Beiträge zur Algebra und Geometrie
11 (1981), 95–107

Über die Vollständigkeit induktiver Gruppoide, die zu einer speziellen Klasse endlicher Ringe gehören

BARBARA SCHULTZ

Die Isomorphismen zwischen den Unteralgebren einer Algebra bilden bezüglich der Komposition, der Quellen- und der Zieloperation sowie der Inklusionsrelation ein induktives Gruppoid im Sinne von C. EHRESMANN, das zu dieser Algebra gehörige induktive Gruppoid. In [3] und [4] wurden die zu Gruppen, in [5] die zu endlichen Körpern gehörigen induktiven Gruppoide untersucht. In [6] wurde die Lokalität und Vollständigkeit induktiver Gruppoide, die zu endlichen zyklischen Ringen gehören, untersucht; es wurde bewiesen, daß diese induktiven Gruppoide lokal und vollständig sind. Weiterhin wurde ein Zerlegungssatz für die zu endlichen Ringen gehörigen induktiven Gruppoide angegeben, der auch im folgenden verwendet wird.

In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß das induktive Gruppoid, das zu einem endlichen Ring $\boldsymbol{R}$ gehört, genau dann vollständig ist, wenn die induktiven Gruppoide vollständig sind, die zu den Primärkomponenten von $\boldsymbol{R}$ gehören. Da die Primärkomponenten eines endlichen Ringes Primzahlpotenzordnung haben, wird im folgenden die Vollständigkeit induktiver Gruppoide von Ringen mit Primzahlpotenzordnung — speziell dabei von Ringen, die sich als direkte Summe zyklischer Unterringe darstellen lassen — untersucht.

1. Einleitung

Algebren werden im folgenden mit den Buchstaben $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}$ bezeichnet, ihre Trägermengen mit den entsprechenden Buchstaben $A, B, \ldots, \Gamma$.
Unter einem Ring verstehen wir im folgenden immer einen assoziativen Ring.
Die Isomorphismen zwischen den Unterringen eines Ringes $\boldsymbol{R}$ werden im folgenden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Den Definitions- bzw. Wertebereich des Isomorphismus η bezeichnen wir mit $D(\eta)$ bzw. $W(\eta)$, den identischen Automorphismus von $\boldsymbol{R}$ mit $\varepsilon_{\boldsymbol{R}}$. Die Einschränkung von η mit $D(\eta) = U$ auf einen Unterring $\boldsymbol{U}'$ von $\boldsymbol{R}$ mit $U' \subseteqq U$ wird mit $\eta|U'$ bezeichnet.

Definition. $\boldsymbol{R}$ sei ein endlicher Ring und $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ sei das induktive Gruppoid $[\Gamma(\boldsymbol{R}), \alpha, \beta, \varphi, \leqq]$, für das $\Gamma(\boldsymbol{R})$ die Menge aller Isomorphismen zwischen den Unterringen von $\boldsymbol{R}$ ist, φ die partielle Operation der Komposition dieser Isomorphismen ist, $\alpha(\eta) = \varepsilon_{D(\eta)}$ und $\beta(\eta) = \varepsilon_{W(\eta)}$ für jedes η aus $\Gamma(\boldsymbol{R})$ gilt, und $\leqq$ die mengentheoretische

Inklusion zwischen den Elementen von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist. Das zu $\boldsymbol{R}$ gehörige induktive Gruppoid ist dann $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$.

Definition. Das induktive Gruppoid $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}) = [\Gamma(\boldsymbol{R}), \alpha, \beta, \varphi, \leqq]$ ist *lokal*, wenn für alle $B \subseteqq \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ oder äquivalent für alle Mengen B von identischen Automorphismen aus $\Gamma(\boldsymbol{R})$ das folgende Distributivitätsaxiom erfüllt ist:
Falls das Supremum von B bezüglich $\leqq$ existiert, gilt für jedes η aus $\Gamma(\boldsymbol{R})$

$$\eta \wedge \bigvee B = \bigvee\{\eta \wedge \zeta : \zeta \in B\}.$$

Definition. Eine Teilmenge B von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ heißt *kompatibel*, wenn für alle η und ζ aus B

$$\alpha(\eta \wedge \zeta) = \alpha(\eta) \wedge \alpha(\zeta) \quad \text{und} \quad \beta(\eta \wedge \zeta) = \beta(\eta) \wedge \beta(\xi)$$

gilt.

Definition. $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ ist *vollständig*, wenn von jeder kompatiblen Teilmenge B von $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ das Supremum existiert.

