Beiträge zur Algebra und Geometrie
12 (1982), 73–76

Abfaserbare teilweise geordnete Mengen

KONRAD DRECHSLER und WOLFGANG ZAHN

In [3] wird der klassische Begriff *Fahnenraum* dadurch verallgemeinert, daß die zugrunde liegende linear geordnete Menge durch eine teilweise geordnete Menge ersetzt wird. Es ergibt sich die Frage, in welcher Weise sich geometrische und topologische Eigenschaften des Fahnenraums in der teilweise geordneten Menge widerspiegeln. Mit dem hier zu definierenden Begriff der Faserbarkeit in der teilweise geordneten Menge erfaßt man Faserungen der Fahnenräume, die zur Entscheidung über Mannigfaltigkeitscharakter, Orientierbarkeit und Homologiegruppen der Fahnenräume führen.

1. Faserbarkeit

Es sei im folgenden $(M, \leqq)$ immer eine teilweise geordnete Menge[1]) mit kleinstem und größtem Element $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$.[2])

Definition 1. Es seien $(\overline{M}, \leqq)$ eine Teilmenge von M mit der induzierten Relation $\leqq$ und $u \in M \setminus \overline{M}$. Das Element u heißt ein *unterer Nachbar von* $\overline{M}$ in M, wenn es ein $\overline{m} \in \overline{M}$ gibt, so daß für alle $m \in M \setminus \overline{M}$

$$u \leqq \overline{m} \tag{1.1}$$

und

$$u \leqq m \leqq \overline{m} \Rightarrow m = u \tag{1.2}$$

gilt. Entsprechend ist ein *oberer Nachbar* o *von* $\overline{M}$ definiert.

Definition 2. Eine Teilmenge $\overline{M}$ von M heißt *faserbar in* $(M, \leqq)$, wenn $\mathbf{0} \in \overline{M}$, $\mathbf{1} \notin \overline{M}$ und $\overline{M}$ in $(M, \leqq)$ genau einen unteren und genau einen oberen Nachbarn besitzt.

Man überlegt sich leicht das

Lemma 1. *Es sei M endlich. Eine Teilmenge $\overline{M}$ von M ist genau dann faserbar, wenn es Elemente u und o aus $M \setminus \overline{M}$ gibt, so daß für alle $\overline{m} \in \overline{M}$ und $m \in M \setminus \overline{M}$ gilt*

$$u \leqq \overline{m}, \ \overline{m} \leqq o \tag{1.3}$$

und

$$m \leqq \overline{m} \Rightarrow m \leqq u, \ \overline{m} \leqq m \Rightarrow o \leqq m. \tag{1.4}$$

[1]) $\leqq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
[2]) boundet poset [5]

Für die Verwendung des Wortes *faserbar* gibt es folgendes Motiv aus der Topologie der Fahnenräume. Die teilweise geordnete Menge $(M, \leqq)$ sei endlich. Es sei $d: M \to N$ eine ordnungstreue Funktion in die natürlich geordnete Menge N der natürlichen Zahlen mit $d(0) = 0$ und $d(1) = n$.

Der Fahnenraum $F = F(M, \leqq, d, K)$ besteht aus den Elementen (g_i) des Produkts $\prod_{i \in M} G^i(n, d(i))$ von Graßmannmannigfaltigkeiten des affinen Raums K^n über dem Körper K, für die $g_i \subseteqq g_j$ gilt, wenn $i \leqq j$ ist.

Es seien $f: F \to \prod_{i \in M \setminus \overline{M}} G^i(n, d(i))$ die kanonische Projektion und K ein Körper mit einer Topologie. In [3] wird gezeigt, daß f dann eine lokaltriviale Faserung ist, wenn $\overline{M}$ in $(M, \leqq)$ faserbar ist.

2. Vollständig abfaserbare Mengen

In diesem Abschnitt sei $(M, \leqq)$ eine endliche teilweise geordnete Menge mit 0 und 1. Wir betrachten den Spezialfall, daß $\overline{M}$ nur aus einem Element $\overline{m}$ besteht.

Definition 3. Die teilweise geordnete Menge $(M, \leqq)$ heiße *vollständig abfaserbar*, wenn es eine Folge $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s$ aus M gibt derart, daß $\overline{m}_i$ faserbar in $(M \setminus \{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{i-1}\}, \leqq)$ für $i = 1, \ldots, s$ und $M \setminus \{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s\} = \{0, 1\}$ sind. Wir suchen Kriterien für diese Eigenschaft.

Satz 1. *Ist $(M, \leqq)$ vollständig abfaserbar, so ist $(M, \leqq)$ ein Verband.*

Beweis. Wäre $(M, \leqq)$ kein Verband, so gäbe es Elemente $r, s, p, q \in M$, wobei $q \leqq r$, $p \leqq r$, $q \leqq s$ $p \leqq s$ und r mit s und p mit q unvergleichbar sind (Abb. 1). Diese Elemente sind nicht faserbar.

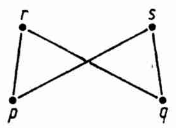

Abb. 1

Damit beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf endliche Verbände.

Wir vergleichen die Begriffe *faserbares Element* und *vollständig abfaserbar* mit den in [5] und [8] definierten Begriffen *doppelt irreduzibel* und *abtakelbar*.[1])

Definition 4. Ein Element $\overline{m}$ eines Verbandes M heißt *doppelt irreduzibel*, wenn es sich weder als Durchschnitt noch als Vereinigung von zwei von $\overline{m}$ verschiedenen Elementen aus M darstellen läßt.

Bemerkung 1. Es ist leicht zu sehen, daß ein Element $\overline{m} \neq 0, 1$ genau dann faserbar in $(M, \leqq)$ ist, wenn es doppelt irreduzibel in $(M, \leqq)$ ist.

Definition 5. Ein endlicher Verband $(M, \leqq)$ heißt *abtakelbar*[2]), wenn es eine Kette von Teilverbänden

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \cdots \supset M_2 \supset M_1 \tag{2.1}$$

gibt, wobei

$$M_{i-1} = M_i \setminus \{m_i\}, \qquad i = 2, \ldots, r, \quad \text{und} \quad M_1 = \{m_1\} \tag{2.2}$$

sind.

---

[1]) In [4] werden diese Begriffe auf teilweise geordnete Mengen verallgemeinert.

[2]) dismantlable

Bemerkung 2. Daß M_{i-1} Teilverband in M_i, also in bezug auf Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen ist, ist gleichbedeutend damit, daß m_i doppelt irreduzibles Element von M_i ist.

Satz 2. *Ein endlicher Verband* $(M, \leqq)$ *ist genau dann vollständig abfaserbar, wenn er abtakelbar ist.*

Beweis. Ist $(M, \leqq)$ vollständig abfaserbar, so gibt es eine Folge von faserbaren Elementen $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s$ aus M, die nach Bemerkung 1 doppelt irreduzibel sind. Nach Bemerkung 2 gibt es dann eine Kette von Teilverbänden, wie in Definition 5 gefordert wird.
Es sei $(M, \leqq)$ abtakelbar. Ist ein Verband abtakelbar, dann auch jeder Teilverband [8]. Dann ist $(M, \leqq)$ in der Weise abtakelbar, daß $M_2 = \{0, 1\}$ ist. Die Elemente m_i sind nach Bemerkung 2 doppelt irreduzibel und nach Bemerkung 1 faserbar.
Damit lassen sich die Ergebnisse aus [2] auf die Abfaserbarkeit übertragen.

Satz 3. *Jeder endliche planare Verband ist vollständig abfaserbar.*

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Dafür sind in [6, 8] Beispiele angegeben, die allerdings nicht distributive Verbände sind.

Satz 4. *Ein endlicher distributiver Verband ist genau dann vollständig abfaserbar, wenn er planar ist.*

In [2] wurde der Begriff der *Krone* definiert.

Definition 6. Eine *Krone* ist eine teilweise geordnete Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ der Ordnung $2n$, in welcher $x_i \leqq y_i$ für $i = 1, \ldots, n$, $y_i \geqq x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $x_1 \leqq y_n$ die einzigen in Relation stehenden Paare sind (Abb. 2).

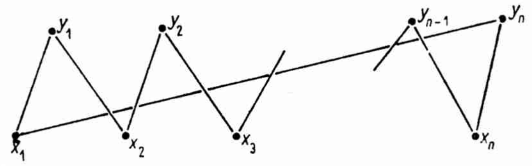

Abb. 2

Abbildung 1 stellt eine Krone der Ordnung 4 dar. Ein Verband enthält keine Krone der Ordnung 4. Aus [1, 6] folgt nun zunächst der

Satz 5. *Ein endlicher Verband ist genau dann vollständig abfaserbar, wenn er keine Kronen einer Ordnung* $2n$ $(n \geqq 3)$ *enthält.*

Durch Einbeziehung von Satz 1 ergibt sich der Satz 6. Eine endliche teilweise geordnete Menge mit 0 und 1 ist genau dann vollständig abfaserbar, wenn sie keine Krone enthält.
Dieser Satz wird in [4] mit der auf teilweise geordnete Mengen verallgemeinerten Abtakelbarkeit durch doppelt irreduzible Elemente formuliert und bewiesen.

Folgerung 1. Jeder Verband M der Ordnung $|M| \leqq 7$ ist vollständig abfaserbar.

Ist die teilweise geordnete Menge, die einem Fahnenraum zugrunde liegt, vollständig abfaserbar, so gibt es eine Folge von lokal-trivialen Faserungen des Fahnenraums, so daß jede Faser und der Basisraum der letzten Faserung Graßmannsche Mannigfaltigkeiten sind. Damit kann auf die topologische Struktur des Fahnenraums geschlossen werden. Zum Beispiel ist er dann eine Mannigfaltigkeit.

LITERATUR

[1] Ajtai, M.: On a class of finite lattices. Periodica Mathematica Hungarica *4* (1973), 217 to 220.
[2] Baker, K. A., P. C. Fishburn and F. S. Roberts: Partial orders of dimension 2, interval orders, and interval graphs. Rand. Corp. p-4376 (1970).
[3] Božek, M., und K. Drechsler: Zur Topologie der Fahnenräume: Definition und Fragestellungen. Math. Nachr. *99* (1980), 251—258.
[4] Duffus, D., and I. Rival: Crowns in dismantlable partially ordered sets. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai *18*. Combinatorics, Keszthely 1976.
[5] Grätzer, G.: General lattice theory. Akademie-Verlag, Berlin 1978.
[6] Kelly, D., and I. Rival: Crowns, fences, and dismantlable lattices. Canad. J. Math. *26* (1974), 1257—1271.
[7] Kelly, D., and I. Rival: Planar lattices, Canad. J. Math. *27* (1975), 636—665.
[8] Rival, I.: Lattices with doubly irreducible elements. Canad. Math. Bull. *17* (1974), 91—95.

Manuskripteingang: 6. 9. 1979

VERFASSER:

Konrad Drechsler und Wolfgang Zahn, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg