Werk

Titel: Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen II

Autor: BANNUSCHER, W.

Jahr: 1981

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0012|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
12 (1982), 77–91

Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen II

WOLFGANG BANNUSCHER

Einleitung

Der zweite Teil dieser Arbeit schließt direkt an [1] an. Die Numerierung der Paragraphen und Sätze erfolgt durchlaufend. Die Bedeutung der Bezeichnungen sind sämtlichst [1] zu entnehmen. Die in diesem Teil der Arbeit ohne Literaturhinweis zitierten Sätze findet man in [1].
Im folgenden seien die wesentlichsten Ergebnisse von [1] zusammengefaßt.
Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt k-regulär, falls für alle $X, Y \in \mathfrak{G}$ gilt

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_i D_i^{p^k}$$

mit geeigneten $D_i \in \langle X, Y\rangle'$.

Aus der k-Regularität einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ folgt die $(k+1)$-Regularität von $\mathfrak{G}$ (Satz 1).
$\Omega_l(\mathfrak{G})$ bzw. $\mho_l(\mathfrak{G})$, die aus den Elementen von $\mathfrak{G}$ der Ordnung kleiner oder gleich p^l bzw. den p^l-ten Potenzen von Elementen von $\mathfrak{G}$ erzeugten vollinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$, werden bei k-regulärem $\mathfrak{G}$ für $l \geqq k$ schon von diesen Elementen gebildet (Satz 2).
Es existiert für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl k eine nicht k-reguläre p-Gruppe der Ordnung $p^{(p-1)k+2}$ (§ 4).

In § 5 wird jetzt gezeigt, daß jede p-Gruppe mit einer Ordnung kleiner oder gleich $p^{(p-1)k+1}$ k-regulär ist (Satz 9a)), womit das Problem der Konstruktion einer nicht k-regulären p-Gruppe kleinster Ordnung vollständig gelöst ist. Außerdem wird ein tiefer liegendes k-Regularitätskriterium bewiesen. Es gilt: Ist $|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)k}$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär; und: Ist $|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k(Z_i(\mathfrak{G}))| \leqq p^{(p-i+1)k-1}$ für ein i mit $2 \leqq i \leqq p$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär; und: Ist $\left|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k(Z_i(\mathfrak{G}))\right| \leqq p^{(p-i+1)k-1}$ für ein i mit $2 \leqq i \leqq p$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär (Satz 9d) bzw. c)). Daraus wird ein handliches Kriterium gefolgert: Ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe und hat $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\exp \mathfrak{N} \leqq p^k$ und $|\mathfrak{N}| \geqq p^{(p-1)k}$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär (Satz 10).
Anschließend wird für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl k ein Beispiel einer nicht k-regulären p-Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $p^{(p+1)k}$ angegeben mit

(1) $\quad c(\mathfrak{G}) = p,$

(2) $\quad \left|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k(Z_i(\mathfrak{G}))\right| = p^{(p-i+1)k}$ für $i = 2, 3, \ldots, p.$

Jeder der Sätze aus § 1 bis § 5 ist für $k = 1$ bereits bekannt (P. HALL [3] und [4]).
In § 6 werden einige Eigenschaften von direkten Produkten von k-regulären p-Gruppen bewiesen. Satz 11 zeigt, daß das direkte Produkt der k-regulären p-Gruppen

$\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit $\mho_k(\mathfrak{G}_1') = \mathfrak{E}$ oder $\mho_k(\mathfrak{G}_2') = \mathfrak{E}$ stets k-regulär ist. Aus diesem Satz sind einige Folgerungen hergeleitet worden. Für $k = 1$ erhält man die Ergebnisse von O. GRÜN [2].

§ 5. Die exakte Bestimmung von $n(k, p)$. Ein Regularitätskriterium

Wir haben nun also erkannt, daß $n(k, p) \leqq (p-1)\,k + 1$ gilt. Im Fall $p = 2$ wissen wir: $n(k, 2) = k + 1 = (2-1)\,k + 1$. Im folgenden stellen wir uns das Ziel,

$$n(k, p) = (p-1)\,k + 1$$

für beliebige k, p zu beweisen sowie ein k-Regularitätskriterium herzuleiten. Dazu benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 5. *Sei $\mathfrak{G}$ eine nicht k-reguläre p-Gruppe. Dann gilt:*

a) *Es existieren X, Y aus $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft: $\langle X, Y\rangle/\mho_k(\langle X, Y\rangle')$ ist nicht k-regulär.*

b) *Sind alle echten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ k-regulär, so ist $\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}')$ nicht k-regulär.*

Beweis. a) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der k-Regularität einer p-Gruppe.

b) X, Y aus a) sind nur so wählbar, daß $\mathfrak{G} = \langle X, Y\rangle$ und somit nach a) $\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}') = \langle X, Y\rangle/\mho_k(\langle X, Y\rangle')$ nicht k-regulär ist.

Hilfssatz 6. *Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige p-Gruppe. Ist $\mho_l(\mathfrak{G})$ für ein gewisses $l \geqq 0$ k-regulär, dann gilt*

$$\mho_m\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big) = \mho_{l+m}(\mathfrak{G})$$

für alle $m \geqq k$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big) = \mho_{l+k}(\mathfrak{G})$ gilt, denn $\mho_l(\mathfrak{G})$ ist m-regulär für alle $m \geqq k$. Offensichtlich gilt $\mho_{l+k}(\mathfrak{G}) \leqq \mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big)$. Wir betrachten anstelle von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}/\mho_{l+k}(\mathfrak{G})$, setzen o. B. d. A. $\mho_{l+k}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$ und haben $\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big) = \mathfrak{E}$ zu zeigen. Zunächst zeigen wir $\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big) \leqq \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big]$. $\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big)$ besteht aus Elementen der Form $(X_1^{p^l}X_2^{p^l}\cdots X_s^{p^l})^{p^k}$ mit $X_i \in \mathfrak{G}$. Wir beweisen durch Induktion nach s: Alle diese Elemente liegen in $\big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big]$. Für $s = 1$ gilt

$$(X_1^{p^l})^{p^k} = X_1^{p^{l+k}} \in \mho_{l+k}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E} \leqq \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big].$$

Sei jetzt $s > 1$ und die Behauptung schon bis $s - 1$ bewiesen. Dann folgt aus der k-Regularität von $\mho_l(\mathfrak{G})$ und der Induktionsannahme

$$(X_1^{p^l}X_2^{p^l}\cdots X_s^{p^l})^{p^k} = \big((X_1^{p^l}\cdots X_{s-1}^{p^l})\,X_s^{p^l}\big)^{p^k} = (X_1^{p^l}\cdots X_{s-1}^{p^l})^{p^k}\,X^{p^{l+k}}D$$

mit

$$(X_1^{p^l}\cdots X_{s-1}^{p^l})^{p^k} \in \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big], \quad X^{p^{l+k}} = E$$

sowie

$$\begin{aligned} D \in \mho_k\big([\mho_l(\mathfrak{G}), \mho_l(\mathfrak{G})]\big) &= \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mho_l(\mathfrak{G})\big] \\ &\leqq \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big]. \end{aligned} \qquad (\circ)$$

Wegen ($\circ$) ist $(X_1^{p^l}\cdots X_s^{p^l})^{p^k} \in \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big]$. Also gilt

$$\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big) \leqq \big[\mho_k\big(\mho_l(\mathfrak{G})\big), \mathfrak{G}\big]. \qquad (*)$$

Wäre $\mho_k(\mho_l(\mathfrak{G})) > \mathfrak{E}$, so würde $[\mho_k(\mho_l(\mathfrak{G})), \mathfrak{G}] < \mho_k(\mho_l(\mathfrak{G}))$ gelten, was aber wegen $(*)$ nicht möglich ist. Also gilt $\mho_k(\mho_l(\mathfrak{G})) = \mathfrak{E}$ wie behauptet.

Hilfssatz 7. *Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige p-Gruppe. Dann gilt:*

a) *Ist $\mho_l(\mathfrak{G})$ für ein gewisses $l \geqq 0$ regulär, so ist*

$$|\mho_i(\mathfrak{G})/\mho_{i+1}(\mathfrak{G})| \geqq |\mho_{i+1}(\mathfrak{G})/\mho_{i+2}(\mathfrak{G})|$$

für alle $i \geqq l$.

b) *Ist $|\mho_m(\mathfrak{G})/\mho_{m+1}(\mathfrak{G})| \geqq p^r \leqq p^p$ für ein gewisses $m \geqq 0$, so ist*

$$|\mho_j(\mathfrak{G})/\mho_{j+1}(\mathfrak{G})| \geqq p^r$$

für alle j mit $0 \leqq j \leqq m$. Mithin gilt

$$|\mathfrak{G}/\mho_{m+1}(\mathfrak{G})| \geqq p^{r(m+1)}.$$

Beweis. a) Es ist $\mho_i(\mathfrak{G})$ regulär und damit nach Hilfssatz 6 $\mho_{i+1}(\mathfrak{G}) = \mho_1(\mho_i(\mathfrak{G}))$ sowie $\mho_{i+2}(\mathfrak{G}) = \mho_2(\mho_i(\mathfrak{G}))$. Satz 4b) (§ 2) für $m = 1$, angewandt auf $\mho_i(\mathfrak{G})$, liefert dann die Behauptung.

b) Wäre $|\mho_j(\mathfrak{G})/\mho_{j+1}(\mathfrak{G})| \leqq p^{r-1} \leqq p^{p-1}$ für ein j mit $0 \leqq j \leqq m$, so würde wegen

$$\mho_{j+1}(\mathfrak{G}) \leqq \mho_1(\mho_j(\mathfrak{G}))$$

$\mho_j(\mathfrak{G})$ regulär sein. Dann wäre nach a) $|\mho_m(\mathfrak{G})/\mho_{m+1}(\mathfrak{G})| \leqq p^{r-1}$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergäbe.

Hilfssatz 8. *Es sei $\mathfrak{N}$ ein k-regulärer Normalteiler einer beliebigen p-Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann ist*

$$\mho_k([\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r}]) = [\mho_k(\mathfrak{N}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r}]$$

für alle $r \geqq 1$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach r. Zunächst sei $r = 1$. $\mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}])$ wird erzeugt von Elementen der Form

$$([N_1, G_1]\,[N_2, G_2] \cdots [N_j, G_j])^{p^k}$$

mit $N_n \in \mathfrak{N}$, $G_g \in \mathfrak{G}$. Wir zeigen durch Induktion nach j, daß diese Elemente in $[\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$ liegen. Zunächst sei also $j = 1$. Wir haben wegen der k-Regularität von $\mathfrak{N}$

$$[N, G]^{p^k} = (N^{-1}N^G)^{p^k} = N^{-p^k}(N^{p^k})^G\, D$$

mit

$$D \in \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]) = [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{N}] \leqq [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$$

sowie

$$N^{-p^k}(N^{p^k})^G = [N^{p^k}, G] \in [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$$

für alle $N \in \mathfrak{N}$ und $G \in \mathfrak{G}$. Also ist $[N, G]^{p^k} \in [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$ für alle $N \in \mathfrak{N}$ und $G \in \mathfrak{G}$. Sei jetzt $j > 1$ und bereits

$$([N_1, G_1] \cdots [N_s, G_s])^{p^k} \in [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$$

für $N_n \in \mathfrak{N}$, $G_g \in \mathfrak{G}$ und $s \leqq j - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}([N_1, G_1] \cdots [N_j, G_j])^{p^k} &= \big(([N_1, G_1] \cdots [N_{j-1}, G_{j-1}])\,([N_j, G_j])\big)^{p^k}\\ &= ([N_1, G_1] \cdots [N_{j-1}, G_{j-1}])^{p^k}\,[N_j, G_j]^{p^k}\, D_1\end{aligned}$$

mit

$$([N_1, G_1] \cdots [N_{j-1}, G_{j-1}])^{p^k} \in [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}] \qquad \text{(Induktionsannahme)},$$

$$[N_j, G_j]^{p^k} \in [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}] \qquad (\text{Fall } j = 1)$$

sowie

$$D_1 \in \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]) = [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{N}] \leqq [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}].$$

Somit ist $\mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}]) \leqq [\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$. $[\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}]$ wird andererseits erzeugt von Elementen der Form $[N^{p^k}, G]$ mit $N \in \mathfrak{N}$ und $G \in \mathfrak{G}$ (man beachte: $\mathfrak{N}$ ist k-regulär). Es ist jetzt

$$[N^{p^k}, G] = N^{-p^k}(N^G)^{p^k} = (N^{-1}N^G)^{p^k} D_2 = [N, G]^{p^k} D_2$$

mit $D_2 \in \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]) \leqq \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}])$. Es gilt also auch

$$[\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}] \leqq \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}]),$$

und somit ist

$$[\mho_k(\mathfrak{N}), \mathfrak{G}] = \mho_k([\mathfrak{N}, \mathfrak{G}]).$$

Sei jetzt $r > 1$ und die Behauptung des Hilfssatzes bereits bis $r - 1$ bewiesen. Es ist $[\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}]$ ein in $\mathfrak{N}$ enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also k-regulärer Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wenden wir den schon bewiesenen Teil $r = 1$ auf $[\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}]$ an, so erhalten wir

$$\mho_k([\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r}]) = \mho_k\big([[\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}], \mathfrak{G}]\big) = \big[\mho_k([\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}]), \mathfrak{G}\big].$$

Nach Induktionsannahme ist

$$\mho_k([\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}]) = [\mho_k(\mathfrak{N}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r-1}]$$

und damit

$$\mho_k([\mathfrak{N}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r}]) = [\mho_k(\mathfrak{N}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{r}]$$

wie behauptet.

Hilfssatz 9. *Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige p-Gruppe und $k \geqq 2$. Existiert ein $(k-1)$-reguläres $Z_i(\mathfrak{G})$ $(2 \leqq i \leqq p)$ mit*

$$\big|\mho_{k-1}(Z_i(\mathfrak{G}))/\mho_k(Z_i(\mathfrak{G}))\big| \leqq p^{p-i},$$

dann ist

$$\mho_{k-1}(Z_p(\mathfrak{G})) \leqq \mho_k(Z_2(\mathfrak{G})).$$

Beweis. Da $Z_i(\mathfrak{G})$ $(k-1)$-regulär ist, gilt nach Hilfssatz 8 und der Voraussetzung dieses Hilfssatzes

$$\begin{aligned}\mho_{k-1}(Z_p(\mathfrak{G})) &= \mho_{k-1}([Z_i(\mathfrak{G}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-i}]) \\ &= [\mho_{k-1}(Z_i(\mathfrak{G})), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-i}] \\ &\leqq \mho_k(Z_i(\mathfrak{G})) \leqq \mho_k(Z_2(\mathfrak{G})).\end{aligned}$$

Bemerkung. Ist $k = 1$ in Hilfssatz 9 und entfällt die Bedingung „$(k-1)$-regulär" für $Z_i(\mathfrak{G})$, so bleibt die Aussage von Hilfssatz 9 trivialerweise erhalten.

Hilfssatz 10. *Sei p Primzahl und $l \in \mathbb{N}$.*

a) *Ist $p \geqq 3$ und $l \geqq 2$ oder $p = 2$ und $l \geqq 3$, so ist*

$$p^l - 2p > (p-1)(l-1).$$

b) *Ist $l \geqq 3$, so gilt*

$$2p(p^{l-2} - 1) \geqq (p-1)(l-1).$$

Beweis. Wir beweisen beide Behauptungen durch Induktion nach l.

a) Die Ungleichung ist äquivalent mit

$$\frac{p^l - 2p}{p-1} > l - 1.$$

Für $l = 2$ und $p \geqq 3$ ergibt sich

$$\frac{p^2 - 2p}{p-1} = p\,\frac{p-2}{p-1} > p - 2 \geqq 1.$$

Für $l = 3$ und $p = 2$ gilt

$$\frac{2^3 - 4}{1} = 4 > 2.$$

Sei jetzt $l > 2$ $(p \geqq 3)$ bzw. $l > 3$ $(p = 2)$ und die Ungleichung schon bis $l - 1$ bewiesen. Es ist dann

$$\frac{p^l - 2p}{p-1} = \frac{p^l - p^{l-1}}{p-1} + \frac{p^{l-1} - 2p}{p-1} > p^{l-1} + l - 2 > l - 1.$$

b) Für $l = 3$ ergibt sich

$$\frac{2p(p-1)}{p-1} = 2p \geqq 2.$$

Sei $l > 3$ und schon

$$\frac{2p(p^{l-3} - 1)}{p-1} \geqq l - 2.$$

Es ist dann

$$\frac{2p(p^{l-2} - 1)}{p-1} \geqq \frac{2p(p^{l-3} - 1)}{p-1} + \frac{p^{l-3}(p-1)}{p-1} \geqq l - 2 + 1 = l - 1$$

und damit

$$2p(p^{l-2} - 1) \geqq (p-1)(l-1).$$

Jetzt können wir den angekündigten Satz beweisen.

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe sowie $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

a) *Ist $|\mathfrak{G}| \leqq p^{(p-1)k+1}$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär. Es gilt also*

$$n(k, p) = (p-1)k + 1.$$

b) *Ist* $|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)k}$, *so ist*

$$|\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})| \leqq |\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})|$$

für alle Untergruppen $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{G}$.

c) *Ist* $\left|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k\left(Z_i(\mathfrak{G})\right)\right| \leqq p^{(p-i+1)k-1}$ *für ein* i *mit* $2 \leqq i \leqq p$, *so ist* $\mathfrak{G}$ k*-regulär.*

d) *Ist* $|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)k}$, *so ist* $\mathfrak{G}$ k*-regulär.*

Beweis. Für $k = 1$ sind alle Behauptungen aus Satz 11 richtig

a) P. HALL [3], Corollary 4.14, Seite 73;
b) P. HALL [4], Lemma 2.2, Seite 476;
c), d) P. HALL [4], Theorem 2.3, Seite 477.

Sei jetzt $k > 1$ und Satz 9 bis $k - 1$ vollständig bewiesen.
a) Es sei $\mathfrak{G}$ eine nicht k-reguläre p-Gruppe kleinster Ordnung. Wir nehmen $|\mathfrak{G}| \leqq p^{(p-1)k+1}$ an und führen das zum Widerspruch (zu Satz 6 (§ 3)): $\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = \mathfrak{E}$ für alle j mit $1 \leqq j \leqq k$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach j. Sei zunächst $j = 1$. Nach der Wahl von $\mathfrak{G}$ und Hilfssatz 5 ist sicher $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$. Wir nehmen an, es gelte $\mho_{k-1}(Z_p) > \mathfrak{E}$ und führen das zum Widerspruch: Z_p ist nicht $(k - 1)$-regulär (denn es gilt $|Z_p| \leqq p^{(p-1)(k-1)}$, und damit ist Z_p nach Induktionsannahme $(k - 1)$-regulär). Da $\mathfrak{G}$ nicht $(k - 1)$-regulär ist, gilt nach c) für $k - 1$

$$|Z_2/\mho_{k-1}(Z_2)| \geqq p^{(p-1)(k-1)}.$$

Es ist aber auch $|Z_2| \leqq p^{(p-1)k-1}$. Daraus folgt

$$|\mho_{k-1}(Z_2)| \leqq p^{p-2},$$

und damit ist nach Hilfssatz 9, der Annahme $\mho_{k-1}(Z_p) > \mathfrak{E}$ und wegen $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$ auch $Z_2(\mathfrak{G})$ nicht $(k - 1)$-regulär. Sei jetzt $2 < m \leqq p$ und schon $Z_{m-1}(\mathfrak{G})$ nicht $(k - 1)$-regulär. Nach c) im Fall $k - 1$, angewandt auf Z_{m-1}, gilt dann

$$|Z'_{m-1}/\mho_{k-1}(Z'_{m-1})| \geqq p^{(p-1)(k-1)}.$$

Es ist $Z_m \geqq Z'_{m-1}$; b) angewandt auf Z_m ergibt

$$|Z_m/\mho_{k-1}(Z_m)| \geqq p^{(p-1)(k-1)}.$$

Außerdem ist

$$|Z_m| \leqq p^{(p-1)k-m+1}.$$

Daraus folgt $|\mho_{k-1}(Z_m)| \leqq p^{p-m}$, und damit ist nach Hilfssatz 9 Z_m nicht $(k - 1)$-regulär. Es folgt also der Widerspruch: Z_p ist nicht $(k - 1)$-regulär. Also ist $\mho_{k-1}(Z_p) = \mathfrak{E}$. Wir zeigen noch für $p = 2$ und $j = 2$

$$\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}.$$

Es ist hier $|Z_2| \leqq 2^{k-1}$, das heißt $|Z_4| \leqq 2^{k-3}$ und damit

$$\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}.$$

Sei jetzt $k \geqq j \geqq 2$ $(p \geqq 3)$ bzw. $k \geqq j \geqq 3$ $(p = 2)$ und schon

$$\mho_{k-j+1}(Z_{p^{j-1}}) = \mathfrak{E};$$

Es gilt nach Hilfssatz 10 a)

$$|Z_{p^j-p}| \leqq p^{(p-1)(k-1)-(p^j-2p)} \leqq p^{(p-1)(k-1)-(p-1)(j-1)} = p^{(p-1)(k-j)}.$$

Ist $k - j \geqq 1$, so folgt nach Induktionsannahme: Z_{p^j-p} ist $(k-j)$-regulär (man beachte: $k - j \geqq 1$). Außerdem gilt

$$|\mho_{k-j}(Z_{p^j-p})| \leqq p^{p-1},$$

denn wäre

$$|\mho_{k-j}(Z_{p^j-p})| = |\mho_{k-j}(Z_{p^j-p})/\mho_{k-j+1}(Z_{p^j-p})| \geqq p^p$$

$$(\mho_{k-j+1}(Z_{p^j-p}) = \mathfrak{E} \text{ nach Induktionsannahme}),$$

so würde nach Hilfssatz 7 b)

$$|Z_{p^j-p}| \geqq p^{p(k-j)} > p^{(p-1)(k-j)} \quad (k - j \geqq 1)$$

gelten. Nach Hilfssatz 8 gilt jetzt

$$\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = \mho_{k-j}([Z_{p^j-p}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p}]) = [\mho_{k-j}(Z_{p^j-p}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p}] = \mathfrak{E}.$$

Im Fall $k - j = 0$ erhalten wir

$$Z_{p^k} = Z_{p^k-p} = \mathfrak{E}.$$

Also ist $\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = \mathfrak{E}$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $\mathfrak{G}$ damit nach Satz 6 (§ 3) k-regulär. Das ergibt einen Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{G}$. Also muß $|\mathfrak{G}| \geqq p^{(p-1)k+2}$ sein. Damit ist jede p-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}| \leqq p^{(p-1)k+1}$ nach Induktionsannahme k-regulär.

b) Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung. Weiterhin sei

$$\omega^{(k)}(\mathfrak{H}) = \log_p |\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})|$$

für alle Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Nach der Wahl von $\mathfrak{G}$ existiert eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G} : \mathfrak{H}| = p$ sowie $\omega^{(k)}(\mathfrak{H}) > \omega^{(k)}(\mathfrak{G})$. Es ist

$$|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| = p \frac{|\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})|}{|\mho_k(\mathfrak{G})/\mho_k(\mathfrak{H})|} < |\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})|.$$

Daraus folgt

$$|\mho_k(\mathfrak{G})/\mho_k(\mathfrak{H})| \geqq p^2,$$

das heißt, es existiert ein Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mho_k(\mathfrak{H}) \leqq \mathfrak{L} < \mho_k(\mathfrak{G})$ und $|\mho_k(\mathfrak{G})/\mathfrak{L}| = p^2$. Nach der Wahl von $\mathfrak{G}$ ist jetzt $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}$, denn andernfalls wäre $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ ein Gegenbeispiel zu b) von kleinerer Ordnung als $|\mathfrak{G}|$ mit $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ für $\mathfrak{H}$. Wir haben also $|\mho_k(\mathfrak{G})| = p^2$, $\mho_k(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$ sowie $|\mathfrak{G}| \leqq p^{(p-1)k+2}$. Wäre $\mathfrak{G}$ k-regulär, so würde gelten

$$|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| = |\Omega_k(\mathfrak{G})| \geqq |\Omega_k(\mathfrak{H})| = |\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})|.$$

Das ergibt einen Widerspruch zur Annahme

$$|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| < |\mathfrak{H}/\mho_k(\mathfrak{H})|.$$

Damit ist $\mathfrak{G}$ also eine nicht k-reguläre Gruppe der Ordnung $p^{(p-1)k+2}$ mit $|\mho_k(\mathfrak{G})| = p^2$. Wir werden zeigen, daß $\mathfrak{G}$ entgegen der Annahme k-regulär ist. Es ist wegen a) jede echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ k-regulär. Außerdem ist $\mho_k(\mathfrak{G}') \leqq \mho_k(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$. Für alle

P, Q aus $\mathfrak{G}$ gilt

$$[Q^{p^k}, P] = Q^{-p^k}P^{-1}Q^{p^k}P = Q^{-p^k}(P^{-1}QP)^{p^k} = Q^{-p^k}(QS)^{p^k}$$

mit $S = [Q, P] \in \mathfrak{G}'$. Es ist $\langle Q^{-1}, QS\rangle = \langle Q, S\rangle \leqq \langle Q, \mathfrak{G}'\rangle < \mathfrak{G}$ und damit $\langle Q^{-1}, QS\rangle$ k-regulär. Also ist

$$Q^{-p^k}(QS)^{p^k} = (Q^{-1}QS)^{p^k} = S^{p^k} = \mathfrak{E}$$

und damit $[Q^{p^k}, P] = E$; demnach ist $\mho_k(\mathfrak{G}) \leqq Z(\mathfrak{G})$. Offenbar ist $\mho_k(\mathfrak{G})$ nichtzyklisch, denn wäre etwa $\mho_k(\mathfrak{G}) = \langle C\rangle$, ord $C = p^2$, so würde ein $X \in \mathfrak{G}$ existieren, so daß $X^{p^k} = C^l$, $(l, p) = 1$ und $X^{p^{k+1}} \neq E$ wäre. Es ist aber $X^p \in \mathfrak{H}$ und damit $(X^p)^{p^k} = X^{p^{k+1}} = E$ für alle $X \in \mathfrak{G}$. Also ist $\mho_k(\mathfrak{G})$ ein in $Z(\mathfrak{G})$ liegender elementarabelscher Normalteiler vom Typus (p, p) von $\mathfrak{G}$. Sei $\mho_k(\mathfrak{G}) = \langle A\rangle \times \langle B\rangle$ mit ord A $=$ ord $B = p$. Da $A, B \in Z(\mathfrak{G})$ gilt, folgt $\langle A\rangle \trianglelefteqq \mathfrak{G}$ sowie $\langle B\rangle \trianglelefteqq \mathfrak{G}$. Nach a) sind dann $\mathfrak{G}/\langle A\rangle$ sowie $\mathfrak{G}/\langle B\rangle$ k-regulär. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}/\langle A\rangle$ bzw. $\mathfrak{G}/\langle B\rangle$ bedeutet wegen $\mho_k\big(Z_2(\mathfrak{G})\big) \leqq \mho_k(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$: Für alle X, $Y \in \mathfrak{G}$ gilt

$$(X\,Y)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}A^l \qquad \text{bzw.} \qquad (X\,Y)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}B^m.$$

Also gilt $A^l = B^m$. Es ist aber $\langle A\rangle \cap \langle B\rangle = \mathfrak{E}$, damit $A^l = B^m = E$ und somit

$$(X\,Y)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}$$

für alle X, $Y \in \mathfrak{G}$. Das heißt, $\mathfrak{G}$ ist k-regulär entgegen unserer Annahme. Damit ist b) bewiesen.

c) Wir beweisen c) wieder durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$. Für $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ ist nach b) wegen $Z_i(\mathfrak{H}) \leqq Z_i(\mathfrak{G})$

$$\big|Z_i(\mathfrak{H})/\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{H})\big)\big| \leqq p^{(p-i+1)k-1}$$

und $\mathfrak{H}$ damit nach Induktionsannahme k-regulär. Für $\mathfrak{E} < \mathfrak{N} \trianglelefteqq \mathfrak{G}$ ist

$$\begin{aligned}\big|Z_i(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})/\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\big)\big| &= |Z_i(\mathfrak{G})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}|\,\big|\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G})\big)\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\big|^{-1}\\ &= \frac{|Z_i(\mathfrak{G})|\,\big|\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G})\big) \cap \mathfrak{N}\big|}{|Z_i(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{N}|\,\big|\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G})\big)\big|} \leqq \frac{|Z_i(\mathfrak{G})|}{\big|\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G})\big)\big|}\\ &= \big|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k\big(Z_i(\mathfrak{G})\big)\big| \leqq p^{(p-i+1)k-1}\end{aligned}$$

und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ damit nach Induktionsannahme k-regulär. Dann ist nach Hilfssatz 5 $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$. Wir zeigen wieder $\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = \mathfrak{E}$ für $1 \leqq j \leqq k$ durch Induktion nach j, wodurch nach Satz 6 (§ 3) $\mathfrak{G}$ k-regulär ist. Sei zunächst $j = 1$. Wir nehmen $\mho_{k-1}(Z_p) > \mathfrak{E}$ an und zeigen: $Z_m(\mathfrak{G})$ ist nicht $(k-1)$-regulär für $i \leqq m \leqq p$. Sei zunächst $m = i$. Es ist $|Z_i(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-i+1)k-1}$. Hilfssatz 7b) liefert dann $|\mho_{k-1}(Z_i)| \leqq p^{p-i}$, denn wäre $|\mho_{k-1}(Z_i)| = |\mho_{k-1}(Z_i)/\mho_k(Z_i)| \geqq p^{p-i+1}$, so würde nach Hilfssatz 7b), angewandt auf Z_i,

$$|Z_i| = |Z_i/\mho_k(Z_i)| \geqq p^{(p-i+1)k}$$

gelten. Damit ist $Z_i(\mathfrak{G})$ nach Hilfssatz 9 nicht $(k-1)$-regulär. Sei nun $p \geqq m \geqq i+1$ und schon Z_{m-1} nicht $(k-1)$-regulär. Dann ist wegen $Z'_{m-1} \leqq Z_m$ nach b) und c) im Fall $k-1$

[illegible] $$|Z_m/\mho_{k-1}(Z_m)| \geqq p^{(p-1)(k-1)} \geqq p^{(p-i+1)(k-1)}.$$

Außerdem ist

$$|Z_m| \leqq p^{(p-i+1)k+i-m-1}.$$

Daraus folgt

$$|\mho_{k-1}(Z_m)| \leqq p^{p-m}.$$

Hilfssatz 9 liefert dann wieder die Nicht-$(k-1)$-Regularität von Z_m. Es ist also Z_p nicht $(k-1)$-regulär. Es gilt jedoch

$$|Z_p| \leqq p^{(p-i+1)k-1-p+i} = p^{(p-i+1)(k-1)} \leqq p^{(p-1)(k-1)},$$

womit nach a) Z_p $(k-1)$-regulär ist. Das ergibt einen Widerspruch, und es muß darum $\mho_{k-1}(Z_p) = \mathfrak{E}$ gelten. Wir zeigen noch im Fall $p = 2$

$$\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}.$$

Es ist hier $|Z_2| \leqq 2^{(2-i+1)(k-1)} = 2^{k-1}$ (nur $i = 2$ ist möglich). Daraus folgt $|Z_4| \leqq 2^{k-3}$ und damit $\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}$. Sei jetzt $k \geqq j \geqq 2$ $(p \geqq 3)$ bzw. $k \geqq j \geqq 3$ $(p = 2)$ und schon

$$\mho_{k-j+1}(Z_{p^{j-1}}) = \mathfrak{E}.$$

Es ist dann nach Hilfssatz 10a)

$$|Z_{p^j-p}| \leqq p^{(p-1)(k-1)-(p^j-2p)} \leqq p^{(p-1)(k-j)}.$$

Ist $k = j$, so ist $Z_{p^k} = Z_{p^k-p} = \mathfrak{E}$. Ist $k - j \geqq 1$, so ist Z_{p^j-p} nach a) $(k-j)$-regulär. Außerdem gilt nach Hilfssatz 7b)

$$|\mho_{k-j}(Z_{p^j-p})| \leqq p^{p-1}.$$

Dann ist nach Hilfssatz 8

$$\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = [\mho_{k-j}(Z_{p^j-p}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p}] = \mathfrak{E}.$$

Damit ist c) vollständig bewiesen.

d) Wir beweisen d) wieder durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$. Analog zu c) folgt nach b) wieder, daß jede echte Unter- und Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ k-regulär und somit nach Hilfssatz 5 $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$ ist. Durch Induktion nach j wird bewiesen, daß $\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = \mathfrak{E}$ für alle j mit $1 \leqq j \leqq k$ gilt, woraus nach Satz 6 (§ 3) die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ folgt. Sei zunächst $j = 1$.
Es ist $\mathfrak{G}'$ $(k-1)$-regulär.

Beweis. Wir nehmen an, $\mathfrak{G}'$ ist nicht $(k-1)$-regulär. Nach b) ist

$$|\mathfrak{G}'| = |\mathfrak{G}'/\mho_k(\mathfrak{G}')| \leqq |\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)k}.$$

Wir zeigen

$$|\mho_{k-1}(Z_p)| \leqq p.$$

Es ist $|Z_p| \leqq p^{(p-1)(k-1)+1}$ und damit Z_p nach a) $(k-1)$-regulär. Da aber nach unserer Annahme Z_2 nicht $(k-1)$-regulär ist, existiert ein m $(2 < m \leqq p)$ mit der Eigenschaft: Z_{m-1} ist nicht $(k-1)$-regulär, und Z_m ist $(k-1)$-regulär. Dann gilt wegen $Z'_{m-1} \leqq Z_m$ nach b) und c) im Fall $k-1$

$$|Z_m/\mho_{k-1}(Z_m)| \geqq p^{(p-1)(k-1)}.$$

Außerdem gilt $|Z_m| \leqq p^{(p-1)k-m+2}$. Daraus folgt $|\mho_{k-1}(Z_m)| \leqq p^{p-m+1}$. Hilfssatz 8 liefert dann

$$|\mho_{k-1}(Z_p)| = |[\mho_{k-1}(Z_m), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-m}]| \leqq p.$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion nach l, daß für alle l mit $2 \leqq l \leqq k$

$$\mho_{k-l}(Z_{2p^{l-1}}) = \mathfrak{E}$$

gilt, woraus wegen $Z_{p^{l-1}}(Z_2) \leqq Z_{2p^{l-1}}$ nach Satz 6 (§ 3) entgegen der Annahme die $(k-1)$-Regularität von $\mathfrak{G}' = Z_2$ folgt. Sei zunächst $l = 2$. Es war Z_p $(k-1)$-regulär sowie $|\mho_{k-1}(Z_p)| \leqq p$. Hilfssatz 8 liefert dann

$$\mho_{k-1}(Z_{p+1}) = [\mho_{k-1}(Z_p), \mathfrak{G}] = \mathfrak{E}.$$

Außerdem gilt

$$|Z_{p+1}| \leqq p^{(p-1)(k-1)}.$$

Daraus folgt

$$|Z'_{p+1}| \leqq |Z_{2p+2}| \leqq p^{(p-1)(k-1)-p-1} = p^{(p-1)(k-2)-2}$$
$$\leqq p^{(p-1)(k-2)-1}.$$

Ist $k > 2$, so folgt nach c) die $(k-2)$-Regularität von Z_{p+1}.
Hilfssatz 7b) liefert außerdem $|\mho_{k-2}(Z_{p+1})| \leqq p^{p-1}$, so daß nach Hilfssatz 8

$$\mho_{k-2}(Z_{2p}) = [\mho_{k-2}(Z_{p+1}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-1}] = \mathfrak{E}$$

gilt. Ist $k = 2$, so ist $|Z_{p+1}| \leqq p^{p-1}$ und damit

$$Z_{2p} = [Z_{p+1}, \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-1}] = \mathfrak{E}.$$

Also gilt stets

$$\mho_{k-2}(Z_{2p}) = \mathfrak{E}.$$

Sei jetzt $3 \leqq l \leqq k$ und schon $\mho_{k-l+1}(Z_{2p^{l-2}}) = \mathfrak{E}$. Dann gilt nach Hilfssatz 10b)

$$|Z_{2p^{l-1}-p+1}| \leqq p^{(p-1)(k-1)-(2p^{l-1}-2p)}$$
$$= p^{(p-1)(k-1)-2p(p^{l-2}-1)}$$
$$\leqq p^{(p-1)(k-l)}.$$

Ist $k - l \geqq 1$, so ist $Z_{2p^{l-1}-p+1}$ $(k-l)$-regulär nach a). Außerdem liefert Hilfssatz 7b)

$$|\mho_{k-l}(Z_{2p^{l-1}-p+1})| = |\mho_{k-l}(Z_{2p^{l-1}-p+1})/\mho_{k-l+1}(Z_{2p^{l-1}-p+1})| \leqq p^{p-1}.$$

Damit ist nach Hilfssatz 8

$$\mho_{k-l}(Z_{2p^{l-1}}) = [\mho_{k-l}(Z_{2p^{l-1}-p+1}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-1}] = \mathfrak{E}.$$

Ist $k - l = 0$, so ist

$$Z_{2p^{k-1}} \leqq Z_{2p^{k-1}-p+1} = \mathfrak{E}.$$

Also ist $\mathfrak{G}'$ $(k-1)$-regulär.
Es war $|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)k}$. Ist $|\mathfrak{G}/\mho_1(\mathfrak{G})| \leqq p^{p-1}$, so ist $\mathfrak{G}$ regulär, und es ist nichts

zu zeigen. Sei also $|\mathfrak{G}/\mho_1(\mathfrak{G})| \geqq p^p$. Dann ist

$$|\mho_1(\mathfrak{G})/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{(p-1)(k-1)-1}.$$

Hilfssatz 7b) liefert somit

$$|\mho_{k-1}(\mathfrak{G})/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{p-2}.$$

Da $\mho_1(\mho_{k-1}(\mathfrak{G})) \geqq \mho_k(\mathfrak{G})$ gilt, ist $\mho_{k-1}(\mathfrak{G})$ regulär und damit nach Hilfssatz 6

$$\mho_1(\mho_{k-1}(\mathfrak{G})) = \mho_k(\mathfrak{G}).$$

b) angewandt auf $\mho_{k-1}(\mathfrak{G})$ ergibt dann mit Hilfssatz 6

$$\left|\mho_{k-1}(\mathfrak{G}')/\mho_1(\mho_{k-1}(\mathfrak{G}'))\right| = |\mho_{k-1}(\mathfrak{G}')/\mho_k(\mathfrak{G}')|$$
$$\leqq \left|\mho_{k-1}(\mathfrak{G})/\mho_1(\mho_{k-1}(\mathfrak{G}))\right| = |\mho_{k-1}(\mathfrak{G})/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq p^{p-2}.$$

Es ist $\mathfrak{G}'$ $(k-1)$-regulär und somit nach Hilfssatz 9

$$\mho_{k-1}(Z_p) = \mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}.$$

Wir zeigen noch für $p = 2$

$$\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}.$$

Es war

$$|Z_2| = |Z_2/\mho_k(Z_2)| \leqq |\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| \leqq 2^{(2-1)k} = 2^k.$$

Daraus folgt $|Z_4| \leqq 2^{k-2}$ und damit $\mho_{k-2}(Z_4) = \mathfrak{E}$. Sei jetzt $k \geqq j \geqq 2$ $(p \geqq 3)$ bzw. $k \geqq j \geqq 3$ $(p = 2)$ und schon $\mho_{k-j+1}(Z_{p^{j-1}}) = \mathfrak{E}$.
Es ist wieder nach Hilfssatz 10a)

$$|Z_{p^j-p+1}| \leqq p^{(p-1)(k-1)+1-1-(p^j-2p)} \leqq p^{(p-1)(k-j)}.$$

Also ist Z_{p^j-p+1} im Fall $k - j \geqq 1$ $(k-j)$-regulär. Hilfssatz 7b) liefert

$$|\mho_{k-j}(Z_{p^j-p+1})| = |\mho_{k-j}(Z_{p^j-p+1})/\mho_{k-j+1}(Z_{p^j-p+1})| \leqq p^{p-1},$$

so daß nach Hilfssatz 8

$$\mho_{k-j}(Z_{p^j}) = [\mho_{k-j}(Z_{p^j-p+1}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{p-1}] = \mathfrak{E}$$

gilt. Für $k = j$ ist

$$Z_{p^k} = Z_{p^k-p+1} = \mathfrak{E}.$$

Damit ist d) vollständig bewiesen.

Als Folgerung aus Satz 9 können wir den folgenden Satz angeben.

Satz 10. *Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Hat $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit* $\exp \mathfrak{N} \leqq p^k$ *und $|\mathfrak{N}| \geqq p^{(p-1)k}$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär.*

Beweis. Ist $\mho_k(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, so ist die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ klar. Andernfalls existiert ein Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{M}| = p$ und $\mathfrak{M} \leqq \mho_k(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ erfüllt wieder unsere Voraussetzung:

Sei nämlich $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ mit einem Exponenten kleiner oder gleich p^k und von der Ordnung $p^{(p-1)k}$, dann hat $\mathfrak{K}$ die Ordnung $p^{(p-1)k+1}$ und ist nach Satz 9a) k-regulär. Es gilt dann nach Satz 4a) (§ 2)

$$|\Omega_k(\mathfrak{K})| = |\mathfrak{K}/\mho_k(\mathfrak{K})| \geqq |\mathfrak{K}/\mathfrak{M}| = p^{(p-1)k}$$

und auch $\Omega_k(\mathfrak{K}) \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Es ist jetzt $\Omega_k(\mathfrak{K})$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ von einem Exponenten kleiner oder gleich p^k (man beachte: $\mathfrak{K}$ ist k-regulär!) und einer Ordnung größer oder gleich $p^{(p-1)k}$. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung von Satz 10. Also erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ die Voraussetzung des Satzes. Vermöge eines Induktionsschlusses können wir annehmen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ k-regulär ist. Wegen $\mathfrak{M} \leqq \mho_k(\mathfrak{G})$ gilt dann

$$|\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G})| = |\mathfrak{G}/\mathfrak{M}/\mho_k(\mathfrak{G}/\mathfrak{M})| = |\Omega_k(\mathfrak{G}/\mathfrak{M})| \leqq p^{(p-1)k-1},$$

da $\Omega_k(\mathfrak{G}/\mathfrak{M})$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ mit einem Exponenten kleiner oder gleich p^k ist. Somit ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 9d) k-regulär.

Folgerung (P. HALL [4], Lemma 2.41, Seite 479). Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Hat $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Exponenten p mit $|\mathfrak{N}| \geqq p^{p-1}$, so ist $\mathfrak{G}$ regulär.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 10 mit $k = 1$.

Aus Satz 9 ergibt sich weiterhin:

Folgerung. Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Wird $\mathfrak{G}$ von Elementen der Ordnung kleiner oder gleich p^k erzeugt und ist $|\mathfrak{G}| \leqq p^{1+k(p-1)}$, dann hat jedes Element von $\mathfrak{G}$ höchstens die Ordnung p^k (P. HALL [4], Theorem 2.64, Seite 485).

Beweis. Nach Satz 9a) ist $\mathfrak{G}$ k-regulär. Nach Voraussetzung ist außerdem $\mathfrak{G} = \Omega_k(\mathfrak{G})$. Somit ergibt sich aus Satz 4a) (§ 2)

$$|\mho_k(\mathfrak{G})| = |\mathfrak{G}/\Omega_k(\mathfrak{G})| = 1.$$

Damit ist $\mho_k(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$ wie behauptet.

Beispiel. Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl k existiert eine nicht k-reguläre p-Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $p^{(p+1)k}$ mit

$$(1) \qquad c(\mathfrak{G}) = p,$$

$$(2) \qquad \bigl|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k\bigl(Z_i(\mathfrak{G})\bigr)\bigr| = p^{(p-i+1)k} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, p.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{A} = \langle A_1\rangle \times \langle A_2\rangle \times \cdots \times \langle A_p\rangle$ eine abelsche Gruppe mit ord $A_i = p^k$ für $i = 1, 2, \ldots, p$. Dann ist die Abbildung α mit

$$A_i^\alpha = A_i A_{i+1} \qquad (1 \leqq i \leqq p-1), \qquad A_p^\alpha = A_p$$

offenbar ein Automorphismus der Ordnung p^k von $\mathfrak{A}$. Wir betrachten die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\langle X\rangle$ mit $A^X = A^\alpha$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $X^{p^k} = E$. Dann hat die Gruppe als semidirektes Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\langle X\rangle$ die Ordnung $p^{(p+1)k}$. Weiterhin ist offensichtlich

$$Z_i(\mathfrak{G}) = \langle A_i\rangle \times \langle A_{i+1}\rangle \times \cdots \times \langle A_p\rangle \quad \text{für } 2 \leqq i \leqq p,$$

so daß

$$\bigl|Z_i(\mathfrak{G})/\mho_k\bigl(Z_i(\mathfrak{G})\bigr)\bigr| = |Z_i(\mathfrak{G})| = p^{(p-i+1)k}$$

gilt. Wegen $\mathfrak{E} \neq Z_p(\mathfrak{G}) = \langle A_p\rangle \leqq Z(\mathfrak{G})$ ist $c(\mathfrak{G}) = p$. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ würde wegen $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{A}$ insbesondere

$$|XA_1|^{p^k} = X^{p^k} A_1^{p^k} = E$$

erfordern. Es gilt jedoch wegen Hilfssatz 4 (§ 4)

$$(XA_1)^{p^k} = X^{p^k}A_1^{p^k}\prod_{i=2}^{p^k}[A_1, X, \underset{i-1}{\ldots}, X]^{\binom{p^k}{i}} = [A_1, X, \underset{p-1}{\ldots}, X]^{\binom{p^k}{p}} = A^{\binom{p^k}{p}} \neq E.$$

§ 6. Direkte Produkte von k-regulären p-Gruppen

Es ist bekannt, daß sich die gewöhnliche Regularität von zwei p-Gruppen im allgemeinen nicht auf ihr direktes Produkt vererbt (siehe B. HUPPERT [5], III., Satz 10.3c), Seite 323). So ist zu erwarten, daß das auch allgemein für k-reguläre p-Gruppen gilt.

Beispiel. Es gibt eine reguläre (!) 3-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}| = 3^7$ derart, daß $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ nicht 2-regulär ist.

Beweis. Die Komponenten $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ des direkten Produktes werden gegeben durch die definierenden Relationen

$$A_i^{3^4} = B_i^{3^3} = E, \qquad A_i^{B_i} = A_i^4.$$

Es ist $\mathfrak{G}_i' = \langle A_i^3\rangle$ zyklisch und damit $\mathfrak{G}_i$ regulär (siehe B. HUPPERT [5], III., Satz 10.2c), Seite 322). Man erhält für $H_1 = A_1B_2^{-1}$ und $H_2 = B_1^{-1}A_2$

$$\mho_2(\langle H_1, H_2\rangle') = \langle A_1^{-3^3}A_2^{3^3}\rangle$$

sowie

$$(H_1H_2)^{3^2} = H_1^{3^2}H_2^{3^2}A_1^{-3^3}.$$

Also ist $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ nicht 2-regulär.

Bemerkung. Das Beispiel zeigt auch, daß eine nicht k-reguläre Gruppe $\mathfrak{G}$ mit k-regulärem $\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}')$ existiert, so daß Hilfssatz 5b) (§5) ohne die dort gemachte Zusatzvoraussetzung im allgemeinen nicht gilt. Im Beispiel ist nämlich

$$\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}_1/\langle A_1^{3^3}\rangle \times \mathfrak{G}_2/\langle A_2^{3^3}\rangle$$

sowie

$$Z_3\big(\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}')\big) = \langle A_1^{3^2}\rangle/\langle A_1^{3^3}\rangle \times \langle A_2^{3^2}\rangle/\langle A_2^{3^3}\rangle.$$

Also ist

$$\mho_1\big(Z_3(\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}'))\big) = \mho_k(\mathfrak{G}')/\mho_k(\mathfrak{G}') = \overline{\mathfrak{E}}$$

und damit nach Folgerung 2) aus Satz 6 (§ 3) $\mathfrak{G}/\mho_k(\mathfrak{G}')$ 2-regulär.

Es lassen sich für direkte Produkte von k-regulären p-Gruppen folgende Aussagen machen. (Für $k = 1$ erhalten wir die Sätze von O. GRÜN [2].)

Satz 11. *Seien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ k-reguläre p-Gruppen. Ist $\mho_k(\mathfrak{G}_1') = \mathfrak{E}$ oder $\mho_k(\mathfrak{G}_2') = \mathfrak{E}$, dann ist $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ k-regulär.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\mho_k(\mathfrak{G}_2') = \mathfrak{E}$. Seien weiterhin $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ sowie $S_1T_1, S_2T_2 \in \mathfrak{G}$ beliebig mit $S_i \in \mathfrak{G}_1$, $T_i \in \mathfrak{G}_2$ für $i = 1, 2$. Aus der k-Regularität von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$

folgt dann

$$\begin{aligned}(S_1T_1 \cdot S_2T_2)^{p^k} &= (S_1S_2)^{p^k}\,(T_1T_2)^{p^k}\\ &= S_1^{p^k}S_2^{p^k}C^{p^k}T_1^{p^k}T_2^{p^k}\\ &= (S_1T_1)^{p^k}\,(S_2T_2)^{p^k}\,C^{p^k}\end{aligned}$$

mit $C^{p^k} \in \mho_k(\langle S_1, S_2\rangle')$. Wir zeigen

$$\mho_k(\langle S_1, S_2\rangle') \leqq \mho_k(\langle S_1T_1, S_2T_2\rangle'),$$

woraus die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ folgt. Sei $\mathfrak{H} = \langle S_1T_1, S_2T_2\rangle$. Es ist dann $\mathfrak{H}' = \langle [S_1T_1, S_2T_2]^H \mid H \in \mathfrak{H}\rangle$. Jedes Element aus $\mho_k(\langle S_1, S_2\rangle')$ hat die Form

$$\begin{aligned}F &= \left([S_1, S_2]^{S_1^{r_1}S_2^{q_1}}\,[S_1, S_2]^{S_1^{r_2}S_2^{q_2}} \cdots [S_1, S_2]^{S_1^{r_n}S_2^{q_n}}\right)^{p^k}\\ &= \left([S_1, S_2]^{(S_1T_1)^{r_1}(S_2T_2)^{q_1}} \cdots [S_1, S_2]^{(S_1T_1)^{r_n}(S_2T_2)^{q_n}}\,D\right)^{p^k}\end{aligned}$$

mit

$$D = [T_1, T_2]^{(S_1T_1)^{r_1}(S_2T_2)^{q_1}} \cdots [T_1, T_2]^{(S_1T_1)^{r_n}(S_2T_2)^{q_n}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}F &= \left(\prod_{i=1}^{n} \left([S_1, S_2]^{(S_1T_1)^{r_i}(S_2T_2)^{q_i}}\,[T_1, T_2]^{(S_1T_1)^{r_i}(S_2T_2)^{q_i}}\right)\right)^{p^k}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \left([S_1, S_2]\,[T_1, T_2]\right)^{(S_1T_1)^{r_i}(S_2T_2)^{q_i}}\right)^{p^k}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} [S_1T_1, S_2T_2]^{(S_1T_1)^{r_i}(S_2T_2)^{q_i}}\right)^{p^k}\\ &\in \mho_k(\mathfrak{H}')\end{aligned}$$

und damit $\mho_k(\langle S_1, S_2\rangle') = \mho_k(\mathfrak{H}')$ wie behauptet.

Folgerung. 1. Das direkte Produkt einer k-regulären p-Gruppe mit einer abelschen p-Gruppe ist k-regulär.

2. Das direkte Produkt einer k-regulären p-Gruppe mit einer p-Gruppe vom Exponenten kleiner oder gleich p^k ist k-regulär.

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Satz 11.

Satz 12. *Sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ k-reguläre p-Gruppen und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, so sind die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_1))$ und $\mathfrak{G}/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_2))$ von $\mathfrak{G}$ k-regulär.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{G}/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_1)) \cong \mathfrak{G}_1/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_1)) \times \mathfrak{G}_2$. Also ist $\mathfrak{G}_1/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_1))$ eine k-reguläre p-Gruppe, deren Kommutatorgruppe höchstens den Exponenten p^k hat. Mit Satz 11 ist somit $\mathfrak{G}/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_1))$ k-regulär. Analog ist $\mathfrak{G}/\mho_k(Z_2(\mathfrak{G}_2))$ k-regulär.

Folgerung. Seien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ k-reguläre p-Gruppen sowie $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

1. $\mathfrak{G}_1 \times \Omega_k(\mathfrak{G}_2)$ und $\mathfrak{G}_2 \times \Omega_k(\mathfrak{G}_1)$ sind k-reguläre Normalteiler von $\mathfrak{G}$, denn $\Omega_k(\mathfrak{G}_2)$ und $\Omega_k(\mathfrak{G}_1)$ haben einen Exponenten kleiner oder gleich p^k.

2. Seien $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$. Dann sind $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{G}_2$ k-reguläre Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

3. Haben $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ die Klassen c_1 bzw. c_2, so sind $\mathfrak{G}_1 \times Z_{[c_2/2]+1}(\mathfrak{G}_2)$ und $Z_{[c_1/2]+1}(\mathfrak{G}_1) \times \mathfrak{G}_2$ k-reguläre Normalteiler von $\mathfrak{G}$, denn $Z_{[c_1/2]+1}(\mathfrak{G}_1)$ bzw. $Z_{[c_2/2]+1}(\mathfrak{G}_2)$ sind abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$.

LITERATUR

[1] BANNUSCHER, W.: Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen I. Beiträge zur Algebra und Geometrie *11* (1981), 51–63.

[2] GRÜN, O.: Über das direkte Produkt regulärer p-Gruppen. Arch. Math. *5* (1954), 241–243.

[3] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc. *36* (1933), 29–95.

[4] HALL, P.: On a theorem of Frobenius. Proc. London Math. Soc. *40* (1936), 468–507.

[5] HUPPERT, B.: Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1967.

Manuskripteingang: 15. 9. 1978

VERFASSER:

WOLFGANG BANNUSCHER, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock