentheoretische) Axiom sichert, daß die Hyperebenen (αA) mit $A \mid \alpha$ alle Hyperebenen in $A(\mathsf{S})$ sind. Dazu wird in S erklärt: $H \subseteqq \Pi$ ist S-*Hyperebene* genau dann, wenn es $A, B \in \Pi$ mit $A \notin H$ und $B \in H$ derart gibt, daß zu jedem $P \in \Pi$ ein $Q \in H$ mit $P \in \mathrm{par}(AB, Q)$ existiert.

S 5. *Für alle* $A \in \Pi$, $\alpha \in \Gamma$ *und* S-*Hyperebenen* H *mit* $(\alpha) \cap H = \{A\}$ *gibt es genau eine Erzeugende* $\beta \in \Gamma$ *so, daß* $(\beta) = (\alpha)$ *und* $(\beta A) = H$.

Daraus folgt

(2.9) *Für alle* $A \in \Pi$, $\alpha \in \Gamma$ *und* $B \in \Pi$ *mit* $A \mid \alpha$ *und* $B \nmid \alpha$ *gibt es eine Erzeugende* $\beta \in \Gamma$ *so, daß* $(\beta) = (\alpha)$ *und* $B \mid \beta A$.

Diese Aussage reicht zusammen mit den bisherigen gruppentheoretischen Axiomen bereits für weitere wesentliche Ableitungen aus, so für

(2.10) *Im Grupepnraum* $A(\mathsf{S})$ *gelten neben* (d) *und* (F) *die Inzidenzaussagen* (d_P) *und* (H). (Zum Beweis siehe (1.12).)

Das volle gruppentheoretische Axiomensystem sichert

(2.11) *Zu jeder Geraden* $g \in \mathfrak{L}$ *und* S-*Hyperebene* H *mit* $\operatorname{card} g \cap H = 1$ *gibt es genau ein* $\alpha \in \Gamma$ *mit* $\bar{\alpha} = \sigma_g^H$ *und umgekehrt,* d. h., *die Abbildungen* $\bar{\alpha}$ *sind genau die Schrägspiegelungen in* $A(\mathsf{S})$.

2.3. Hauptsätze

Zusammenfassend ergibt sich aus den bisherigen Darlegungen (siehe insbesondere Sätze (1.7), (1.12), Abschnitt 1.5 sowie Satz (2.10)) der

Hauptsatz.

(a) *Ist* A *ein affiner Raum mit den Eigenschaften* (d), (F), (d_P) *und* (H), *so genügt die Spiegelungsgruppe* $\mathsf{S}(\mathsf{A})$ *den gruppentheoretischen* G- *und* S-*Axiomen.*

(b) *Ist* S *eine durch die Grundannahme und die* G- *und* S-*Axiome ausgezeichnete Gruppe, dann ist der Gruppenraum* $A(\mathsf{S})$ *ein affiner Raum, in dem die Inzidenzaussagen* (d), (F), (d_P) *und* (H) *gelten.*

Unter den hier genannten Prämissen für A bzw. S und (1.16) gilt überdies der

Isomorphiesatz.

(a) $A(S(\mathsf{A}))$ *ist isomorph zu* A;

(b) $S(A(\mathsf{S}))$ *ist isomorph zu* S.

Im Fall (a) wird durch

$$P \mapsto \sigma_P \text{ und } g \mapsto \{\sigma_P : \sigma_P \mid \sigma_g^H\}$$

für alle Punkte P und Geraden g aus dem affinen Raum A tatsächlich eine Bijektion von A auf den Gruppenraum der Spiegelungsgruppe von A vermittelt, bei der bezüglich $P \in g$ und $g \parallel h$ Relationstreue besteht.

Die zweite Behauptung (b) ergibt sich vermöge

$$A \mapsto \sigma_A \text{ und } \alpha \mapsto \sigma_{(\alpha)}^{(\alpha A)} \text{ (mit } A \mid \alpha) \qquad \text{für alle } A \in \Pi \text{ und } \alpha \in \Gamma.$$

Damit ist auch eine vollständige Übersicht über alle Modelle des vorgelegten gruppentheoretischen Axiomensystems gegeben. Schließlich ist die eingangs gestellte Frage beantwortet, welche affinen Räume sich gruppentheoretisch auf der Grundlage von Punkt- und Schrägspiegelungen an Geraden darstellen lassen. Wenn sich in einer solchen Darstellung die Erzeugenden $A \in \Pi$ und $\alpha \in \Gamma$ (genauer: die Abbildungen $\bar{A}$ und $\bar{\alpha}$) als die Punkt- bzw. Schrägspiegelungen im Gruppenraum ausweisen — und dies ist semantisch eine ganz natürliche Forderung —, so ist *für die gruppentheoretische Darstellung die Gültigkeit der affinen Sätze* (d), (d_P), (F) *und* (H) nicht nur *notwendig,* sondern auch *hinreichend.* Für die affinen Ebenen bedeutet dieses Ergebnis im Vergleich zu den Arbeiten [6, 7, 18, 19] und [16] eine erhebliche Erweiterung des Darstellungsbereichs.

LITERATUR

[1] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] Ewald, G.: Spiegelungsgeometrische Kennzeichnung euklidischer und nichteuklidischer Räume beliebiger Dimension. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *41* (1974), 224—251.

[3] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl., Teubner-Verlag, Stuttgart 1956.
[4] Klingenberg, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *18* (1952), 120–143.
[5] Kloth, S.: Räumliche äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Math. Nachr. *57* (1973), 87–126.
[6] Klotzek, B.: Äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Dissertation, Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam 1965.
[7] Klotzek, B.: Ebene äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Math. Nachr. *55* (1973), 83–137.
[8a, b] Klotzek, B.: Die affinen Räume einer Dimension $\geqq 3$ mit Fanoaxiom im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Dissertation B, Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam 1970, und Math. Nachr. *50* (1971), 245–303.
[9] Klotzek, B.: Affine und äquivalente Spiegelungsgeometrie. In: Entwicklung der Mathematik in der DDR, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974, S. 139–141.
[10] Klotzek, B.: Affine und äquiaffine Spiegelungsgeometrie sowie metrische Relationen in affinen Ebenen. In: Potsdamer Forschungen — Reihe B, Heft *3* (Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden), Wiss. Schriftenreihe PH „Karl Liebknecht", Potsdam 1974, S. 28–48.
[11] Kuroš, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964.
[12] Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Bayr. Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse 1954, 17–72.
[13] Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975/Carl Hanser Verlag, München—Wien 1976.
[14] Lingenberg, R.: Grundlagen der Geometrie. 2. Aufl., Mannheim/Wien/Zürich 1976.
[15] Pickert, G.: Projektive Ebenen. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1976.
[16] Quaisser, E.: Spiegelungsgeometrische Darstellung der desarguesschen Ebenen mit Fanoaxiom. Wiss. Z. Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam *23* (1979), 47–51.
[17] Quaisser, E.: Zum Aufbau affiner Ebenen aus dem Spiegelungsbegriff. Z. Math. Logik u. Grundlagen der Math. *27* (1981), 131–140.
[18] Wernicke, B.: Über einige gruppentheoretische Axiome im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Dissertation A, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam 1976.
[19] Wernicke, B.: Ebene äquiaffine und metrische Geometrien. Beitr. Algebra u. Geometrie *7* (1978), 39–57.

Zusatz bei der Korrektur:

Quaisser, E.: Zur relationstheoretischen und spiegelungsgeometrischen Darstellung affiner und metrisch-affiner Räume. Dissertation B, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam 1980.

Dort findet man einige Beispiele näher ausgeführt.

Manuskripteingang: 15. 11. 1979

VERFASSER:

Erhard Quaisser, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam