Beiträge zur Algebra und Geometrie
11 (1981), 109–118

Berührungsbedingungen für p-l-s-Kegelschnitte

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz

1. Einleitung

In unserer Arbeit [1] haben wir die Einführung von p-l-s-Kegelschnitten durch gewisse unerwünschte Eigenschaften motiviert, die das Superoskulieren auf der Mannigfaltigkeit M_5 der vollständigen Kegelschnitte gegenüber den p-l-Ausartungen auf M_5 besitzt:

1. Der Schnitt der zweidimensionalen Menge der einen nicht ausgearteten Kegelschnitt superoskulierenden Kegelschnitte mit der dreidimensionalen Menge der p-l-Ausartungen ist eindimensional, also zu hoher Dimension, also nicht eigentlich.

2. Die Menge der einen nicht ausgearteten p-l-Kegelschnitt superoskulierenden p-l-Kegelschnitte ist zweidimensional. Die Menge der eine p-l-Ausartung superoskulierenden p-l-Kegelschnitte ist dreidimensional.

In [3] haben wir eine Forderung erhoben, die das Vermeiden von 1. präzisiert und verallgemeinert: Der Schnitt jeder Ausartungsmenge mit der Menge der eine irreduzible Kurve c in einem allgemeinen Punkt r-fach berührenden Kegelschnitte soll für alle r und jedes c eigentlich sein. Wir haben gezeigt, daß diese Forderung auf der in [1] definierten Mannigfaltigkeit N_5 der p-l-s-Kegelschnitte erfüllt ist, und damit N_5 als berührungsvollständig charakterisiert.
Um auf den Defekt 2. zurückzukommen, werden wir in dieser Arbeit die Bedingungen des Berührens, Oskulierens und Superoskulierens auf P_5, M_5 und N_5 untersuchen, ihre Basisdarstellungen angeben und für die Kegelschnittmengen, die die genannten Bedingungen erfüllen, Gleichungen aufstellen. Mit Hilfe dieser Gleichungen sollen in einer folgenden Arbeit[1]) ausgeartete Berührungsbedingungen auf Kegelschnittmannigfaltigkeiten definiert und untersucht werden. Insbesondere soll dort gezeigt werden, daß der Defekt 2. auf N_5 beseitigt ist.

2. Kegelschnittmannigfaltigkeiten

Die Menge der p-Kegelschnitte einer projektiven Ebene X über dem Körper k der komplexen Zahlen erfüllt einen projektiven 5-Raum P_5 mit Koordinaten $(p_1, \ldots, p_6) = (p)$. Es sei $(P_5 \mid P_{(2)})$ die Hyperfläche der Geradenpaare, d. h. der zerfallenden Kegelschnitte, und $(P_5 \mid P_{(1)})$ sei die Varietät der Doppelgeraden, d. h. der zerfallenden Kegelschnitte, für die der Rang der Koeffizientenmatrix $\big((p)\big)$ gleich 1 ist.

[1]) „Ausgeartete Berührungsbedingungen auf Kegelschnittmannigfaltigkeiten".

Eine Varietät Q eines Produktraums $P_5 \times \cdots$ von P_5 mit weiteren projektiven Räumen hatten wir in [3] eine *Kegelschnittmannigfaltigkeit* genannt, wenn die Projektion $\chi\colon Q \to P_5$ birational und die Menge der Fundamentalpunkte von χ^{-1} eine Teilmenge von $(P_5 \mid P_{(1)})$ ist. Die bekannte Menge M_5 der *p-l-Kegelschnitte* oder auch *vollständigen Kegelschnitte* [5] und die Menge N_5 der von uns in [1] definierten *p-l-s-Kegelschnitte* sind Kegelschnittmannigfaltigkeiten.
M_5 ist eine Varietät des Produktraums $P_5 \times L_5$ mit dem allgemeinen Punkt $(p, l) = (p_i, l_i)$, wobei p_i $(i = 1, \ldots, 6)$ unbestimmt und l_i $(i = 1, \ldots, 6)$ durch die zweireihigen Adjunkten von $((p))$ gegeben sind. Die l_i bilden die Koeffizientenmatrix $((l))$ des zugehörigen Linienkegelschnitts in den Linienkoordinaten $(w) = (w_1, w_2, w_3)$, die als Koordinaten einer projektiven Ebene W aufgefaßt werden können. Durch den allgemeinen Punkt ist eine birationale Abbildung $\chi\colon M_5 \to P_5$ gegeben.
Der N_5 definierende allgemeine Punkt ist $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$, wobei $\bar{s}_j^P$ die Koeffizienten der zugeordneten Form (Chow-Form) der Kurve $\bar{s}^p$ der p-Superoskulanten von (p, l) im Graßmannraum G_{14} sind. Den Punkten dieser Kurve entsprechen im P_5 Geraden (p-Superoskulanten) und in X Büschelscharen von (p) in einem Punkt superoskulierenden Kegelschnitten. Entsprechend ist $\bar{s}^L$ erklärt. Die $\bar{s}_j^P$ und $\bar{s}_j^L$ sind rationale Funktionen von (p). Daher ist durch den allgemeinen Punkt von N_5 eine birationale Abbildung $\chi\colon N_5 \to P_5$ gegeben.
Eine Parameterdarstellung von M_5 ist [5, 1]

$$((p)) = \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & a + c^2 & ad + ce \\ e & ad + ce & ab + ad^2 + e^2 \end{pmatrix},$$

$$((l)) = \begin{pmatrix} ab + bc^2 + (cd - e)^2 & -bc - d(cd - e) & cd - e \\ -bc - d(cd - e) & b + d^2 & -d \\ cd - e & -d & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Eine Parameterdarstellung von N_5 ist in [1], (9.1) angegeben. Sie ergibt sich aus (2.1) mit

$$a = mb \tag{2.2}$$

und zusätzlich durch die Angabe der $\bar{s}_j$, z. B.:

$$\bar{s}_1^P = m,\ \bar{s}_2^P = 1, \ldots,\ \bar{s}_1^L = 1,\ \bar{s}_2^L = m, \ldots$$

3. Berührungsbedingungen

Es sei π ein nicht ausgearteter p-Kegelschnitt, d. h. Rang $((\pi)) = 3$, und x_π sei ein allgemeiner Punkt von π über k in rationaler Parameterdarstellung $x_\pi(t)$. Weiter sei $(P_5 \mid B(\pi, r))_{k(t)}$ die über $k(t)$ lineare $(4 - r)$-dimensionale Varietät der p-Kegelschnitte, die π in x_π mindestens $(r + 1)$-fach schneiden. Ein allgemeiner Punkt $b(\pi, r)$ dieser Varietät ist

$$b(\pi, 3) = q(\pi) + (w^2(t)), \tag{3.1}$$

$$b(\pi, 2) = q(\pi) + r(w(t)\,u(t)) + (w^2(t)), \tag{3.2}$$

$$b(\pi, 1) = q(\pi) + r(w(t)\,u(t)) + s(w(t)\,v) + (w^2(t)). \tag{3.3}$$

Dabei ist $w(t)$ die Tangente an π in $x_\pi(t)$, $u(t)$ eine Gerade durch $x_\pi(t)$ und v eine beliebige Gerade in X. Die Symbole (w^2), (wu), (wv) bedeuten die sechs Koeffizienten der Produkte der zu u, v bzw. w gehörenden Linearformen. Der Punkt $b(\pi, r)$ hat

über k die Dimension $5 - r$. Er definiert über k die Varietät $(P_5 \mid B(\pi, r))_k = (P_5 \mid B(\pi, r))$ der p-Kegelschnitte, die den nicht ausgearteten p-Kegelschnitt π von r-ter Ordnung berühren.
In P_5 ist $(P_5 \mid B(\pi, r))$ ein Kegel mit der Spitze in π. Als Basisvarietät kann eine geeignete $(4 - r)$-dimensionale Teilmenge von $P_{(2)}$ gewählt werden:
Für $r = 1$ ist diese Basisvarietät der Schnitt von $P_{(2)}$ mit der ersten Polarhyperfläche zu $P_{(2)}$ von π, für $r = 2$ der Schnitt von $P_{(2)}$ mit der ersten und der zweiten Polarhyperfläche zu $P_{(2)}$ von π, für $r = 3$ der Schnitt von $P_{(1)}$ mit der Hyperebene

$$\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_6 p_6 = 0 \text{ [1]}.$$

Die Ordnung von $(P_5 \mid B(\pi, r))$ ist die Schnittzahl $(P_5 \mid B(\pi, r)\, P^{5-r})$ [1]).
$(P_5 \mid B(\pi, 3))$ hat die Ordnung 4, siehe [1]. $(P_5 \mid B(\pi, 2))$ und $(P_5 \mid B(\pi, 1))$ haben beide die Ordnung 6. Zur Berechnung von $(P_5 \mid B(\pi, 2)\, P^3) = 6$ bestimmt man die Anzahl der p-Kegelschnitte von $(P_5 \mid B(\pi, 2))$, die durch drei Punkte A_i gehen, mit Hilfe einer quadratischen Cremonatransformation τ mit den Fundamentalpunkten A_i. Sie führt π in $\tau(\pi)$ der Ordnung 4 mit drei Doppelpunkten, der Klasse 6 und dem Geschlecht 0 über und die gesuchten Kegelschnitte in die sechs Wendetangenten von $\tau(\pi)$.
Gleichungen für $(P_5 \mid B(\pi, r))$ erhalten wir folgendermaßen: Eine geeignete projektive Transformation in P_5, die π in einen Fernpunkt $\pi_{i_0} = 1$, $\pi_i = 0$ sonst, transformiert, bildet den Kegel (affin) in einen Zylinder ab, dessen Gleichungen durch Elimination von p_{i_0} bei den oben genannten Schnitten erhalten werden. Dabei ergeben sich sechs Gleichungen für $r = 3$ (siehe (4.8)), zwei Gleichungen für $r = 2$ (siehe (4.22), (4.23)), eine Gleichung für $r = 1$ (siehe (4.28)).
Der allgemeine Punkt $b(\pi, r)$ ist ein nicht ausgearteter Kegelschnitt in P_5.

Definition 3.1. Die durch den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}b(\pi, r)$ über k definierte $(5 - r)$-dimensionale Varietät $(Q \mid B(\pi, r))$ von Q heißt die *Varietät der Kegelschnitte aus Q, die $\chi^{-1}\pi$ auf Q von r-ter Ordnung berühren.* Von zweiter Ordnung berühren heißt *oskulieren* und von dritter Ordnung berühren heißt *superoskulieren.*

Zu dem π superoskulierenden p-Kegelschnitt $b(\pi, 3)$ bilden wir nochmals den superoskulierenden Kegelschnitt $b(b(\pi, 3), 3)$.

Definition 3.2. Die durch den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}b(b(\pi, 3), 3)$ über k definierte vierdimensionale Varietät $(Q \mid S(\pi))$ von Q heißt die Varietät der Kegelschnitte aus Q, die $\chi^{-1}\pi$ auf Q *mittelbar superoskulieren.*

4. Basisdarstellungen und Gleichungen

4.1. In [2] haben wir die Homologiegruppen $H_r M_5$ und $H_r N_5$ und Basiselemente angegeben, siehe [2], 3.3.11., 4.18.
Die Koeffizienten in den Basisdarstellungen bestimmen wir nun, wie in [2], 2.1.4., angegeben wurde, durch geeignete Schnitte. Wir ziehen dazu Parameterdarstellungen, wie z. B. (2.1), (2.2), heran und schneiden im Parameterraum. Dabei ist darauf zu achten, daß die Schnittpunkte von den Darstellungen erfaßt werden.

4.2. $(N \mid B(\pi, 3))$ ist zweidimensional. Eine Basis für $H_4 N_5$ wird vertreten durch

$$(N \mid P^3),\ (N \mid P^T_{(1)} W^2),\ (N \mid P^T_{(1)} WL),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX). \quad (4.1)$$

[1]) P^i bedeute i lineare Gleichungen in P_5.

Die Schnittzahlen in der Tabelle

$N\|$	$B(\pi, 3)$	P^3	$P^T_{(1)}W^2$	$P^T_{(1)}WL$	$P_{(1)}L_{(1)}W^2$	$P_{(1)}L_{(1)}WX$
$P^T_{(1)}W$	0	0	0	-3	0	1
$P^T_{(1)}L$	0	0	-3	-3	2	2
$L^T_{(1)}X$	0	3	0	0	1	1
$L^T_{(1)}P$	0	3	0	0	0	2
P^2	4	1	0	0	0	0

(4.2)

ergeben sich bis auf die erste Spalte aus [2]. Wir bestimmen die Schnittzahlen in der ersten Spalte. Es sei (π, λ) der zu π gehörende p-l-Kegelschnitt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist nach [1], 6.1., $\big((\pi)\big) = \mathfrak{T}^{\mathsf{T}}\big((\mathring{\pi})\big)\,\mathfrak{T}$ mit

$$\big((\mathring{\pi})\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Wir vereinfachen zunächst, indem wir vom Kegelschnitt $\mathring{\pi}$ ausgehen. Für den allgemeinen Punkt $b(\mathring{\pi}, 3)$ erhalten wir nach (3.1) die Koordinaten

$$\begin{gathered} \mathring{p}_1 = q + (t^2 - 1)^2, \quad \mathring{p}_2 = \alpha q + 4\alpha t^2, \quad \mathring{p}_3 = \alpha\beta q - \alpha\beta(t^2 + 1)^2, \\ \mathring{p}_4 = 2\sqrt{\alpha}\, t(t^2 - 1), \quad \mathring{p}_5 = \sqrt{-\alpha\beta}\,(t^4 - 1), \quad \mathring{p}_6 = 2\alpha\sqrt{-\beta}\, t(t^2 + 1). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Durch Adjunktenbildung finden wir dazu die $\mathring{l}_i$ und erhalten mit $(\mathring{p}_i, \mathring{l}_i)$ den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}b(\mathring{\pi}, 3)$ auf M_5:

$$\begin{gathered} \mathring{l}_1 = \alpha\beta q - \alpha\beta(t^2 - 1)^2, \quad \mathring{l}_2 = \beta q - 4\beta t^2, \quad \mathring{l}_3 = q + (t^2 + 1)^2, \\ \mathring{l}_4 = -2\beta\sqrt{\alpha}\, t(t^2 - 1), \quad \mathring{l}_5 = -\sqrt{-\alpha\beta}\,(t^4 - 1), \quad \mathring{l}_6 = -2\sqrt{-\beta}\, t(t^2 + 1). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Für die Angabe des allgemeinen Punktes $\chi^{-1}b(\mathring{\pi}, 3)$ auf N_5 ist es zweckmäßig, die Parameterdarstellungen (2.1) und (2.2) heranzuziehen. Zwischen den p_i, l_i und den Parametern a, b, c, d, e und m bestehen die Zusammenhänge

$$\begin{gathered} c = \frac{p_4}{p_1}, \quad e = \frac{p_5}{p_1}, \quad a = \frac{p_1 p_2 - p_4^2}{p_1^2}, \\ d = -\frac{l_6}{l_3}, \quad b = \frac{l_2 l_3 - l_6^2}{l_3^2}, \quad mb = a. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Daraus folgt für $\chi^{-1}b(\mathring{\pi}, 3)$

$$\begin{gathered} \mathring{c} = \frac{2\sqrt{\alpha}\, t(t^2 - 1)}{q + (t^2 - 1)^2}, \quad \mathring{a} = \frac{\alpha q\big(q + (t^2 + 1)^2\big)}{\big(q + (t^2 - 1)^2\big)^2}, \\ \mathring{d} = \frac{2\sqrt{-\beta}\, t(t^2 + 1)}{q + (t^2 + 1)^2}, \quad \mathring{b} = \frac{\beta q\big(q + (t^2 - 1)^2\big)}{\big(q + (t^2 + 1)^2\big)^2}, \\ \mathring{e} = \frac{\sqrt{-\alpha\beta}\,(t^4 - 1)}{q + (t^2 - 1)^2}, \quad \mathring{m} = \frac{\alpha\big(q + (t^2 + 1)^2\big)^3}{\beta\big(q + (t^2 - 1)^2\big)^3}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Die in 3. erwähnten sechs Gleichungen des p-Superoskulantenkegels lauten für $\big(P_5 \,|B(\mathring{k}, 3)\big)$

$$\begin{aligned}
&9\beta(\mathring{p}_2\mathring{p}_3 - \mathring{p}_6^2) - (2\mathring{p}_3 + 2\beta\mathring{p}_2 - \alpha\beta\mathring{p}_1)(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0,\\
&9\alpha\beta(\mathring{p}_1\mathring{p}_3 - \mathring{p}_5^2) - (2\mathring{p}_3 - \beta\mathring{p}_2 + 2\alpha\beta\mathring{p}_1)(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0,\\
&9\alpha\beta^2(\mathring{p}_1\mathring{p}_2 - \mathring{p}_4^2) - (-\mathring{p}_3 + 2\beta\mathring{p}_2 + 2\alpha\beta\mathring{p}_1)(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0,\\
&3(\mathring{p}_5\mathring{p}_6 - \mathring{p}_3\mathring{p}_4) + \mathring{p}_4(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0,\\
&3\beta(\mathring{p}_4\mathring{p}_6 - \mathring{p}_2\mathring{p}_5) + \mathring{p}_5(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0,\\
&3\alpha\beta(\mathring{p}_4\mathring{p}_5 - \mathring{p}_1\mathring{p}_6) + \mathring{p}_6(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Für die $\mathring{l}_i$ aus (4.5) findet man duale Gleichungen. Wir suchen noch Gleichungen möglichst kleinen Grades zwischen $\mathring{p}_i$ und $\mathring{l}_i$. Die Adjunkten der Matrix $\big((p)\big)$ bzw. $\big((l)\big)$ bezeichnen wir mit $L_i(p^2)$ bzw. $P_i(l^2)$, $i = 1, \ldots, 6$. Man findet zunächst die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathring{l}_4^3}{\mathring{p}_4^3} &= \beta^3 \frac{\mathring{l}_5^3}{\mathring{p}_5^3} = \alpha^3\beta^3 \frac{\mathring{l}_6^3}{\mathring{p}_6^3} = \frac{(\mathring{l}_1 - \alpha\mathring{l}_2)^3}{(\alpha\mathring{p}_1 - \mathring{p}_2)^3} = \beta^3 \frac{(\mathring{l}_1 - \alpha\beta\mathring{l}_3)^3}{(\alpha\beta\mathring{p}_1 - \mathring{p}_3)^3}\\
&= \alpha^3\beta^3 \frac{(\mathring{l}_2 - \beta\mathring{l}_3)^3}{(\beta\mathring{p}_2 - \mathring{p}_3)^3} = -\beta^3 \frac{(\mathring{l}_1 + \alpha\mathring{l}_2 + \alpha\beta\mathring{l}_3)^3}{(\mathring{p}^3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1)^3} = -\alpha\beta^2 \frac{P_i(\mathring{l}^2)\,\mathring{l}_j}{\mathring{p}_i\,L_j(\mathring{p}^2)},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

die dann als homogene Gleichungen vom Grad 3 in p_i und vom Grad 3 in l_i geschrieben werden. Zwei dieser Gleichungen, nämlich

$$\beta\mathring{p}_1 L_3(\mathring{p}^2)\,\mathring{l}_5^3 + \alpha\mathring{p}_5^3\mathring{l}_3 P_1(\mathring{l}^2) = 0$$

und

$$\mathring{p}_1 L_3(\mathring{p}^2)\,\mathring{l}_4^3 + \alpha\beta^2\mathring{p}_4^3\mathring{l}_3 P_1(\mathring{l}^2) = 0$$

sowie die erste Gleichung von (4.8) schreiben wir in den Parametern für N_5 (siehe (2.1) und (2.2)):

$$\begin{aligned}
&\beta(\mathring{c}\mathring{d} - \mathring{e})^3\,\mathring{m} + \alpha\mathring{e}^3 = 0,\\
&(\mathring{b}\mathring{c} + \mathring{c}\mathring{d}^2 - \mathring{d}\mathring{e})^3\,\mathring{m} - \alpha\beta^2\mathring{c}^3 = 0,\\
&[\alpha\beta - 2\beta(\mathring{m}\mathring{b} + \mathring{c}^2) + (\mathring{m}\mathring{b}^2 + \mathring{m}\mathring{b}\mathring{d}^2 + \mathring{e}^2)]\\
&\times [\alpha\beta + \beta(\mathring{m}\mathring{b} + \mathring{c}^2) - 2\,(\mathring{m}\mathring{b}^2 + \mathring{m}\mathring{b}\mathring{d}^2 + \mathring{e}^2)] - 9\beta(\mathring{m}\mathring{b}\mathring{d} + \mathring{c}\mathring{e})^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

und haben damit Gleichungen für den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}b(\mathring{k}, 3)$ auf N_5, wobei der allgemeine Punkt in der Darstellung (4.7) vorliegt.

Die Untervarietät $(N \mid P_{(1)}^T)$ ist im Parameterraum durch $m = 0$ gegeben [1], 9.1. Die Gleichungen (4.10) zusammen mit $\mathring{m} = 0$ zeigen, daß der Schnitt von $\big(N \mid B\,(\mathring{k}, 3)\big)$ mit $(N \mid P_{(1)}^T)$ leer ist.

Der Übergang von $\big(N \mid B(\mathring{k}, 3)\big)$ zu $\big(N \mid B(\pi, 3)\big)$ geschieht mittels der Transformation $(\mathring{x}_1\ \mathring{x}_2\ \mathring{x}_3)^{\mathsf{T}} = \mathfrak{T}(x_1\ x_2\ x_3)^{\mathsf{T}}$, die in der Ebene X den p-Kegelschnitt $\mathring{k}$ in π überführt. Sie induziert in P_5 bzw. L_5 die lineare Transformation

$$\big((\mathring{p})\big) = \mathfrak{T}^{*}\big((p)\big)\,\mathfrak{T}^{-1}$$

bzw.

$$\big((\mathring{l})\big) = \mathfrak{T}\big((l)\big)\,\mathfrak{T}^{\mathsf{T}}. \tag{4.11}$$

Daraus ergibt sich für die Parameter in (2.1), (2.2) mit (4.6)

$$\begin{aligned}
&\mathring{c} = c - \gamma, \quad \mathring{d} = d - \delta, \quad \mathring{e} = (e - \varepsilon) - \delta(c - \gamma),\\
&\mathring{a} = a, \quad \mathring{b} = b, \quad \mathring{m} = m.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Einsetzen von (4.12) in die Gleichungen (4.10) ergibt Gleichungen für $\left(N \mid B(\pi, 3)\right)$. Mit $m = 0$ ergeben diese wie oben, daß der Schnitt von $\left(N \mid B(\pi, 3)\right)$ mit $(N \mid P^T_{(1)})$ leer ist. Damit gilt

$$\left(N \mid B(\pi, 3)\, P^T_{(1)} W\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(N \mid B(\pi, 3)\, P^T_{(1)} L\right) = 0.$$

Entsprechend finden wir

$$\left(N \mid B(\pi, 3)\, L^T_{(1)} X\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(N \mid B(\pi, 3)\, L^T_{(1)} P\right) = 0.$$

Schließlich gilt

$$\left(N \mid B(\pi, 3)\, P^2\right) = \left(P_5 \mid B(\pi, 3)\, P^2\right) = 4,$$

da $\left(P_5 \mid B(\pi, 3)\, P^2\right)$ keine p-Ausartungen enthält. Damit sind die Schnittzahlen in der ersten Spalte von (4.2) berechnet. Die Koeffizienten in der Darstellung von $\left(N \mid B(\pi, 3)\right)$ durch die Basiselemente (4.1) werden nun mit (4.2) bestimmt. Wir erhalten die Homologierelation

$$\begin{aligned}\left(N \mid B(\pi, 3)\right) \sim\; & 4(N \mid P^3) - 6\,(N \mid P^T_{(1)} W^2) - 2(N \mid P^T_{(1)} WL) \\ & - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Entsprechend finden wir

$$\left(M \mid B(\pi, 3)\right) \sim 4(M \mid P^3) - 6(M \mid P_{(1)} W^2) - 2(M \mid P_{(1)} WL). \tag{4.14}$$

Wir geben nun noch zwei effektive Basisdarstellungen von $\left(N \mid B(\pi, 3)\right)$ an. Es sei $\left(N \mid P^T_{(1)} B\right)$ die Varietät aller derjenigen p^T-Ausartungen, für die einer der beiden Trägerpunkte der Tangentenbüschel fest ist [2], 2.2.2., und dual dazu $(N \mid L^T_{(1)} G)$ die Varietät der l^T-Ausartungen, für die eine Gerade fest ist [2], 2.2.3. Mit Hilfe der Schnittzahlberechnungen aus [2], 2.2., erhält man

$$\begin{aligned}&(N \mid P^T_{(1)} B) \sim -2(N \mid P^T_{(1)} W^2) + (N \mid P^T_{(1)} WL), \\ &(N \mid L^T_{(1)} G) \sim (N \mid P^3) - 4(N \mid P^T_{(1)} W^2) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2)\end{aligned} \tag{4.15}$$

und außerdem

$$\begin{aligned}&(N \mid P_{(1)} L_{(1)} X^2) \sim (N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX) - (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2), \\ &(N \mid L^T_{(1)} X^2) \sim (N \mid P^3) - (N \mid P^T_{(1)} W^2) - (N \mid P^T_{(1)} WL) \\ &\qquad - 3(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Neben (4.1) bilden somit auch

$$(N \mid P^T_{(1)} W^2),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2),\ (N \mid P^T_{(1)} B),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} X^2),\ (N \mid L^T_{(1)} X^2)$$

und (4.17)

$$(N \mid P^T_{(1)} W^2),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2),\ (N \mid L^T_{(1)} G),\ (N \mid P_{(1)} L_{(1)} X^2),\ (N \mid L^T_{(1)} X^2)$$

je eine Basis für $H_4 N_5$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\left(N \mid B(\pi, 3)\right) \sim\; & 2(N \mid P^T_{(1)} W^2) + 2(N \mid P^T_{(1)} B) \\ & + 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} X^2) + 4(N \mid L^T_{(1)} X^2),\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\left(N \mid B(\pi, 3)\right) \sim\; & 2(N \mid L^T_{(1)} X^2) + 2(N \mid L^T_{(1)} G) \\ & + 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) + 4(N \mid P^T_{(1)} W^2).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Schließlich soll noch eine Beziehung zur Varietät $(N \mid \widehat{KP})$ der p-l-s-Kegelschnitte, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt in einem festen Punkt superoskulieren, genannt werden. Nach [2], (4.4), gilt

$$(N \mid \widehat{KP}) \sim (N \mid P^4) - (N \mid P_{(1)}^T W^2 L) - 3(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X),$$

und aus (4.13) erhalten wir

$$\begin{aligned}(N \mid B(\pi, 3)\, P) &\sim 4(N \mid P^4) - 2(N \mid P_{(1)}^T WLP) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WXP)\\ &\sim 4[(N \mid P^4) - (N \mid P_{(1)}^T W^2 L) - 3(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X)]\\ &\sim 4(N \mid \widehat{KP}).\end{aligned}$$

4.3. $(M \mid B(\pi, 2))$ ist dreidimensional. Eine Basis für $H_6 M_5$ wird nach [2], 3.3.11. und (3.30), vertreten durch $(M \mid P_{(1)} W)$, $(M \mid \widehat{PL})$, $(M \mid L_{(1)} X)$.
Für die Koordinaten $(\mathring{p}_i, \mathring{l}_i)$ des allgemeinen Punktes $\chi^{-1} b(\mathring{\pi}, 2)$ auf M_5 erhalten wir nach (3.2)

$$\begin{aligned}\mathring{p}_1 &= q + 4r(t^3 + t) + (t^2 + 1)^2,\\ \mathring{p}_2 &= \alpha q - 8\alpha r t - 4\alpha t^2,\\ \mathring{p}_3 &= \alpha\beta q - 4\alpha\beta r(t^3 - t) - \alpha\beta(t^2 - 1)^2,\\ \mathring{p}_4 &= -2\sqrt{-\alpha}\,[r(3t^2 + 1) + (t^3 + t)],\\ \mathring{p}_5 &= -\sqrt{-\alpha\beta}\,[4rt^3 + (t^4 - 1)],\\ \mathring{p}_6 &= -2\alpha\sqrt{\beta}\,[r(3t^2 - 1) + (t^3 - t)]\end{aligned} \tag{4.20}$$

und dazu

$$\begin{aligned}\mathring{l}_1 &= \alpha^2\beta[q^2 - q(t^2 + 1)^2 - 4qr(t^3 + t) - 4r^2(t^2 + 1)^2],\\ \mathring{l}_2 &= \alpha\beta[q^2 + 4qt^2 + 8qrt + 16r^2t^2],\\ \mathring{l}_3 &= \alpha[q^2 + q(t^2 - 1)^2 + 4qr(t^3 - t) + 4r^2(t^2 - 1)^2],\\ \mathring{l}_4 &= 2\alpha\beta\sqrt{-\alpha}\,[q(t^3 + t) + qr(3t^2 + 1) + 4r^2(t^3 + t)],\\ \mathring{l}_5 &= \alpha\sqrt{-\alpha\beta}\,[q(t^4 - 1) + 4qrt^3 + 4r^2(t^4 - 1)],\\ \mathring{l}_6 &= 2\alpha\sqrt{\beta}\,[q(t^3 - t) + qr(3t^2 - 1) + 4r^2(t^3 - t)].\end{aligned} \tag{4.21}$$

Die in 3. erwähnten zwei Gleichungen für $(P_5 \mid B(\pi, 2))$ lauten für $\pi = \mathring{\pi}$

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2\mathring{p}_1^2 + \beta^2\mathring{p}_2^2 + \mathring{p}_3^2 - \alpha\beta^2\mathring{p}_1\mathring{p}_2 - \alpha\beta\mathring{p}_1\mathring{p}_3 - \beta\mathring{p}_2\mathring{p}_3\\ &+ 3\alpha\beta^2\mathring{p}_4^2 + 3\alpha\beta\mathring{p}_5^2 + 3\beta\mathring{p}_6^2 = 0,\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}&2\alpha^3\beta^3\mathring{p}_1^3 + 2\beta^3\mathring{p}_2^3 + 2\mathring{p}_3^3 - 3\alpha^2\beta^3\mathring{p}_1^2\mathring{p}_2 - 3\alpha^2\beta^2\mathring{p}_1^2\mathring{p}_3 - 3\alpha\beta^3\mathring{p}_1\mathring{p}_2^2\\ &- 3\alpha\beta\mathring{p}_1\mathring{p}_3^2 - 3\beta^2\mathring{p}_2^2\mathring{p}_3 - 3\beta\mathring{p}_2\mathring{p}_3^2 + 12\alpha\beta^2\mathring{p}_1\mathring{p}_2\mathring{p}_3\\ &+ 9\alpha^2\beta^3\mathring{p}_1\mathring{p}_4^2 + 9\alpha^2\beta^2\mathring{p}_1\mathring{p}_5^2 + 9\alpha\beta^3\mathring{p}_2\mathring{p}_4^2\\ &+ 9\beta^2\mathring{p}_2\mathring{p}_6^2 + 9\alpha\beta\mathring{p}_3\mathring{p}_5^2 + 9\beta\mathring{p}_3\mathring{p}_6^2\\ &- 18\alpha\beta^2\mathring{p}_1\mathring{p}_6^2 - 18\alpha\beta^2\mathring{p}_2\mathring{p}_5^2 - 18\alpha\beta^2\mathring{p}_3\mathring{p}_4^2 + 54\alpha\beta^2\mathring{p}_4\mathring{p}_5\mathring{p}_6 = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Wir suchen weiter Gleichungen zwischen $\mathring{p}_i$ und $\mathring{l}_i$. Man findet $\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1 = 3\alpha\beta q$, $\mathring{l}_1 + \alpha\mathring{l}_2 + \alpha\beta\mathring{l}_3 = 3\alpha^2\beta q^2$ und damit die sechs Gleichungen

$$3\beta L_i(\mathring{p}^2)\,(\mathring{l}_1 + \alpha\mathring{l}_2 + \alpha\beta\mathring{l}_3) - (\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1)^2\,\mathring{l}_i = 0 \tag{4.24}$$

sowie die sechs Gleichungen

$$3\alpha P_i(\mathring{l}^2)\,(\mathring{p}_3 + \beta\mathring{p}_2 + \alpha\beta\mathring{p}_1) - (\mathring{l}_1 + \alpha\mathring{l}_2 + \alpha\beta\mathring{l}_3)^2\,\mathring{p}_i = 0 \tag{4.25}$$

für $(M \mid B(\mathring{\pi}, 2))$. Einsetzen der Transformation (4.11) in (4.24), (4.25) ergibt Gleichungen für $(M \mid B(\pi, 2))$.
Die Gleichung für $i = 3$ aus (4.24) und die für $i = 1$ aus (4.25) schreiben wir in den Parametern von (2.1):

$$\begin{aligned}
&3\beta\mathring{a}\big[\big(\mathring{a}\mathring{b} + \mathring{b}\mathring{c}^2 + (\mathring{c}\mathring{d} - \mathring{e})^2\big) + \alpha(\mathring{b} + \mathring{d}^2) + \alpha\beta\big] \\
&- [(\mathring{a}\mathring{b} + \mathring{a}\mathring{d}^2 + \mathring{e}^2) + \beta(\mathring{a} + \mathring{c}^2) + \alpha\beta]^2 = 0, \\
&3\alpha\mathring{b}[(\mathring{a}\mathring{b} + \mathring{a}\mathring{d}^2 + \mathring{e}^2) + \beta(\mathring{a} + \mathring{c}^2) + \alpha\beta] \\
&- \big[\big(\mathring{a}\mathring{b} + \mathring{b}\mathring{c}^2 + (\mathring{c}\mathring{d} - \mathring{e})^2\big) + \alpha(\mathring{b} + \mathring{d}^2) + \alpha\beta\big]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir hier die Transformation (4.12) ein und schneiden dann mit $(M \mid P_{(1)}W^2)$, d. h. $a = 0$, $c = c_0$, $e = e_0$, so ergibt sich $(M \mid B(\pi, 2)\, P_{(1)}W^2) = 0$. Entsprechend findet man $(M \mid B(\pi, 2)\, L_{(1)}X^2) = 0$.
Schließlich gilt $(M \mid B(\pi, 2)\, P^3) = (P_5 \mid B(\pi, 2)\, P^3) = 6$, da im zuletzt genannten Schnitt keine p-Ausartungen vorkommen.
Wie in 4.2. ergibt sich nun mit weiteren Schnittzahlen aus [2] die Homologierelation

$$(M \mid B(\pi, 2)) \sim 6(M \mid \widehat{PL}). \tag{4.26}$$

Entsprechend findet man mit Benutzung der Parameterdarstellung (2.1), (2.2)

$$(N \mid B(\pi, 2)) \sim 6(N \mid \widehat{PL}). \tag{4.27}$$

4.4. $(M \mid B(\pi, 1))$ ist vierdimensional. Eine Basis für H_8M_5 wird vertreten durch $(M \mid P)$, $(M \mid L)$. Die in 3. erwähnte Gleichung sechsten Grades für die Hyperfläche $(P_5 \mid B(\pi, 1))$ lautet für $\pi = \mathring{\pi}$

$$\begin{aligned}
&\mathring{p}_3^2(\mathring{p}_2\mathring{p}_3 - \mathring{p}_6^2)^2 + 2\beta(2\mathring{p}_6^2 - \mathring{p}_2\mathring{p}_3)\,(\mathring{p}_2\mathring{p}_3 - \mathring{p}_6^2)^2 \\
&+ 2\alpha\mathring{p}_3^2[2(\mathring{p}_5\mathring{p}_6 - \mathring{p}_3\mathring{p}_4)^2 - (\mathring{p}_2\mathring{p}_3 - \mathring{p}_6^2)\,(\mathring{p}_1\mathring{p}_3 - \mathring{p}_5^2)] + R_1(\alpha, \beta; \mathring{p}_i) = 0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

wobei die Glieder von R_1 vom Grad 6 in $\mathring{p}_i$ und deren Koeffizienten Potenzprodukte in α, β vom Grad $\geqq 2$ sind. Sie kann als Gleichung in $\mathring{p}_i$, $\mathring{l}_i$ geschrieben werden, nämlich

$$\mathring{p}_3^2\mathring{l}_1^2 + 2\alpha\mathring{p}_3^2(2\mathring{l}_4^2 - \mathring{l}_1\mathring{l}_2) + 2\beta(2\mathring{p}_6^2 - \mathring{p}_2\mathring{p}_3)\,\mathring{l}_1^2 + R_2(\alpha, \beta; \mathring{p}_i, \mathring{l}_i) = 0, \tag{4.29}$$

wobei R_2 homogen vom Grad 2 in $\mathring{p}_i$ und vom Grad 2 in $\mathring{l}_i$ mit Koeffizienten wie R_1 ist.
Ersetzen wir hierin $\mathring{p}_i$ durch die Adjunkten $P_i(\mathring{l}^2)$, so erhalten wir die Gleichung sechsten Grades in den $\mathring{l}_i$:

$$\begin{aligned}
&\mathring{l}_1^2(\mathring{l}_1\mathring{l}_2 - \mathring{l}_4^2)^2 + 2\alpha(2\mathring{l}_4^2 - \mathring{l}_1\mathring{l}_2)\,(\mathring{l}_1\mathring{l}_2 - \mathring{l}_4^2)^2 \\
&+ 2\beta\mathring{l}_1^2[2(\mathring{l}_4\mathring{l}_5 - \mathring{l}_1\mathring{l}_6)^2 - (\mathring{l}_1\mathring{l}_2 - \mathring{l}_4^2)\,(\mathring{l}_1\mathring{l}_3 - \mathring{l}_5^2)] + R_3(\alpha, \beta; \mathring{l}_i) = 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Einsetzen der Transformation (4.11) in (4.28) bis (4.30) ergibt drei Gleichungen für $(M \mid B(\pi, 1))$. Damit finden wir $(M \mid B(\pi, 1)\, P^4) = 6$ und $(M \mid B(\pi, 1)\, L^4) = 6$ und mit weiteren Schnittzahlen aus [2] die Relation

$$\big(M \mid B(\pi, 1)\big) \sim 2(M \mid P) + 2(M \mid L). \tag{4.31}$$

Entsprechend finden wir auch

$$\big(N \mid B(\pi, 1)\big) \sim 2(N \mid P) + 2(N \mid L). \tag{4.32}$$

4.5. Zur Bestimmung eines allgemeinen Punktes von $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\big)$ geben wir zunächst $\chi^{-1}b(\pi, 3)$ in den Parametern der Darstellung (2.1), (2.2) an, indem wir die Transformation (4.12) in (4.7) einsetzen. Wir erhalten[1])

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2\sqrt{\alpha}\, s(s^2-1)}{r+(s^2-1)^2} + \gamma, \qquad d = \frac{2\sqrt{-\beta}\, s(s^2+1)}{r+(s^2+1)^2} + \delta,\\
e &= \frac{\sqrt{-\alpha\beta}\,(s^4-1) + 2\sqrt{\alpha}\,\delta s(s^2-1)}{r+(s^2-1)^2} + \varepsilon,\\
b &= \frac{\beta r\big(r+(s^2-1)^2\big)}{\big(r+(s^2+1)^2\big)^2}, \qquad m = \frac{\alpha\big(r+(s^2+1)^2\big)^3}{\beta\big(r+(s^2-1)^2\big)^3}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Nun betrachten wir $p = b(\mathring{\pi}, 3)$. Den allgemeinen Punkt $\chi^{-1}b\big(b(\mathring{\pi}, 3), 3\big) = \chi^{-1}b(p, 3)$ von $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\big)$ erhalten wir, indem wir $\mathring{a}$, $\mathring{b}$, $\mathring{c}$, $\mathring{d}$, $\mathring{e}$ aus (4.7) anstelle von α, β, γ, δ, ε in (4.33) einsetzen. Eliminieren wir hier q, r, s, t, so finden wir die Gleichung für $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\big)$ im 5-Raum der Parameter von (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned}
&\alpha[(\mathring{m}\mathring{b}^2 + \mathring{m}\mathring{b}\mathring{d}^2 + \mathring{e}^2) + \beta(\mathring{m}\mathring{b} + \mathring{c}^2) + \alpha\beta]^3\\
&= \beta\mathring{m}\big[\big(\mathring{m}\mathring{b}^2 + \mathring{b}\mathring{c}^2 + (\mathring{c}\mathring{d} - \mathring{e})^2\big) + \alpha(\mathring{b} + \mathring{d}^2) + \alpha\beta\big]^3.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Wir schneiden nun mit den Untervarietäten $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$ und $(N \mid P^T_{(1)}W^2L)$. Die erste ist durch $b = 0$, $c = c_0$, $d = d_0$, $e = e_0$ gegeben; dies gibt zusammen mit (4.34) eine einfache Lösung für m, also $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\, P_{(1)}L_{(1)}W^2X\big) = 1$. Die zweite ist durch $m = 0$, $c = c_0$, $e = e_0$ und eine lineare Gleichung in b, d, d^2 gegeben; damit erhält man $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\, P^T_{(1)}W^2L\big) = 0$. Dual dazu findet man $\big(N \mid S(\mathring{\pi})\, L^T_{(1)}X^2P\big) = 0$. Diese drei Schnittzahlen erhält man auch, wenn mit $S(\pi)$ statt $S(\mathring{\pi})$ geschnitten wird, wie durch Anwendung der Transformation (4.12) zu erkennen ist. Mit weiteren Schnittzahlen aus [2] erhalten wir nun die Relation

$$\big(N \mid S(\pi)\big) \sim 2(N \mid P) + 2(N \mid L) - (N \mid P_{(1)}L_{(1)}). \tag{4.35}$$

Entsprechend finden wir

$$\big(M \mid S(\pi)\big) \sim 2(M \mid P) + 2(M \mid L), \tag{4.36}$$

insbesondere

$$\big(M \mid S(\pi)\big) \sim \big(M \mid B(\pi, 1)\big). \tag{4.37}$$

Aus (4.35) sehen wir, daß neben den in [2], 4.1.8., angegebenen Basen auch $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $\big(N \mid S(\pi)\big)$ eine Basis für H_8N_5 ist. Insbesondere gilt

$$(N \mid P^T_{(1)}) \sim \big(N \mid S(\pi)\big) - 3(N \mid L), \quad (N \mid L^T_{(1)}) \sim \big(N \mid S(\pi)\big) - 3(N \mid P), \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
(N \mid \tilde{S}^P) &\sim 4(N \mid P) + 3(N \mid L) + \big(N \mid S(\pi)\big),\\
(N \mid \tilde{S}^L) &\sim 3(N \mid P) + 4(N \mid L) + \big(N \mid S(\pi)\big).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

---

[1]) q, t werden durch r, s ersetzt.

LITERATUR

[1] DRECHSLER, K., und U. STERZ: Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte, Beiträge zur Algebra und Geometrie **6** (1977), 37–54.
[2] DRECHSLER, K., und U. STERZ: Charakteristiken und Schnittzahlformeln für *p-l-s*-Kegelschnitte, Beiträge zur Algebra und Geometrie **8** (1979), 7–31.
[3] DRECHSLER, K., und U. STERZ: Vervollständigung von Kegelschnittmengen, Beiträge zur Algebra und Geometrie **10** (1980), 27–32.
[4] SEVERI, F.: I fondamenti della geometria numerativa, Ann Mat. pura ed appl., ser. IV, **19** (1940), 153–242. (Übers.: GRÖBNER, W.: Grundlagen der abzählenden Geometrie, Math. Forsch. I, 2, Wolfenbüttel 1948).
[5] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie, XV. Lösung des Charakteristikenproblems für Kegelschnitte, Math. Ann. **115** (1938), 645–655.

Manuskripteingang: 16. 11. 1978

VERFASSER:

KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ, Sektion Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg