Beiträge zur Algebra und Geometrie
12 (1982), 51–55

Über interpolierbare Funktionen auf universalen Algebren

HANS KAISER und WILFRIED NÖBAUER

Herrn Professor N. HOFREITER zum 75. Geburtstag gewidmet

In der letzten Zeit wurden verschiedene Arbeiten (siehe etwa [1–5, 7, 8] der zitierten Literatur) publiziert, in denen Funktionen auf einer universalen Algebra A untersucht wurden, welche an einer vorgegebenen Anzahl t von Stellen durch Funktionen einer gegebenen Funktionenmenge $\boldsymbol{A}$ — vor allem durch Polynomfunktionen und Termfunktionen — interpoliert werden können. Solche Funktionen wurden als t-lokale $\boldsymbol{A}$-Funktionen bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Interpolation von Funktionen durch Elemente einer vorgegebenen Funktionenmenge $\boldsymbol{A}$ zunächst ganz allgemein formuliert. Es werden einige allgemeine Ergebnisse über lokale $\boldsymbol{A}$-Funktionen angegeben und sodann werden einige Beispiele von lokalen $\boldsymbol{A}$-Funktionen näher untersucht.
Es sei A eine universale Algebra und $F_k(A)$ die k-stellige Funktionenalgebra über A. Wir sagen, eine Funktion $\varphi \in F_k(A)$ wird auf einer Teilmenge M von A^k durch eine Funktion $\sigma \in F_k(A)$ interpoliert, wenn gilt: $\varphi(a) = \sigma(a)$ für alle $a \in M$. Es sei nun $\boldsymbol{A}$ eine Teilmenge von $F_k(A)$ und n eine Kardinalzahl. Mit $L_n\boldsymbol{A}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $\varphi \in F_k(A)$, welche auf jeder beliebigen Teilmenge M von A^k mit $|M| \leqq n$ (wo $|M|$ die Mächtigkeit von M bezeichnet) durch eine Funktion $\sigma \in \boldsymbol{A}$ interpoliert werden können (die Funktionen von $L_n\boldsymbol{A}$ nennt man auch n-lokale $\boldsymbol{A}$-Funktionen oder durch $\boldsymbol{A}$ n-interpolierbare Funktionen). Mit $\bar{L}_n\boldsymbol{A}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $\varphi \in F_k(A)$, welche auf jeder beliebigen Teilmenge M von A^k mit $|M| < n$ durch eine Funktion $\sigma \in \boldsymbol{A}$ interpoliert werden können (falls $n = \aleph_0$ ist, werden die Funktionen von $\bar{L}_n\boldsymbol{A}$ kurz als lokale $\boldsymbol{A}$-Funktionen bezeichnet).

B e m e r k u n g. n-lokale $\boldsymbol{A}$-Funktionen für den Fall von nicht endlichem n wurden erstmals in KOLLAR [5] betrachtet.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

(i) $\boldsymbol{A} \subset L_n\boldsymbol{A} \subset \bar{L}_n\boldsymbol{A}$

(ii) $L_0\boldsymbol{A} = \bar{L}_1\boldsymbol{A} = F_k(A)$

(iii) $L_{|A^k|}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

(iv) Ist $m < n$, dann gilt $\bar{L}_n\boldsymbol{A} \subset L_m\boldsymbol{A}$

(v) Ist $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{V}$, dann gilt $L_n\boldsymbol{A} \subset L_n\boldsymbol{V}$ und $\bar{L}_n\boldsymbol{A} \subset \bar{L}_n\boldsymbol{V}$.

Daß die iterierte Anwendung von L_n bzw. $\bar{L}_n$ nichts Neues ergibt, zeigt folgendes

Lemma. *Es gilt:*

$$L_m L_n A = \begin{cases} L_m A & \text{für } m \leqq n \\ L_n A & \text{für } m \geqq n \end{cases}$$

$$\bar{L}_m L_n A = \begin{cases} \bar{L}_m A & \text{für } m \leqq n \\ L_n A & \text{für } m > n \end{cases}$$

$$L_m \bar{L}_n A = \begin{cases} L_m A & \text{für } m < n \\ \bar{L}_n A & \text{für } m \geqq n \end{cases}$$

$$\bar{L}_m \bar{L}_n A = \begin{cases} \bar{L}_m A & \text{für } m \leqq n \\ \bar{L}_n A & \text{für } m \geqq n. \end{cases}$$

Beweis. Sei $m \leqq n$. Aus (i) und (v) folgt sofort $L_m L_n A \supset L_m A$. Ist umgekehrt $\varphi \in L_m L_n A$ und M Teilmenge von A^k mit $|M| \leqq m$, dann kann φ auf M durch $\tau \in L_n A$ interpoliert werden, und wegen $|M| \leqq n$ kann τ auf M durch ein $\sigma \in A$ interpoliert werden. Somit gilt $\varphi \in L_m A$. Sei $m \geqq n$, dann gilt $L_m L_n A \subset L_n A$ wegen (i), und umgekehrt folgt aus $\varphi \in L_m L_n A$ wie vorher $\varphi \in L_n A$. Somit ist die erste der obigen Behauptungen bewiesen. Der Beweis der übrigen Beziehungen verläuft analog.

Wegen (i) besteht folgende Kette von Mengen lokaler A-Funktionen:

$$L_0 A \supset \bar{L}_1 A \supset L_1 A \supset \bar{L}_2 A \supset L_2 A \supset \cdots \supset L_{|A^k|} A = A.$$

Von Interesse ist nun die Frage nach der ‚Länge' dieser Kette, d. h. nach dem ersten Glied, das mit A zusammenfällt (und allgemein die Frage, welche Glieder der Kette gleich sind — so gilt für endliches n stets $L_n A = \bar{L}_{n+1} A$). Für die Beantwortung dieser Frage ist folgende Definition zweckmäßig:

Definition. Eine Teilmenge $B \subset A^k$ heißt eine Funktionalbasis von A, wenn für je zwei Elemente φ, ψ von A aus $\varphi(b) = \psi(b)$ für alle $b \in B$ stets folgt: $\varphi = \psi$.

Lemma. *Besitzt A eine endliche Basis mit r Elementen, dann gilt $L_{r+1} A = A$. Besitzt A eine Basis der unendlichen Mächtigkeit n, dann gilt $L_n A = A$.*

Beweis. Es sei B eine endliche Basis von A mit r Elementen und $\varphi \in L_{r+1} A$. Falls $r \geqq |A^k|$, dann gilt $\varphi \in A$. Ist aber $B \subsetneqq A^k$ und gilt $a \notin B$, dann gibt es eine Funktion $\chi_a \in A$, so daß

$$\varphi \mid (B \cup \{a\}) = \chi_a \mid (B \cup \{a\})$$

(wobei allgemein $\varphi \mid M$ die Einschränkung von φ auf die Menge M bezeichnet). Ist $a_1 \neq a$, dann gilt $\chi_{a_1} \mid B = \chi_a \mid B$ und somit $\chi_{a_1} = \chi_a = \chi$, daher gilt $\varphi = \chi \in A$. Sei nun B eine Basis der unendlichen Mächtigkeit n und $\varphi \in L_n A$. Falls $n \geqq |A^k|$, dann gilt $\varphi \in A$. Ist aber $B \subsetneqq A^k$, dann kann man wegen $|B \cup \{a\}| = |B|$ wie vorher schließen.

Vom Standpunkt der Algebra ist folgender Satz von Interesse:

Satz. *Ist A eine Unteralgebra von $F_k(A)$, dann sind auch $L_n A$ und $\bar{L}_n A$ Unteralgebren von $F_k(A)$. Ist A abgeschlossen gegenüber der Komposition von Funktionen, dann sind dies auch $L_n A$ und $\bar{L}_n A$.*

Beweis. Es sei A Unteralgebra von $F_k(A)$. Ist ω eine nullstellige Operation von A, dann ist die konstante Funktion ω enthalten in A und somit auch in $L_n A$ und $\bar{L}_n A$. Ist ω eine r-stellige Operation und kann φ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ auf der Teilmenge $M \subset A^k$ interpoliert werden durch $\sigma_i \in A$, dann kann $\omega\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_r$ auf M interpoliert werden durch $\omega\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r \in A$. Sei nun A abgeschlossen bezüglich der Komposition von

Funktionen. Kann φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ auf M interpoliert werden durch $\sigma_i \in \boldsymbol{A}$ und kann φ auf der Menge $N = \{(\sigma_1(a), \ldots, \sigma_k(a)) \mid a \in M\}$ interpoliert werden durch $\sigma \in \boldsymbol{A}$, dann kann $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ auf M interpoliert werden durch $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in \boldsymbol{A}$.

Wir betrachten nun einige Beispiele für die von uns eingeführten allgemeinen Begriffsbildungen:

1. Sei A eine beliebige universale Algebra und $\boldsymbol{A} = \operatorname{End} A \subset F_1(A)$ die Endomorphismenhalbgruppe von A. Sei n das Maximum der Stelligkeiten der Operationen von A, dann gilt $L_{n+1} \operatorname{End} A = \operatorname{End} A$. Denn ist $\varphi \in L_{n+1} \operatorname{End} A$ und ω eine r-stellige Operation auf A und ist $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, r$, dann gibt es ein $\chi \in \operatorname{End} A$, welches φ in $a_1, a_2, \ldots, a_r, \omega a_1 a_2 \cdots a_r$ interpoliert. Folglich gilt $\varphi\omega a_1 a_2 \cdots a_r = \chi\omega a_1 a_2 \cdots a_r = \omega\chi a_1 \chi a_2 \cdots \chi a_r = \omega\varphi a_1 \varphi a_2 \cdots \varphi a_r$, d. h. $\varphi \in \operatorname{End} A$.

Wir werden in den folgenden Beispielen sehen, daß es Algebren mit $L_n \operatorname{End} A \supsetneqq \operatorname{End} A$ gibt.

Nun sei $\boldsymbol{A} = \operatorname{Aut} A \subset F_1(A)$ die Automorphismengruppe von A. Es gilt: Ist A endlich und $k \geqq 2$, dann folgt aus $L_k \operatorname{End} A = \operatorname{End} A$ stets $L_k \operatorname{Aut} A = \operatorname{Aut} A$. Denn da für $k \geqq 2$ alle Funktionen von $L_k \operatorname{Aut} A$ injektiv sind, gilt unter obigen Voraussetzungen, wenn $\operatorname{Sym} A$ die symmetrische Gruppe von A bezeichnet:

$$L_k \operatorname{Aut} A \subset L_k \operatorname{End} A \cap \operatorname{Sym} A = \operatorname{End} A \cap \operatorname{Sym} A = \operatorname{Aut} A.$$

Wir werden in den folgenden Beispielen sehen, daß die Umkehrung des soeben hergeleiteten Ergebnisses nicht richtig ist.

2. Es sei A eine Gruppe.

a) Zunächst sei $\boldsymbol{A} = \operatorname{Aut} A$. Besitzt A ein Erzeugendensystem mit r Elementen, so gilt $L_{r+1} \operatorname{Aut} A = \operatorname{Aut} A$, denn das Erzeugendensystem ist eine Funktionalbasis von $\operatorname{Aut} A$. Ist A endlich, dann gilt $L_3 \operatorname{Aut} A = \operatorname{Aut} A$ nach 1.; wie die folgenden Beispiele zeigen werden, gilt im allgemeinen aber $L_2 \operatorname{Aut} A \supsetneqq \operatorname{Aut} A$. Alle Funktionen $\varphi \in L_2 \operatorname{Aut} A$ sind aber injektiv und erfüllen die Gleichung $\varphi(a^m) = \varphi(a)^m$ für beliebige $a \in A$ und beliebiges ganzes m.

b) Es sei $\boldsymbol{A} = \operatorname{In} A$ die Gruppe der inneren Automorphismen von A. Besitzt die Faktorgruppe $A/Z(A)$ von A nach seinem Zentrum ein Erzeugendensystem aus g Elementen, dann gilt $L_{g+1} \operatorname{In} A = \operatorname{In} A$. Denn ein Vertretersystem für die Erzeugenden von $A/Z(A)$ ist eine Funktionalbasis für $\operatorname{In} A$. Ist A endlich, dann gilt wegen (v) und nach dem vorhergehenden $L_3 \operatorname{In} A \subset \operatorname{Aut} A$. Es ist eine offene Frage, ob es endliche Gruppen mit $L_3 \operatorname{In} A \supsetneqq \operatorname{In} A$ gibt. Wie man leicht erkennt, ist $L_1 \operatorname{In} A$ das direkte Produkt der symmetrischen Halbgruppen der Klassen konjugierter Elemente von A.

c) Es sei $\boldsymbol{A} = \operatorname{Reg} A$ die rechts- (bzw. links-) reguläre Darstellung von A. Es gilt dann $L_1 \operatorname{Reg} A = F_1(A)$ und $L_2 \operatorname{Reg} A = \operatorname{Reg} A$, denn das neutrale Element von A ist eine Funktionalbasis für $\operatorname{Reg} A$.

3. Es sei A die elementar-abelsche Gruppe der Ordnung p^k (p Primzahl). Es sind dann die Elemente von $\operatorname{End} A$ gerade die homomorphen Fortsetzungen jener Abbildungen, welche eine feste Basis von A in eine beliebige Teilmenge von A überführen und die Elemente von $\operatorname{Aut} A$ gerade die homomorphen Fortsetzungen jener Abbildungen, welche eine feste Basis von A wieder in eine Basis von A überführen. Somit gilt:

$$|\operatorname{End} A| = p^{k^2}$$

$$|\operatorname{Aut} A| = (p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \cdots (p^k - p^{k-1}).$$

Um L_2 End A und L_2 Aut A zu ermitteln, betrachten wir ein Vertretersystem $a_1, a_2, \ldots, a_m$ für die nichttrivialen zyklischen Untergruppen von A. Dabei ist die Anzahl dieser Untergruppen gegeben durch $m = (p^k - 1)/(p - 1)$. Man erhält nun alle Funktionen von L_2 End A, indem man das Einselement in das Einselement, jedes der a_i in irgendein Element von A überführt und die so erhaltene Abbildung zu einem Endomorphismus auf die von a_i erzeugte zyklische Untergruppe fortsetzt. Somit gilt:

$$|L_2 \operatorname{End} A| = p^{km}.$$

Es ist daher L_2 End A = End A genau dann, wenn $m = k$, also wenn $k = 1$. Die Elemente von L_2 Aut A sind die Permutationen unter den oben ermittelten Elementen von L_2 End A, denn jede Permutation von L_2 End A kann auf jeder zweielementigen Teilmenge von A durch ein Element von Aut A interpoliert werden.
Ist $\varphi \in L_2$Aut A, dann gilt: $\varphi(a_i) = a_{\pi i}^{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, wobei π eine eindeutig bestimmte Permutation aus Sym m (der symmetrischen Gruppe von m Elementen) ist und s_i ein Element der primen Restklassengruppe Π mod p ist. Die Zuordnung $\varphi \to (\pi; s_i)$ bildet L_2 Aut A bijektiv ab auf die Menge Sym $m \times \Pi^m$. Ist $\psi \to (\varrho; t_i)$, dann gilt:

$$\varphi\psi(a_i) = \varphi(\psi(a_i)) = \varphi(a_{\varrho i}^{t_i}) = a_{\pi\varrho i}^{s_{\varrho i} t_i},$$

d. h., es gilt

$$\varphi\psi \to (\pi\varrho; s_{\varrho i} t_i).$$

Dies zeigt, daß L_2 Aut A das Kranzprodukt der zyklischen Gruppe der Ordnung $p - 1$ mit Sym m ist.
Somit gilt:

$$\begin{aligned} |L_2 \operatorname{Aut} A| &= m!(p-1)^m \\ &= (p^k - 1)\big(p^k - 1 - (p-1)\big)\big(p^k - 1 - 2(p-1)\big)\cdots(p-1). \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit $|\operatorname{Aut} A|$, so erkennt man, daß $|L_2 \operatorname{Aut} A| = |\operatorname{Aut} A|$ genau dann, wenn $k = 1$ oder wenn $k = 2$ und $p = 2$ ist. In allen anderen Fällen gilt L_2 Aut $A \supsetneqq$ Aut A.

4. Es sei A ein kommutativer Ring mit Einselement und $A = \operatorname{Lin}_k A$ die Menge aller k-stelligen linearen Polynomfunktionen auf A. Da die Menge $\{0, 1\}$ eine Basis von $\operatorname{Lin}_1 A$ bildet, gilt $L_3 \operatorname{Lin}_1 A = \operatorname{Lin}_1 A$. Nun sei $\varphi \in L_4 \operatorname{Lin}_k A$, dann kann φ in $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$, $(a_1, \ldots, a_{k-1}, 0)$, $(0, \ldots, 0, a_k)$, $(0, \ldots, 0)$ durch ein Element von $\operatorname{Lin}_k A$ interpoliert werden, folglich gilt:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 0) + \varphi(0, \ldots, 0, a_k) - \varphi(0, \ldots, 0).$$

Durch $\varphi_1(a_1, \ldots, a_{k-1}) = \varphi(a_1, \ldots, a_{k-1}, 0)$ ist eine Funktion aus $L_4 \operatorname{Lin}_{k-1} A$ und durch $\varphi_2(a_k) = \varphi(0, \ldots, 0, a_k)$ ist eine Funktion aus $L_4 \operatorname{Lin}_1 A$ definiert. Ist also schon gezeigt, daß $L_4 \operatorname{Lin}_t A = \operatorname{Lin}_t A$ für alle $t < k$, dann folgt, daß $L_4 \operatorname{Lin}_k A = \operatorname{Lin}_k A$. Nach dem vorher Bewiesenen folgt die Richtigkeit dieser Gleichung für alle $k \in N$ nun mittels Induktion.
Daß aber im allgemeinen $L_2 \operatorname{Lin}_1 A$ echt $\operatorname{Lin}_1 A$ umfaßt, zeigt der Fall, in dem A ein Körper ist. Dann gilt nämlich $L_2 \operatorname{Lin}_1 A = F_1(A)$. Ist A der Körper der Ordnung 2,

dann gilt $L_3 \operatorname{Lin}_2 A = F_2 A$, und somit ist $\operatorname{Lin}_2 A$ echt in $L_3 \operatorname{Lin}_2 A$ enthalten, wie die folgende Wertetabelle der Funktionen von $\operatorname{Lin}_2 A$ zeigt:

	0	x	y	$x+y$	1	$x+1$	$y+1$	$x+y+1$
(0,0)	0	0	0	0	1	1	1	1
(0,1)	0	0	1	1	1	1	0	0
(1,0)	0	1	0	1	1	0	1	0
(1,1)	0	1	1	0	1	0	0	1

LITERATUR

[1] Dorninger, D., and W. Nöbauer: Local polynomial functions on lattices and universal algebras (to appear in Coll. Math.).

[2] Fried, E., H. K. Kaiser and L. Márki: Pattern functions and interpolation (Preprint 1978).

[3] Hule, H., and W. Nöbauer: Local polynomial functions on universal algebras. Ann. Acad. Brasil. Cienc. *49* (3), (1977), 365—372.

[4] Kaiser, H. K., and L. Márki: Remarks on a paper of L. Szabo and A. Szendrei (Preprint 1978).

[5] Kollár, J.: Interpolation in semigroups (Preprint 1978).

[6] Lausch, H., and W. Nöbauer: Algebra of Polynomials, North-Holland, Amsterdam 1973.

[7] Lausch, H., and W. Nöbauer: Local polynomial functions of factorrings on the integers (Preprint 1978).

[8] Wiesenbauer, J.: Interpolation on modules. Contr. General Algebra (1978), 399—404.

Manuskripteingang: 13. 6. 1979

VERFASSER:

Hans Kaiser und Wilfried Nöbauer, Institut für Algebra und Mathematische Strukturtheorie der Technischen Universität Wien, Österreich