Beiträge zur Algebra und Geometrie
11 (1981), 35–39

Der graduierte Ring bezüglich des Primideals von Macaulay

NGO VIET TRUNG

1. Es sei R der Polynomring $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, wobei k irgendein Körper ist, P sei das bekannte Primideal von MACAULAY in R, welches die allgemeine Nullstelle (t^4, t^3u, tu^3, u^4) bzw. die Basis

$$p_1 = X_1^2X_3 - X_2^3, \quad p_2 = X_1X_4 - X_2X_3, \quad p_3 = X_1X_3^2 - X_2^2X_4,$$
$$p_4 = X_2X_4^2 - X_3^3$$

hat. Bekanntlich ist P ein imperfektes Primideal (vgl. [1, S. 124]) bzw. der lokale Ring $R_{(X_1,X_2,X_3,X_4)}/(P)$ ein Buchsbaum-Ring (vgl. [6, S. 443]). Nun wollen wir in dieser Arbeit den graduierten Ring $\mathrm{gr}_P(R) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P^n/P^{n+1}$ ausrechnen und zeigen, daß $\mathrm{gr}_P(R)$ ein Cohen-Macaulay-Integritätsbereich ist (obwohl R/P kein Cohen-Macaulay-Ring ist!). Damit wird nach [2, Theor. 1E] gleichzeitig nachgewiesen, daß alle Potenzen von P Primärideale sind, und alle monoidalen Oberringe von R bezüglich P sind nach [3, Theor. 4.11.5] Cohen-Macaulay-Ringe. Ferner haben wir mit $\mathrm{gr}_P(R)$ ein Gegenbeispiel zu einer Frage von NAGATA in [5, Question 3].

2. Die Methode, die hier zur Berechnung von $\mathrm{gr}_P(R)$ benutzt wird, entnehmen wir [2, (2.3)].
Es seien Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 neue Unbestimmte über k. Durch die Zuordnung $Y_i \to \bar{p}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, wobei $\bar{p}_i$ das Bild von p_i in P/P^2 bezeichnet, erhalten wir einen surjektiven graduierten Ringhomomorphismus $\varphi\colon R[Y] = R[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] \to \mathrm{gr}_P(R)$.
Es seien

$$q_1 = X_3Y_1 - X_2^2Y_2 - X_1Y_3, q_2 = X_4Y_1 - X_1X_3Y_2 - X_2Y_3,$$
$$q_3 = X_2X_4Y_2 - X_3Y_3 - X_1Y_4, q_4 = X_3^2Y_2 - X_4Y_3 - X_2Y_4,$$
$$q_5 = Y_1Y_4 - X_2X_3Y_2^2 + Y_3^2.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $q_1, \ldots, q_5$ in $\ker\varphi$ enthalten sind. Es sei Q das Ideal $(P, q_1, \ldots, q_5)$ in $R[Y]$. Wir werden im folgenden sehen, daß $\ker\varphi = Q$ bzw. die folgende Proposition gilt:

Proposition 1. $\mathrm{gr}_P(R) \cong R[Y]/Q$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß $\mathrm{gr}_P(R) \otimes_R R_P$ ein regulärer Ring der Dimension 2 ist. Folglich besitzt $\ker\varphi$ eine prime Primärkomponente der Höhe 4. Da $Q \subseteq \ker\varphi$ gilt, genügt es zu zeigen, daß Q ein Primideal der Höhe 4 ist.

Es gilt zunächst

$$QR[Y, X_1^{-1}] = (p_1, p_2, q_1, q_3)\, R[Y, X_1^{-1}],$$
$$QR[Y, X_4^{-1}] = (p_2, p_4, q_2, q_4)\, R[Y, X^{-1}].$$

Hieraus ist leicht zu ersehen, daß $R[Y, X_1^{-1}]/(Q)$ bzw. $R[Y, X_4^{-1}]/(Q)$ isomorph dem Ring $k[X_1, X_2, Y_1, Y_2, X_1^{-1}]$ bzw. $k[X_3, X_4, Y_2, Y_4, X_4^{-1}]$ ist. Danach kann man zeigen, daß Q eine prime Primärkomponente der Höhe 4 besitzt, welche Y_2 nicht enthält, und daß alle anderen möglichen assoziierten Primoberideale von Q die Unbestimmten X_1 und X_4 enthalten müssen. Hierzu sei bemerkt, daß $\sqrt{(Q, X_1, X_4)} = (X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1 Y_4 + Y_3^2)$ ein Primideal ist. Folglich ist $\sqrt{Q} : Y_2 = \sqrt{Q}$. Nun braucht man nur noch zu zeigen, daß (Q, Y_2) ein Primideal ist. Denn danach hat man $\sqrt{Q} \subseteqq (Q, Y_2)$ bzw. $Q \subseteqq Q + Y_2\left(\sqrt{Q} : Y_2\right) = Q + Y_2 \sqrt{Q}$, und man kann aus der homogenen Form des Nakayama-Lemmas schließen (vgl. [4, (1. M)]), daß $Q = \sqrt{Q}$ gilt. Wäre ferner $(X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1 Y_4 + Y_3^2)$ ein minimales Primoberideal von Q, dann müßte $(X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1 Y_4 + Y_3^2, Y_2)$ nach [1, S. 182, Lemma] in (Q, Y_2) enthalten sein, was im Widerspruch zu $ht(Q, Y_2) = 5$ steht. Alles in allem ist Q also ein Primideal der Höhe 4.

Es sei $R = R[Y_1, Y_3, Y_4]$ und

$$q_1' = X_3 Y_1 - X_1 Y_3,\; q_2' = X_4 Y_1 - X_2 Y_3,\; q_3' = X_3 Y_3 + X_1 Y_4,$$
$$q_4' = X_4 Y_3 + X_2 Y_4,\; q_5' = Y_1 Y_4 + Y_3^2.$$

Wir bezeichnen mit Q' das Ideal $(P, q_1', \ldots, q_5')\, R'$. Wie man leicht sieht, ist $Q'R'[Y_1^{-1}] = (p_1, q_1', q_2', q_5')\, R'[Y_1^{-1}]$ ein Primideal. Um zu zeigen, daß (Q, Y_2) bzw. Q' ein Primideal ist, braucht man folglich nur noch nachzuweisen, daß Y_1 kein Nullteiler in R'/Q' ist. Angenommen, es gibt eine Relation

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + Dp_4 + Eq_1' + Fq_2' + Gq_3' + Hq_4' + Iq_5' = KY_1, \qquad (1)$$

wobei $A, \ldots, K$ Polynome aus R' sind, dann müssen wir zeigen, daß $K \in Q'$ gilt. Dazu können wir zuerst o. B. d. A. annehmen, daß Y_1 nicht in $A, \ldots, I$ auftritt und daß A, B, C, D in $(Y_3, Y_4)\, R'$ enthalten sind. (1) geht dann über in die folgenden Relationen:

$$EX_3 + FX_4 + IY_4 = K, \qquad (2)$$
$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + Dp_4 - EX_1 Y_3 - FX_2 Y_3 + Gq' + Hq' + IY^2 = 0. \qquad (3)$$

In der folgenden Tabelle geben wir einige Werte von $A, \ldots, K$ an, welche diese Relationen erfüllen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
Y_3	0	0	0	$X_1 X_3$	$-X_2^2$	0	0	0	p_3
Y_4	0	0	0	X_3^2	$-X_2 X_4$	$-X_1 X_3$	X_2^2	0	$-p_4$
0	Y_3	0	0	X_4	X_3	0	0	0	0
0	Y_4	0	0	0	0	$-X_4$	X_3	0	0
0	0	Y_3	0	X_3^2	$-X_2 X_4$	0	0	0	$-p_4$
0	0	Y_4	$-Y_3$	0	0	$-X_3^2$	$X_2 X_4$	0	0
0	0	0	Y_3^2	0	0	0	0	$-p_4$	$-p_4 Y_4$
0	0	0	0	Y_3	0	0	0	X_1	q_3'
0	0	0	0	0	Y_3	0	0	X_2	q_4'
0	0	0	0	Y_4	0	Y_3	0	$-X_3$	0
0	0	0	0	0	Y_4	0	Y_3	$-X_4$	0
0	0	0	0	$-X_2$	X_1	0	0	0	p_2
0	0	0	0	$-X_4$	X_3	$-X_2$	X_1	0	0

Nach dieser Tabelle können wir nun weiter annehmen, daß $A = B = C = 0$ (d. h., Y_3 und Y_4 treten in A, B, C nicht auf) und $D = D_1 + D_2 Y_3$ gilt, wobei D_1 und D_2 Polynome aus $R[Y_4]$ sind, und daß Y_3 bzw. X_1 nicht in E, F, G, H bzw. F, H enthalten ist. Danach erhalten wir aus (3) durch Koeffizientenvergleich bezüglich Y_3 die folgenden Relationen:

$$D_1 p_4 + GX_1Y_4 + HX_2Y_4 = 0, \tag{4}$$

$$D_2 p_4 - EX_1 - FX_2 + GX_3 + HX_4 = 0, \tag{5}$$

$$I = 0. \tag{6}$$

Aus (4) und (5) können wir durch Koeffizientenvergleich bezüglich X_1 leicht schließen, daß zuerst G und H und danach E und F durch p_4 teilbar sind. Somit ist K nach (2) und (6) auch durch p_4 teilbar. K ist also in Q' enthalten, q. e. d.

Proposition 2. $\mathrm{gr}_P(R)$ *ist ein Cohen-Macaulay-Integritätsbereich.*

Beweis. Nach dem Beweis von Proposition 1 wissen wir bereits, daß $\mathrm{gr}_P(R) \cong R[Y]/Q$ ein Integritätsbereich ist und daß $R[Y, X_1^{-1}]/(Q)$ und $R[Y, X_4^{-1}]/(Q)$ Cohen-Macaulay-Ringe sind. Um zu zeigen, daß $\mathrm{gr}_P(R)$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist, braucht man aber nach [3, Prop. 4.10] nur nachzuweisen, daß alle Lokalisierungen von $\mathrm{gr}_P(R)$ an den homogenen maximalen Primidealen Cohen-Macaulay-Ringe sind. Da $M = (X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ das einzige homogene maximale Primideal von $R[Y]/Q$ ist, welches (Q, X_1, X_4) enthält, bleibt also nur noch zu zeigen, daß $R[Y]_M/(Q)$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist. Dazu werden wir im folgenden sehen, daß Y_2, Y_3, $X_1 - X_4$, $Y_1 + Y_4 - X_1$ eine Primsequenz von $R[Y]/Q$ in M ist. Zunächst ist Y_2 bzw. Y_3 nach dem Beweis von Proposition 1 bereits relativ prim zu Q bzw. zu (Q, Y_2). Ferner ist auch leicht zu sehen, daß

$$(Q, Y_2, Y_3) = (P, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \cap (X_1, X_2, X_3^2, Y_1, Y_2, Y_3) \cap (X_2^2, X_3, X_4, Y_2, Y_3, Y_4)$$

gilt und $X_1 - X_4$ somit relativ prim zu (Q, Y_2, Y_3) ist. Nun sei $Z = Y_1 + Y_4 - X_1$. Z ist relativ prim zu $(Q, Y_2, Y_3, X_1 - X_4)$ genau dann, wenn Z relativ prim zu $Q \cap k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Z]$ ist. Angenommen, es gibt eine Relation

$$\begin{aligned} &Ap_1 + B(X_1^2 - X_2X_3) + CX_1(X_3^2 - X_2^2) + D(X_1^2X_2 - X_3^3) \\ &+ EX_3Y_1 + FX_1Y_1 + GX_1(Z - Y_1 + X_1) + HX_2(Z - Y_1 + X_1) \\ &+ IY_1(Z - Y_1 + X_1) = KZ, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei $A, \ldots, K$ Polynome aus $k[X_1, X_2, X_3, Y_1, Z]$ sind. Wir müssen zeigen, daß $K \in \big(p_1, X_1^2 - X_2X_3, X_1(X_3^2 - X_2^2), X_1^2X_2 - X_3^3, X_3Y_1, X_1Y_1, X_1(Z - Y_1 + X_1), X_2(Z - Y_1 + X_1), Y_1(Z - Y_1 + X_1)\big)$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir zuerst annehmen, daß Z nicht in $A, \ldots, I$ auftritt. Dann zerfällt (1) in die folgenden Relationen:

$$GX_1 + HX_2 + IY_1 = K, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &Ap_1 + B(X_1^2 - X_2X_3) + CX_1(X_3^2 - X_2^2) + D(X_1^2X_2 - X_3^3) \\ &+ EX_3Y_1 + FX_1Y_1 - GX_1(Y_1 - X_1) - HX_2(Y_1 - X_1) \\ &- IY_1(Y_1 - X_1) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

In der folgenden Tabelle geben wir einige Werte von $A, \ldots, K$ an, welche diese Relationen erfüllen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
Y_1-X_1	0	0	0	0	0	$-X_1X_3$	X_2^2	0	p_1
0	Y_1	0	0	X_2	$-X_1$	0	0	0	0
0	0	Y_1	0	$-X_1X_3$	X_2^2	0	0	0	0
0	0	0	Y_1	$X_1X_3^2$	$-X_1^2X_2$	0	0	0	0
0	0	0	0	Y_1-X_1	0	0	0	$-X_3$	$-X_3Y_1$
0	0	0	0	0	Y_1-X_1	0	0	$-X_1$	$-X_1Y_1$
0	0	0	0	0	0	Y_1	0	$-X_1$	0
0	0	0	0	0	0	0	Y_1	$-X_2$	0
X_1	$-X_1X_3$	$-X_2$	0	0	0	0	0	0	0
0	X_1	0	0	X_2	$-X_1$	$-X_1$	X_3	0	$-X_1^2 + X_2X_3$
$-X_3$	X_2^2	X_1	0	0	0	0	0	0	0
0	$-X_1X_2$	X_3	X_1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	X_1	$-X_3$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-X_2$	X_1	0	0
0	$-X_3^2$	X_1	X_2	0	0	0	0	0	0

Nach dieser Tabelle können wir weiter annehmen, daß Y_1 bzw. X_1 bzw. X_2 nicht in $A, \ldots, H$ bzw. $A, \ldots, E, H$ bzw. D auftritt. Danach ergeben sich aus (9) durch Koeffizientenvergleich bezüglich Y_1 folgende Relationen:

$$Ap_1 + B(X_1^2 - X_2X_3) + CX_1(X_3^2 - X_2^2) + D(X_1^2X_2 - X_3^3) + GX_1^2 + HX_1X_2 = 0, \tag{10}$$

$$EX_3 + FX_1 - GX_1 - HX_2 = 0, \tag{11}$$

$$I = 0. \tag{12}$$

Aus (10) und (11) ergeben sich weiter durch Koeffizientenvergleich bezüglich X_1

$$AX_2^3 + BX_2X_3 + DX_3^3 = 0, \tag{13}$$

$$AX_3 + B + DX_2 + G = 0, \tag{14}$$

$$C(X_3^2 - X_2^2) + HX_2 = 0, \tag{15}$$

$$EX_3 - HX_2 = 0. \tag{16}$$

Nun können wir aus (13) durch Koeffizientenvergleich bezüglich X_2 zeigen, daß $AX_2^2 + BX_3 = 0$ und $D = 0$ gilt. Hieraus und aus (14) ist dann leicht zu sehen, daß GX durch $X_1(X_3^2 - X_2^2)$ teilbar ist. Ferner können wir aus (15) und (16) auch zeigen, daß HX_2 durch $X_2X_3(X_3^2 - X_2^2)$ teilbar ist. Somit muß K nach (8) und (11) in $\left(X_1^2 - X_2X_3, X_1(X_3^2 - X_2^2)\right)$ enthalten sein, q. e. d.

Bemerkung. $Y_1 + Y_4 - X_1$ ist kein homogenes Element in $R[Y]$, und man kann überhaupt keine homogene Primsequenz der maximalen Länge 4 in $R[Y]/(Q)$ finden. Denn allgemein gilt folgendes: Es sei S ein Noetherscher Ring und A ein Ideal in S, so daß $\mathrm{gr}_A(S)$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist. Wenn $\mathrm{gr}_A(S)$ eine homogene Primsequenz der maximalen Länge ($\dim S$) enthält, dann ist S/A ein Cohen-Macaulay-Ring. Dies kann man leicht durch Induktion nach $\dim S/A$ zeigen, und wir überlassen dem Leser den Beweis dafür.

LITERATUR

[1] GRÖBNER, W.: Algebraische Geometrie II, Mannheim—Wien—Zürich 1970.
[2] HOCHSTER, M.: Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes, Math. Z. **133** (1973), 53—65.
[3] HOCHSTER, M., and L. J. RATLIFF Jr.: Five theorems on Macaulay-rings, Pacific J. Math. **44** (1973), 147—172.
[4] MATSUMURA, H.: Commutative Algebra, New York 1970.
[5] NAGATA, M.: Some questions on Cohen-Macaulay-rings, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1972), 123—128.
[6] STÜCKRAD, J., und W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum-Singularitäten, Monatsh. Math. **78** (1974), 433—445.

Manuskripteingang: 18. 5. 1978

VERFASSER:

NGO VIET TRUNG, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Halle—Wittenberg