Beiträge zur Algebra und Geometrie
*11* (1981), 133–144

# Involutionen in halbeinfachen Algebren

WOLFGANG MAHRHOLD und KURT ROSENBAUM

## 1. Einleitung

Es sei $\Lambda$ eine Algebra über einem Körper $K$. Als Involution $*$ in $\Lambda$ bezeichnen wir eine eineindeutige Abbildung von $\Lambda$ auf sich mit folgenden Eigenschaften:

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$ für alle $x, y \in \Lambda$,
2. $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$ für alle $x, y \in \Lambda$,
3. $(x^*)^* = x$ für alle $x \in \Lambda$,
4. $(\alpha x)^* = \alpha x^*$ für alle $\alpha \in K$ und $x \in \Lambda$.

Fordert man nur die Eigenschaften 1 bis 3, so kann man allgemeiner auch Ringe mit Involutionen betrachten. Eine Übersicht über die Ergebnisse dieser Theorie liefert die Monographie [1] von I. HERSTEIN. Es ist im allgemeinen nicht bekannt, wie alle Involutionen in einer Algebra aussehen.
In dieser Arbeit können wir folgende zwei Aufgaben lösen: Erstens geben wir eine Übersicht über alle Involutionen in einer endlichdimensionalen halbeinfachen Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K$. Dabei ist entscheidend, daß jede Involution $*$ in $\Lambda$ die nach R. KOCHENDÖRFFER [5] eindeutig bestimmten orthogonalen Idempotente $c_1, c_2, \ldots, c_r$ in der direkten Zerlegung

$$\Lambda = c_1\Lambda \oplus c_2\Lambda \oplus \cdots \oplus c_r\Lambda \tag{1}$$

von der Ordnung 2 permutiert und umgekehrt.
Ähnliche Gedanken sind schon bei HOEHNKE [2] konzipiert. Zweitens verallgemeinern wir ein in [3] für Standardinvolutionen formuliertes und in [7] auf beliebige Involutionen in halbeinfachen Gruppenalgebren erweitertes Ergebnis über das symplektische Verhalten eines absolut irreduziblen Darstellungsmoduls für $\Lambda$.
Unter einem *symplektischen Modul* verstehen wir ein Tripel $(M, *, \Phi)$ aus einem Darstellungsmodul $M$ für $\Lambda$, einer Involution $*$ in $\Lambda$ und einer nicht ausgearteten, schiefsymmetrischen $K$-Bilinearform

$$\Phi: M \times M \to K$$

in $M$, die bezüglich $*$ $\Lambda$-invariant ist, d. h. der Bedingung

$$\Phi(ax, b) = \Phi(a, bx^*)$$

für alle $a, b \in M$ und $x \in \Lambda$ genügt.

Für die Formulierung unseres Resultates ist es wesentlich, daß es zu jeder Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ von $\Lambda$ eine eindeutig bestimmte bezüglich der Spur SP der rechtsregulären Darstellung von $\Lambda$ duale Basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ von $\Lambda$ gibt mit der Eigenschaft

$$\mathrm{SP}\,(e_j b_k) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = k, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Unser Hauptergebnis ist nun das folgende Kriterium: Ist $M \subseteqq c_i\Lambda$ ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für $\Lambda$, $\chi$ der Charakter der zu $M$ gehörenden Darstellung von $\Lambda$, $*$ eine Involution in $\Lambda$ und $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ ein Paar zueinander dualer Basen, so gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \chi(e_j b_j^*) = \begin{cases} -1, \\ +1, \\ \phantom{+}0, \end{cases}$$

je nachdem, ob:

1. $c_i^* = c_i$ ist und $M$ sich bezüglich $*$ zu einem symplektischen Modul machen läßt,
2. $c_i^* = c_i$ ist und $M$ nur die Einführung einer nicht ausgearteten, symmetrischen bezüglich $*$ $\Lambda$-invarianten Bilinearform gestattet,
3. $c_i^* \neq c_i$ ist. In diesem Fall läßt sich in $M$ weder eine symmetrische noch eine schiefsymmetrische nicht ausgeartete und bezüglich $*$ auch $\Lambda$-invariante Bilinearform einführen.

## 2. Involutionen in $\Lambda$

In Analogie zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen können wir die halbeinfache Algebra $\Lambda$ als Darstellungsmodul für die reguläre Darstellung von $\Lambda$ betrachten. Jedes minimale zweiseitige Ideal $c_i\Lambda$ der Zerlegung (1) ist eine Primärkomponente und zerfällt seinerseits in die direkte Summe von zueinander isomorphen minimalen Rechtsidealen, den absolut irreduziblen Darstellungsmoduln für $\Lambda$. Nach dem Satz von Wedderburn ist jede dieser Primärkomponenten $c_i\Lambda$ isomorph zu einer vollen Matrizenalgebra. Diese Matrizen können wir mit der zu einem absolut irreduziblen Darstellungsmodul von $c_i\Lambda$ gehörenden absolut irreduziblen Darstellung von $\Lambda$ identifizieren, falls der Körper $K$ algebraisch abgeschlossen ist.

### *2.1. Konjugiertheit bezüglich einer Involution*

Ist $M$ ein Darstellungsmodul für $\Lambda$ und $*$ eine Involution in $\Lambda$, so wird nach [4] der konjugierte Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ zum Darstellungsmodul für $\Lambda$ vermöge

$$(hx)\,(a) = h(ax^*) \tag{2}$$

für alle $h \in \mathrm{Hom}_K(M, K)$, $a \in M$ und $x \in \Lambda$. Ist $x \mapsto A_x$ die zu $M$ gehörende Darstellung von $\Lambda$, die wir in einer festen als Spaltenvektor

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

geschriebenen Basis von $M$ in der Form

$$\mathfrak{e}x = A_x\mathfrak{e}$$

angeben können, so bekommen wir die zum bezüglich der Involution $*$ konjugierten Darstellungsmodul $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ in der Basis

$$\bar{\mathfrak{e}} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \bar{e}_i(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases} \tag{3}$$

gehörende Darstellung aus der Betrachtung des formalen Matrizenproduktes $(\bar{\mathfrak{e}}x, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}})$. Einerseits ist nämlich

$$(\bar{\mathfrak{e}}x, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}}) = (\bar{A}_x\bar{\mathfrak{e}}, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}}) = \bar{A}_x(\bar{\mathfrak{e}}, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}}) = \bar{A}_x,$$

denn $(\bar{\mathfrak{e}}, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}})$ ist nach (3) gleich der Einheitsmatrix $E$. Andererseits ist wegen $(\bar{e}_i x)(e_k) = \bar{e}_i(e_k x^*)$ offenbar

$$(\bar{\mathfrak{e}}x, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}}) = \big(\bar{\mathfrak{e}}, (\mathfrak{e}x^*)^{\mathsf{T}}\big) = (\bar{\mathfrak{e}}, \mathfrak{e}^{\mathsf{T}})\, A_{x^*}^{\mathsf{T}}.$$

Hieraus folgt, daß die zu $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ gehörende Darstellung von $\Lambda$ gegeben ist durch

$$x \mapsto A_{x^*}^{\mathsf{T}}.$$

Sie heißt die zu $x \mapsto A_x$ bezüglich $*$ *konjugierte Darstellung* von $\Lambda$.
Weiter erklären wir:

Ein Darstellungsmodul $M$ für $\Lambda$ heißt bezüglich einer Involution $*$ in $\Lambda$ *selbstkonjugiert*, wenn er $\Lambda$-isomorph ist zu seinem bezüglich $*$ konjugierten Darstellungsmodul $\mathrm{Hom}_K(M, K)$.

Für weitere Rechnungen ist folgende Umformulierung dieser Definition in die Matrizenschreibweise vorteilhaft. Es seien $x \mapsto A_x$ und $x \mapsto A_{x^*}^{\mathsf{T}}$ die zu $M$ bzw. zu $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ gehörenden Darstellungen. $M$ ist genau dann bezüglich $*$ selbstkonjugiert, wenn es eine reguläre quadratische Matrix $C$ gibt, so daß

$$A_x C = C A_{x^*}^{\mathsf{T}}$$

gilt für alle $x \in \Lambda$. Besonders wichtig ist der Fall, daß $M$ ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für $\Lambda$ ist.

Satz 1. *Ist $M$ ein absolut irreduzibler bezüglich einer Involution $*$ in $\Lambda$ selbstkonjugierter Darstellungsmodul für $\Lambda$, so ist die reguläre quadratische Matrix $C$ in*

$$A_x C = C A_{x^*}^{\mathsf{T}}$$

*entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch und bis auf ein skalares Vielfaches $\alpha \neq 0$ aus $K$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Aus $A_x C = C A_{x^*}^{\mathsf{T}}$ für alle $x \in \Lambda$ folgt wegen $A_{x^*} C = C A_x^{\mathsf{T}}$, also $C^{-1} A_{x^*} = A_x^{\mathsf{T}} C^{-1}$ sofort

$$A_x C (C^{\mathsf{T}})^{-1} = C A_{x^*}^{\mathsf{T}} (C^{\mathsf{T}})^{-1} = C (C^{-1} A_{x^*})^{\mathsf{T}} = C (C^{\mathsf{T}})^{-1} A_x$$

für alle $x \in \Lambda$. Nach dem Lemma von Schur ist dann

$$C (C^{\mathsf{T}})^{-1} = \alpha E$$

eine Skalarmatrix mit $\alpha \neq 0$ aus $K$. Das bedeutet aber $\alpha = \pm 1$, also $C^{\mathsf{T}} = C$ oder $C^{\mathsf{T}} = -C$. Analog sieht man, daß $C$ bis auf ein skalares Vielfaches aus $K$ eindeutig bestimmt ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Jede Involution $*$ in $\Lambda$ wird durch ihre Wirkung auf die Primärkomponenten der Zerlegung (1) beschrieben durch

**Satz 2.** *Jede Involution $*$ von $\Lambda = c_1\Lambda \oplus c_2\Lambda \oplus \cdots \oplus c_r\Lambda$ permutiert die orthogonalen Idempotente $c_1, c_2, \ldots, c_r$ von der Ordnung 2. Insbesondere besteht die Isomorphie*

$$c_i^*\Lambda \cong \mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K).$$

**Beweis.** Da jede Involution $*$ in $\Lambda$ die Elemente des Körpers $K$ festläßt, bleiben insbesondere das Nullelement 0 und das Einselement 1 bei $*$ ungeändert.
Ist $c_i\Lambda$ eine Primärkomponente von $\Lambda$, so ist auch

$$(c_i\Lambda)^* = \{x^* : x \in c_i\Lambda\} \supseteqq c_i^*\Lambda$$

eine Primärkomponente von $\Lambda$, denn wegen der Linearität der Involution $*$ ist mit $c_i\Lambda$ auch $(c_i\Lambda)^*$ ein Unterraum von $\Lambda$. Darüber hinaus ist für alle $x^* \in (c_i\Lambda)^*$ und $y \in \Lambda$ auch

$$x^*y = (y^*x)^* \in (c_i\Lambda)^*, \quad \text{da } y^*x \in c_i\Lambda,$$

und

$$yx^* = (xy^*)^* \in (x_i\Lambda)^*, \quad \text{da } xy^* \in c_i\Lambda.$$

Damit ist $(c_i\Lambda)^*$ ein zweiseitiges Ideal, und aus der Minimalität von $c_i\Lambda$ folgt die von $(c_i\Lambda)^*$. Insbesondere ist $(c_i\Lambda)^* = c_i^*\Lambda$.
Wir zeigen nun den zweiten Teil der Behauptung. Da $c_i\Lambda$ eine Primärkomponente von $\Lambda$ ist, ist auch $\mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K)$ $\Lambda$-isomorph zu einer Primärkomponente $c_k\Lambda$:

$$\varphi : c_k\Lambda \cong \mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K).$$

Dabei wird das Idempotent $c_k$ auf einen $K$-Homomorphismus $h \neq 0$ aus $\mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K)$ abgebildet. Wäre nämlich $\varphi(c_k) = 0$ der Nullhomomorphismus, so wäre, da $\varphi$ ein $\Lambda$-Isomorphismus ist, auch $\varphi(c_kx) = \varphi(c_k) \cdot x = 0$ für alle $x \in \Lambda$, was nicht sein kann.
Das Idempotent $c_k$ operiert trivial auf $\varphi(c_k) = h$, d. h. $hc_k = h$, denn wegen $c_k \cdot c_k = c_k$ ist einerseits $\varphi(c_k \cdot c_k) = \varphi(c_k) = h$, und wegen der $\Lambda$-Isomorphie $c_k\Lambda \cong \mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K)$ ist andererseits $\varphi(c_k \cdot c_k) = \varphi(c_k)\, c_k = hc_k$. Hierbei haben wir $c_k \in \Lambda$ als Operator aufgefaßt.
Hiermit läßt sich nun leicht zeigen, daß $c_k = c_i^*$ ist. Wäre nämlich $c_k \neq c_i^*$, so wäre wegen (2) und $c_i \neq c_k^*$

$$h(c_ix) = hc_k(c_ix) = h(c_ixc_k^*) = h(c_ic_k^*x) = h(0x) = 0$$

für alle $x \in \Lambda$, d. h., $h$ wäre der Nullhomomorphismus, was nicht sein kann. Hierbei haben wir verwendet, daß die orthogonalen Idempotente $c_i$ und $c_k$ im Zentrum von $\Lambda$ liegen. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Nach diesem Ergebnis sind bei einer gegebenen Involution $*$ in $\Lambda$ grundsätzlich zwei Arten von Primärkomponenten möglich, nämlich:

1. $(c_i\Lambda)^* = c_i^*\Lambda = c_i\Lambda$. In diesem Fall ist $c_i^* = c_i$, und die Primärkomponente $c_i\Lambda$ ist bezüglich der Involution $*$ selbstkonjugiert.

2. $(c_i\Lambda)^* = c_i^*\Lambda = c_k\Lambda$ mit $c_i^* = c_k \neq c_i$. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn der $\Lambda$-Isomorphismus $c_k\Lambda \cong \mathrm{Hom}_K(c_i\Lambda, K)$ besteht. Dann ist auch $c_i\Lambda \cong \mathrm{Hom}_K(c_k\Lambda, K)$, und wir nennen die Primärkomponenten $c_i\Lambda$ und $c_k\Lambda$ bezüglich der Involution $*$ *zueinander konjugiert*.

Eine weitere Konsequenz aus Satz 2 ist

**Folgerung 1.** Die halbeinfache Algebra $\Lambda$ ist bezüglich jeder Involution $*$ in $\Lambda$ selbstkonjugiert.

Nach dieser groben Beschreibung einer Involution $*$ in einer halbeinfachen Algebra $\Lambda$ interessieren wir uns nun dafür, wie $*$ im Inneren jeder Primärkomponente wirkt.

### 2.2. *Involutionen in einer Primärkomponente*

Es sei $c_i\Lambda$ eine Primärkomponente mit $c_i^* = c_i$. Da $c_i\Lambda$ isomorph ist zu einer vollen Matrizenalgebra $M(n, K)$, genügt es, alle Involutionen in $M(n, K)$ zu bestimmen. Dabei identifizieren wir die Matrizen $X \in M(n, K)$ mit den Darstellungsmatrizen, die zu jeder der $n$ absolut irreduzibeln Darstellungen von $\Lambda$ gehören, deren Darstellungsmoduln in $c_i\Lambda$ liegen.

Satz 3. *Jede Involution* $*$ *in* $c_i\Lambda = M(n, K)$ *wirkt gemäß*

$$X \mapsto X^* = CX^{\mathsf{T}}C^{-1} \tag{4}$$

*mit einer regulären symmetrischen oder schiefsymmetrischen Matrix* $C$. *Umgekehrt ist auch jede solche Abbildung eine Involution in* $c_i\Lambda$.

Der Beweis erfolgt in mehreren Etappen:

1. Jeder Automorphismus von $M(n, K)$ wird beschrieben durch
$$X \mapsto CXC^{-1}$$
mit einer regulären quadratischen Matrix $C \in M(n, K)$ und umgekehrt.
2. Die Abbildung $X \mapsto X^{\mathsf{T}}$ ist ein Antiautomorphismus zweiter Ordnung von $M(n, K)$.
3. Ist $\varphi_0$ ein fester Antiautomorphismus von $M(n, K)$ und durchläuft $\bar{\varphi}$ die Menge aller Automorphismen von $M(n, K)$, so durchläuft $\varphi = \bar{\varphi} \cdot \varphi_0$ die Menge aller Antiautomorphismen von $M(n, K)$.
4. Ein Antiautomorphismus
$$\bar{\varphi}\colon X \mapsto CX^{\mathsf{T}}C^{-1}$$
mit einer regulären quadratischen Matrix $C \in M(n, K)$ ist genau dann eine Involution, wenn $C^{\mathsf{T}} = \pm C$ ist.

Wir zeigen nun die einzelnen Teilbehauptungen.

1. Jeder Automorphismus $\bar{\varphi}$ von $M(n, K)$ ist eine treue Darstellung von $M(n, K)$ und als solche äquivalent zu der identischen Abbildung $d\colon X \mapsto X$. Folglich gibt es eine reguläre quadratische Matrix $C$ mit

$$\bar{\varphi}(X)\, C = CX$$

für alle $X \in M(n, K)$. Umgekehrt definiert auch jede solche Matrix $C$ einen Automorphismus von $M(n, K)$. Aus dem Lemma von Schur folgt, daß zwei reguläre quadratische Matrizen $C_1$ und $C_2$ genau dann denselben Automorphismus erklären, wenn $C_1 = \alpha C_2$ ist mit $\alpha \neq 0$ aus $K$.
Damit entsprechen sich die Automorphismen von $M(n, K)$ und die Elemente von $GL(n, K)/Z(n, K)$ eineindeutig. Dabei bedeutet $Z(n, K)$ das Zentrum der vollen linearen Gruppe $GL(n, K)$.

2. Die Behauptung ist klar, denn es ist

$$(X_1X_2)^{\mathsf{T}} = X_2^{\mathsf{T}}X_1^{\mathsf{T}} \quad \text{und} \quad (X^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = X$$

für alle $X_1, X_2, X \in M(n, K)$.

3. Ist $\varphi_0$ ein fester und $\varphi$ ein beliebiger Antiautomorphismus, so ist $\bar{\varphi} = \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}$ ein Automorphismus von $M(n, K)$. Hieraus folgt die Behauptung.

4. Aus 1., 2., und 3. folgt, daß alle Antiautomorphismen von $M(n, K)$ gegeben sind durch

$$\bar{\varphi}\colon X \mapsto CX^{\mathsf{T}}C^{-1},$$

wenn nur die reguläre quadratische Matrix $C$ ganz $GL(n, K)/Z(n, K)$ durchläuft.

Ist nun $C^{\mathsf{T}} = \pm C$, so gilt neben den Eigenschaften 1, 2 und 4 für eine Involution auch noch Eigenschaft 3:

$$(\bar{\varphi})^2 (X) = C[CX^{\mathsf{T}}C^{-1}]^{\mathsf{T}} C^{-1} = X,$$

d. h., $\bar{\varphi}$ ist eine Involution in $M(n, K)$.
Umgekehrt sei $\bar{\varphi} = *$ eine Involution in $M(n, K)$. Da die Darstellung $d: X \mapsto X$ bezüglich $*$ selbstkonjugiert ist, ist die reguläre quadratische Matrix $C'$ in

$$XC' = C'(X^*)^{\mathsf{T}}$$

für alle $X \in M(n, K)$ nach Satz 1 entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch und bis auf ein skalares Vielfaches $\alpha \neq 0$ aus $K$ eindeutig bestimmt. Dann ist für $C = C'^{\mathsf{T}}$

$$X^* = CX^{\mathsf{T}}C^{-1}.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

*2.3. Involutionen, die zwei Primärkomponenten miteinander vertauschen*

Es seien $c_i\Lambda$ und $c_k\Lambda$ zwei Primärkomponenten von $\Lambda$, die als einfache Algebren zueinander isomorph, also vom selben Rang $n^2$, und als $\Lambda$-Moduln bezüglich der Involution $*$ zueinander konjugiert sind. Um einen Überblick über alle Involutionen in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$ zu bekommen, genügt bereits die Kenntnis aller Antiautomorphismen in einer der beiden Primärkomponenten.

Satz 4. *Jede Involution $*$ in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda = M_i(n, K) \oplus M_k(n, k)$ wirkt gemäß*

$$X \mapsto X^* = \begin{cases} CX^{\mathsf{T}}C^{-1} \in M_k(n, K) & \text{für} \quad X \in M_i(n, K), \\ C^{\mathsf{T}}X^{\mathsf{T}}(C^{\mathsf{T}})^{-1} \in M_i(n, K) & \text{für} \quad X \in M_k(n, K) \end{cases} \tag{5}$$

*mit einer regulären Matrix $C$ und umgekehrt.*

Der Beweis erfolgt unter Verwendung der Teile 1, 2 und 3 aus dem Beweis des Satzes 3 in zwei Schritten:

1. Ist $\psi_0$ ein fester Ringisomorphismus

$$\psi_0: c_i\Lambda \to c_k\Lambda$$

und durchläuft $\varphi$ die Menge aller Antiautomorphismen von $c_i\Lambda$, so ist jede Abbildung $*$ gemäß

$$x \mapsto x^* = \begin{cases} (\psi_0 \circ \varphi)(x) & \text{für} \quad x \in c_i\Lambda, \\ (\varphi^{-1} \circ \psi_0^{-1})(x) & \text{für} \quad x \in c_k\Lambda \end{cases} \tag{6}$$

eine Involution in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$, die beide Primärkomponenten miteinander vertauscht.

2. Ist umgekehrt $*$ eine beliebige Involution in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$, die beide Primärkomponenten miteinander vertauscht, und $\psi_0$ ein fester Ringisomorphismus

$$\psi_0: c_i\Lambda \to c_k\Lambda,$$

so gibt es einen Antiautomorphismus $\varphi$ von $c_i\Lambda$ derart, daß

$$x^* = \begin{cases} (\psi_0 \circ \varphi)(x) & \text{für} \quad x \in c_i\Lambda, \\ (\varphi^{-1} \circ \psi_0^{-1})(x) & \text{für} \quad x \in c_k\Lambda. \end{cases}$$

Wir zeigen nun diese Teilbehauptungen und formulieren dabei die Ergebnisse in die Matrizensprache um.

1. Die Abbildung (6) ist eine Involution in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$, denn es gilt:

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$ für alle $x, y \in c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$.
2. $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$ für alle $x, y \in c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$.
3. $(x^*)^* = x$ für alle $x \in c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$.
4. $(\alpha x)^* = \alpha x^*$ für alle $\alpha \in K$ und $x \in c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$.

Dabei ist $(c_i\Lambda)^* = c_k\Lambda$ und $(c_k\Lambda)^* = c_i\Lambda$.

2. Es sei $*$ eine beliebige Involution in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$ mit $c_i^* = c_k$. Mit $\bar{\varphi}_i$ und $\bar{\varphi}_k$ bezeichnen wir die Einschränkungen von $*$ auf $c_i\Lambda$ bzw. auf $c_k\Lambda$, mit $\psi_0$ einen beliebigen Ringisomorphismus

$$\psi_0 \colon c_i\Lambda \to c_k\Lambda .$$

Dann ist $\varphi = \psi_0^{-1} \circ \bar{\varphi}_i$ ein Antiautomorphismus von $c_i\Lambda$, und für jedes $x \in c_i\Lambda$ gilt

$$(x^*)^* = (\bar{\varphi}_k \circ \bar{\varphi}_i)(x) = [\bar{\varphi}_k \circ (\psi_0 \circ \varphi)](x) = x .$$

Daher ist

$$\bar{\varphi}_k = \varphi^{-1} \circ \psi_0^{-1} .$$

Die Involution $*$ in $c_i\Lambda \oplus c_k\Lambda$ hat also die Gestalt (5). Bei der Übertragung dieses Ergebnisses in die Matrizensprache verwenden wir, daß nach Teil 3 des Beweises von Satz 3 jeder Antiautomorphismus $\varphi$ in $c_i\Lambda = M_i(n, K)$ gegeben ist durch

$$\varphi \colon X \mapsto CX^{\mathsf{T}}C^{-1}$$

mit einer regulären quadratischen Matrix $C$. Den Ringisomorphismus $\psi_0 \colon M_i(n, K) \to M_k(n, K)$ können wir uns realisiert denken durch die „identische" Abbildung $X \mapsto X$. Dann sind, wie behauptet, alle Involutionen in $M_i(n, K) \oplus M_k(n, K)$ beschrieben durch (5). Damit ist Satz 4 bewiesen.

Sind $c_i\Lambda$ und $c_k\Lambda$ eindimensional, so wirkt die Involution $*$ auf $x = \alpha c_i + \beta c_k$ gemäß $x^* = \beta c_i + \alpha c_k$.

## 3. Das Kriterium

Für den Beweis des in der Einleitung formulierten Hauptergebnisses dieser Arbeit interpretieren wir zunächst einige Ergebnisse aus Abschnitt 2 in der Sprache der symplektischen Moduln.

Jeder symplektische Modul $(M, *, \Phi)$ ist als Darstellungsmodul bezüglich $*$ selbstkonjugiert. Das bedeutet: Ist $x \mapsto A_x$ die zu $M$ und $x \mapsto A_{x^*}^{\mathsf{T}}$ die zu $\mathrm{Hom}_K(M, K)$ gehörende Darstellung von $\Lambda$, so ist $(M, *, \Phi)$ genau dann ein symplektischer Modul, wenn es eine reguläre, schiefsymmetrische Matrix $C$ gibt mit

$$A_x C = C A_{x^*}^{\mathsf{T}}$$

für alle $x \in \Lambda$. In einer geeigneten Basis $\mathfrak{e}$ von $M$ können wir $C$ als Formenmatrix der $K$-Bilinearform $\Phi$ interpretieren.

Satz 1 bedeutet dann, daß jeder bezüglich einer Involution $*$ in $\Lambda$ selbstkonjugierte absolut irreduzible Darstellungsmodul $M$ für $\Lambda$ entweder ein symplektischer Modul oder ein sogenannter symmetrischer Modul ist.

Da wir für einen absolut irreduziblen Darstellungsmodul $M \subseteqq c_i A$ die Darstellungsmatrizen $A_x$ mit den Matrizen $X \in M(n, K)$ identifizieren können, bedeutet Satz 3, daß eine Involution in einer Primärkomponente vermöge

$$X \mapsto X = CX^{\mathsf{T}}C^{-1}$$

genau dann durch eine reguläre schiefsymmetrische Matrix $C$ bewirkt wird, wenn $(M, *, \Phi)$ ein symplektischer Modul ist. Diese Involution wird genau dann durch eine reguläre symmetrische Matrix $C$ beschrieben, wenn $(M, *, \Phi)$ ein symmetrischer Modul ist. Dabei ist $\Phi$ die durch $C$ bestimmte Bilinearform.

### 3.1. *Duale Basis*

Es sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ eine beliebige Basis der halbeinfachen Algebra $A$.
Wir führen den Beweis für die Existenz einer eindeutig bestimmten bezüglich der Spur SP der rechtsregulären Darstellung von $A$ dualen Basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ in drei Etappen. Erstens zeigen wir die Eindeutigkeit; zweitens beweisen wir, daß es zu einer speziellen Basis von $A$ eine duale Basis gibt, und schließlich weisen wir das für eine beliebige Basis von $A$ nach. Vorbereitend zeigen wir

Satz 5.

1. *Für jedes Idempotent* $c \in A$ *ist* $\mathrm{SP}(c) \neq 0$.
2. *Ist* $y \in A$ *mit* $\mathrm{SP}(xy) = 0$ *für alle* $x \in A$, *so ist* $y = 0$

Beweis. 1. Es sei $A_c$ die Darstellungsmatrix von $c$ bei der rechtsregulären Darstellung von $A$. Wegen $c^2 = c$ ist dann

$$A_c^2 - A_c = 0.$$

Da das Polynom $f(x) = x^2 - x$ keine mehrfachen Nullstellen hat, ist $A_c$ nach KOCHENDÖRFFER [6], Satz 27, ähnlich zu einer Diagonalmatrix $A'_c$. Da $A'^2_c = A'_c$ ist, treten auf der Hauptdiagonalen von $A'_c$ nur die Werte 0 und 1 auf, und wegen $c \neq 0$ tritt die 1 auch wenigstens einmal auf. Hieraus folgt die Behauptung.

2. Es sei $y \in A$ mit $\mathrm{SP}(xy) = 0$ für alle $x \in A$. Wäre das von $y$ erzeugte Linksideal $L = Ay$ vom Nullideal verschieden, so würde es ein Idempotent $c$ enthalten, für welches nach Teil 1 dieses Satzes $\mathrm{SP}(c) \neq 0$ ausfällt. Das kann nach Voraussetzung nicht eintreten, und folglich ist $y = 0$.
Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6. *Zu jeder Basis* $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *einer halbeinfachen Algebra* $A$ *gibt es genau eine bezüglich der Spur SP der rechtsregulären Darstellung von* $A$ *duale Basis* $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{SP}(e_j b_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases}$$

Beweis. 1. Eindeutigkeit. Ist $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ eine beliebige Basis von $A$ und sind $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ und $\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$ duale Basen, so gilt wegen $\mathrm{SP}(e_i b_k) = \mathrm{SP}(e_i b'_k)$ offenbar

$$\mathrm{SP}(e_i b_k) - \mathrm{SP}(e_i b'_k) = \mathrm{SP}\big(e_i(b_k - b'_k)\big) = 0$$

für alle $i, k = 1, 2, \ldots, m$. Hieraus folgt wegen der Linearität der Spur

$$\mathrm{SP}\big(x(b_k - b'_k)\big) = 0$$

für alle $x \in A$ und für alle $k = 1, 2, \ldots, m$. Nach Satz 5 ist dann $b_k = b'_k$, und die Eindeutigkeit der dualen Basis ist gezeigt.

2. Es sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ eine Basis von $\Lambda$, die sich aus Basen der Primärkomponenten $c_i\Lambda$ der Zerlegung (1) zusammensetzt. Wegen der Orthogonalität dieser Primärkomponenten und der oben gezeigten Eindeutigkeit der dualen Basis genügt es, deren Existenz in einer dieser Primärkomponenten nachzuweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir in $c_i\Lambda = M(n, K)$ die Basis

$$\mathfrak{e}_i = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei $e_{jk} \in M(n, K)$ diejenige Matrix bezeichnet, in der nur an der Stelle $(i, k)$ eine 1 und sonst Nullen stehen. Dann ist

$$\mathfrak{b}_i = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b_{jk} = \frac{1}{n}\, e_{kj}$$

eine Basis von $c_i\Lambda = M(n, K)$.

Da die reguläre Darstellung von $c_i\Lambda$ die gemäß $X \mapsto X$ für $X \in M(n, K)$ gegebene absolut irreduzible Darstellung von $\Lambda$ genau $n$-mal enthält, ist auch

$$\mathrm{SP}(e_{jk} b_{rs}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = r \quad \text{und} \quad k = s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat, bezeichnet $\chi$ die Spur der Elemente $X \in M(n, K)$, so wird

$$\mathrm{SP}(e_{jk} b_{jk}) = n\chi(e_{jk} b_{jk}) = \chi(e_{jk} e_{kj}) = \chi(e_{jj}) = 1.$$

Für $j \neq r$ oder $k \neq s$ ist

$$\mathrm{SP}(e_{jk} b_{rs}) = n\chi(e_{jk} b_{rs}) = 0,$$

da auf der Hauptdiagonalen des Matrizenproduktes $e_{jk} b_{rs}$ stets nur Nullen vorkommen.

Damit ist $\mathfrak{b}_i$ eine duale Basis zu $\mathfrak{e}_i$.

3. Wir setzen nun die in 2. betrachteten Basen $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{b}_i$ von $c_i\Lambda$ zu einer Basis $\mathfrak{e}'$ bzw. $\mathfrak{b}'$ von $\Lambda$ zusammen. Dann ist $\mathfrak{b}'$ eine duale Basis zu $\mathfrak{e}'$.

Ist $\mathfrak{e}$ eine beliebige Basis von $\Lambda$, so gibt es eine reguläre $m \times m$-Matrix $B$ mit $\mathfrak{e} = B\mathfrak{e}'$. Wir zeigen, daß dann $\mathfrak{b} = (B^{\mathsf{T}})^{-1}\,\mathfrak{b}'$ eine duale Basis zu $\mathfrak{e}$ ist. Dazu fassen wir die Werte $\mathrm{SP}(e_j' b_k')$ als Elemente der $m$-reihigen Einheitsmatrix $E = \mathrm{SP}\,(\mathfrak{e}', \mathfrak{b}'^{\mathsf{T}})$ auf. Wegen der Linearität der Spur ist dann auch

$$\mathrm{SP}(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}^{\mathsf{T}}) = B\,\mathrm{SP}(\mathfrak{e}', \mathfrak{b}'^{\mathsf{T}})\, B^{-1} = E,$$

d. h., $\mathfrak{b}$ ist eine duale Basis zu $\mathfrak{e}$. Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Es ist klar, daß die duale Basis der dualen Basis die ursprüngliche Basis ist. Ist $\Lambda = K[G]$ eine halbeinfache Gruppenalgebra einer Gruppe $G$ über einem Körper $K$, so ist zu der von allen Gruppenelementen gebildeten natürlichen Basis $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$ die duale Basis gegeben durch

$$\left\{\frac{1}{m}\,\sigma_1^{-1}, \frac{1}{m}\,\sigma_2^{-1}, \ldots, \frac{1}{m}\,\sigma_m^{-1}\right\}.$$

### 3.2. Beweis des Kriteriums

Entsprechend dem Plan des Beweises für die Existenz einer dualen Basis $\mathfrak{b}$ von $\Lambda$ zu einer beliebigen Basis $\mathfrak{e}$ von $\Lambda$ beweisen wir unser Kriterium zunächst für die spezielle Basis $\mathfrak{e}'$ von $\Lambda$ und gehen dann zum allgemeinen Fall über.

1. Beweis für eine spezielle Basis
Es bezeichne wieder $\mathfrak{e}'$ die Basis von $\Lambda$, die sich aus den Basen $\mathfrak{e}_i$ der Primärkomponenten $c_i\Lambda$ zusammensetzt. Der absolut irreduzible Darstellungsmodul $M$ für $\Lambda$ liege in $c_i\Lambda$. Wegen der Orthogonalität der Primärkomponenten ist dann

$$\sum_{j=1}^{m} \chi(e_j b_j^*) = \sum_{e_j \in c_i \Lambda} \chi(e_j b_j^*),$$

d. h., es genügt bei der Wahl unserer speziellen Basis, die Summation nur über die in der Primärkomponenten $c_i\Lambda$ liegenden Basiselemente zu erstrecken. Die obige Summe ist sicher Null, wenn $M$ bezüglich der Involution $*$ in $\Lambda$ nicht selbstkonjugiert ist. Dann ist nämlich $c_i^* = c_k \neq c_i$, und die Elemente $b_j^*$ liegen nicht in $c_i\Lambda$.

Im Fall der Selbstkonjugiertheit von $M$ bezüglich $*$ benötigen wir neben der zu Beginn des Abschnittes 3 gegebenen Interpretation von Satz 1 das folgende Ergebnis.

Satz 7. *Ist $M$ ein absolut irreduzibler bezüglich einer Involution $*$ in $\Lambda$ selbstkonjugierter Darstellungsmodul für $\Lambda$, so gilt:*

a) *In $M$ läßt sich genau dann eine symplektische Struktur einführen, wenn für die Spur der Involutionsmatrix $D$ in $M(n, K)$*

$$\mathrm{SP}(D) = -n$$

*gilt.*

b) *In $M$ läßt sich genau dann eine symmetrische Struktur einführen, wenn* $\mathrm{SP}(D) = +n$ *wird.*

Beweis. Ist $M$ selbstkonjugiert, so haben wir nach Satz 3 für die Basiselemente $e_{jk} \in M(n, K)$, die wir wieder mit den Darstellungsmatrizen von $M$ identifizieren,

$$e_{jk}^* = C e_{kj} C^{-1}$$

mit einer schiefsymmetrischen oder symmetrischen regulären quadratischen Matrix $C$.

a) Ist $C = (\alpha_{st})$ schiefsymmetrisch, so wird für die inverse Matrix $C^{-1} = (\beta_{st})$

$$C^{-1} = -(C^{-1})^{\mathsf{T}} = -(\beta_{ts}).$$

Aus $e_{jk}^* = -C e_{kj} (C^{-1})^{\mathsf{T}}$ folgt dann

$$e_{jk}^* = -\sum_{l=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \alpha_{lk} \beta_{tj} e_{lt}.$$

Daher wird für die Involutionsmatrix $D$ mit $\mathfrak{e}_i^* = D\mathfrak{e}_i$

$$\mathrm{Sp}(D) = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \beta_{kj} = -n.$$

b) Ist $C$ symmetrisch, so wird für $C^{-1} = (\beta_{st})$ offenbar

$$C^{-1} = (C^{-1})^{\mathsf{T}} = (\beta_{ts}),$$

und eine analoge Rechnung liefert für die Spur der Involutionsmatrix $\mathrm{Sp}(D) = +n$. Die Umkehrung der beiden Teilbehauptungen ist klar nach Satz 1. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir können nun zum eigentlichen Beweis unseres Kriteriums schreiten.
Da die zu $M$ gehörende absolut irreduzible Darstellung von $\Lambda$ mit dem Charakter $\chi$ genau $n$-mal in der rechtsregulären Darstellung von $\Lambda$ mit der Spur SP enthalten ist, gilt für alle $X \in M(n, K)$

$$\mathrm{SP}(X) = n\chi(X).$$

Daher ist

$$\sum_{e_{jk}\in c_i\Lambda} \chi(e_{jk}b^*_{jk}) = \frac{1}{n} \sum_{e_{jk}\in c_i\Lambda} \mathrm{SP}(e_{jk}b^*_{jk}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{SP}(D).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Kriteriums in dem noch ausstehenden ersten und zweiten Fall.
Wegen der Vollständigkeit der drei Fälle gilt auch die jeweilige Umkehrung, und unser Kriterium ist nach Zusammensetzung der Teilbasen $\mathfrak{e}_i$ von $c_i\Lambda$ zu der Basis $\mathfrak{e}'$ von $\Lambda$ für diese spezielle Basis bewiesen.

2. Unabhängigkeit von der Wahl der Basis
Ist $\mathfrak{e}$ eine beliebige Basis von $\Lambda$ und $*$ eine Involution in $\Lambda$, so gibt es nach Satz 6 genau eine bezüglich der Spur der rechtsregulären Darstellung von $\Lambda$ duale Basis $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{e}$. Im Beweisteil 3 dieses Satzes hatten wir zusätzlich gezeigt: Ist $\mathfrak{e} = B\mathfrak{e}'$ mit einer regulären quadratischen $m \times m$-Matrix $B$ und der speziellen in 1. betrachteten Basis von $\Lambda$, so ist

$$\mathfrak{b} = (B^{\mathsf{T}})^{-1}\,\mathfrak{b}',$$

wobei $\mathfrak{b}'$ die bezüglich der Spur der rechtsregulären Darstellung von $\Lambda$ duale Basis zu $\mathfrak{e}'$ ist.
Deuten wir den Ausdruck $\sum_{i=1}^{m} \chi(e'_j b'_j)$ als formales Skalarprodukt der Basis $\mathfrak{e}'$ von $\Lambda$ mit der der Involution $*$ unterworfenen zu ihr dualen Basis $\mathfrak{b}'$ und schreiben wir dafür

$$\sum_{j=1}^{m} \chi(e'_j b'_j) = \chi(\mathfrak{e}'^{\mathsf{T}}, \mathfrak{b}'^{*}),$$

so wird in diesem Kalkül

$$\chi(\mathfrak{e}^{\mathsf{T}}, \mathfrak{b}^{*}) = \chi(\mathfrak{e}'^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}, (B^{\mathsf{T}})^{-1}\,\mathfrak{b}'^{*}) = \chi(\mathfrak{e}'^{\mathsf{T}}, \mathfrak{b}'^{*}).$$

Damit ist die Unabhängigkeit unseres Kriteriums von der Wahl der Basis von $\Lambda$ gezeigt, und sein Beweis ist abgeschlossen.
Im Spezialfall einer halbeinfachen Gruppenalgebra $\Lambda = K[G]$ erhalten wir für die natürliche Basis $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$ von $\Lambda$ und die durch

$$*\colon \sigma \mapsto \chi_0(\sigma)\,\sigma^{-1}$$

gegebene Standardinvolution die bekannte früher mit anderen Mitteln bewiesene

**Folgerung 2** ([8], Satz 16). Ist $M$ ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für $G$ in $K$, $\chi_0$ ein linearer Charakter von $G$ und Sp die Spur der zu $M$ gehörenden Darstellung $\sigma \mapsto A_\sigma$, so gilt genau einer der drei Fälle

$$\frac{1}{m} \sum_{\sigma\in G} \chi_0(\sigma^{-1})\,\mathrm{Sp}(\sigma^2) = \begin{cases} -1, \\ +1, \\ 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall ist $M$ bezüglich $*$ selbstkonjugiert und gestattet die Einführung einer symplektischen Struktur. Im zweiten Fall ist $M$ selbstkonjugiert und gestattet die Einführung einer symmetrischen Struktur. Im dritten Fall ist $M$ nicht selbstkonjugiert.

Mit Hilfe unseres Kriteriums können wir entscheiden, ob sich in einem beliebigen Darstellungsmodul $M$ für eine halbeinfache Algebra $\Lambda$ bezüglich einer Involution $*$ in $\Lambda$ eine symplektische Struktur einführen läßt. Das ist genau dann der Fall, wenn nach Zerlegung von $M$ in die direkte Summe von einfachen, d. h. absolut irreduziblen Darstellungsmoduln $M_i$, nur folgende Typen von Summanden auftreten:

1. Bezüglich des Charakters $\chi_i$ der zu $M_i$ gehörenden Darstellung gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \chi_i(e_j b_j^*) = -1.$$

2. Mit jedem nicht unter 1. fallenden Teildarstellungsmodul $M_i$ tritt auch der zu $M_i$ bezüglich $*$ konjugierte Teildarstellungsmodul $M_k = \mathrm{Hom}_K(M_i, K)$ auf, und die Anzahl der zu $M_i$ isomorphen Bestandteile ist gleich der Anzahl der zu $M_k$ isomorphen.

## LITERATUR


[1] HERSTEIN, I. N.: Rings with Involution, Chicago and London 1976.

[2] HOEHNKE, H.-J.: Über Beziehungen zwischen Problemen von H. Brandt aus der Theorie der Algebren und den Automorphismen der Normalform, Math. Nachr. 34 (1967), 229–255.

[3] HUSS, H., und ROSENBAUM K.: Über die symplektische Struktur von Gruppenalgebren, Wiss. Z. PH Erfurt/Mühlhausen 10 (1974), Heft 2, 55–63.

[4] ЯКОВЛЕВ, А. В.: Группа Галуа алгебра ического замыкация локального поля, Изв. АН СССР, сер. матем., 32 (1968), 1283–1322.

[5] KOCHENDÖRFFER, R.: Einführung in die Algebra, 4. Aufl., Berlin 1974.

[6] KOCHENDÖRFFER, R.: Determinanten und Matrizen, 2. Aufl., Leipzig 1961.

[7] MAHRHOLD, W., und K. ROSENBAUM: Über Involutionen in Gruppenalgebren, Wiss. Z. PH Erfurt/Mühlhausen 13 (1977), Heft 3, 57–75.

[8] ROSENBAUM, K.: Über die Struktur der $p$-adischen Vervollständigung zyklischer Erweiterungen eines irregulären lokalen Körpers und die symplektische Struktur von Darstellungsmoduln, Dissertation B, Potsdam 1975.


Manuskripteingang: 5. 1. 1979

## VERFASSER:

WOLFGANG MAHRHOLD und KURT ROSENBAUM, Sektion
Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule Erfurt/Mühlhausen