Es sei $\boldsymbol{R}$ ein endlicher Ring. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{R}^+$ den Modul von $\boldsymbol{R}$, mit $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ bzw. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^+)$ den Unterring- bzw. den Untergruppenverband von $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{R}^+$, mit $|R|$ die Anzahl der Elemente von $\boldsymbol{R}$, mit $\boldsymbol{R}_1 \oplus \boldsymbol{R}_2$ die direkte Summe der Ringe $\boldsymbol{R}_1$ und $\boldsymbol{R}_2$.
Eine Gruppe heißt *periodisch* oder auch eine *Torsionsgruppe*, wenn sämtliche Elemente von endlicher Ordnung sind. Ein Ring heißt *periodisch*, wenn sein Modul periodisch ist.
Es sei $\boldsymbol{R}$ ein endlicher Ring. Für jede Primzahl p, die die Ordnung von $\boldsymbol{R}$ teilt, gibt es eine Untergruppe in $\boldsymbol{R}^+$, die von den Elementen der Ordnungen $1, p, p^2, \ldots$ gebildet wird. Diese nennt man *p-Komponente* von $\boldsymbol{R}^+$ und von $\boldsymbol{R}$. Die zu verschiedenen Primzahlen p gehörenden p-Komponenten von $\boldsymbol{R}$ heißen auch *Primärkomponenten* von $\boldsymbol{R}$.
Ein Ring heißt *zyklisch*, wenn sein Modul zyklisch ist. Ist a ein erzeugendes Element eines zyklischen Ringes $\boldsymbol{R}$, so schreiben wir $\boldsymbol{R} = \langle a \rangle$. Ist $\langle a \rangle$ ein Unterring eines Ringes $\boldsymbol{R}$, so ist $\langle a \rangle$ der kleinste Unterring von $\boldsymbol{R}$, der a als Element enthält.

2. Vollständigkeitsbetrachtungen für induktive Gruppoide, die zu einer speziellen Klasse endlicher Ringe gehören

Da sich jeder endliche Ring als direkte Summe seiner Primärkomponenten darstellen läßt [2, S. 333], ist der folgende Satz für die Vollständigkeit der zu endlichen Ringen gehörenden induktiven Gruppoide von besonderer Bedeutung.

Satz 1. *$\boldsymbol{R}$ sei ein endlicher Ring mit $|R| > 1$. Ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}_i)$ für jede Primärkomponente $\boldsymbol{R}_i$ von $\boldsymbol{R}$ vollständig, so ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ vollständig und umgekehrt.*

Beweis. $\boldsymbol{R}$ ist darstellbar als direkte Summe seiner Primärkomponenten: $\boldsymbol{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i$, wobei die $\boldsymbol{R}_i$ für $1 \leqq i \leqq n$ die Primärkomponenten von $\boldsymbol{R}$ sind und $(|R_i|, |R_j|) = 1$ für $i \neq j$ und $1 \leqq i, j \leqq n$ gilt. Nach dem Zerlegungssatz für induktive Gruppoide, die zu endlichen Ringen gehören [6], gilt $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}) = \bigtimes_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}_i)$. Sind die $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R}_i)$ vollständig, so ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nach [3, Satz 6] vollständig und umgekehrt.

Folgerung. Ist $\boldsymbol{R}$ ein endlicher Ring, dessen sämtliche Primärkomponenten zyklisch sind, so ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ vollständig.

Hat $\boldsymbol{R}$ speziell die Ordnung $p_1 p_2 \cdots p_n$ (p_i Primzahlen, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $1 \leqq i$, $j \leqq n$), so sind alle Primärkomponenten von $\boldsymbol{R}$ zyklisch, und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig.

Will man Aussagen über die Vollständigkeit induktiver Gruppoide machen, die zu endlichen Ringen gehören, so braucht man wegen Satz 1 nur die Vollständigkeit induktiver Gruppoide von Ringen der Ordnung p^n (p Primzahl, n natürlich) zu untersuchen, da die Primärkomponenten diese Ordnungen haben. Solche Ringe betrachten wir im folgenden. Wir benötigen dazu die nächsten beiden Sätze.

Satz 2. *Für jeden Ring $\boldsymbol{R}$ und jeden Unterring $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{R}$ gilt: Ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig, so ist auch $\Gamma(\boldsymbol{U})$ vollständig.*

Beweis. Es sei $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig. Dann besitzt jede kompatible Teilmenge von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ein Supremum. Insbesondere besitzt auch jede kompatible Teilmenge K von $\Gamma(\boldsymbol{U})$ ein Supremum ν bezüglich $\Gamma(\boldsymbol{R})$, denn sie ist, da $\boldsymbol{U}$ Unterring von $\boldsymbol{R}$ ist, zugleich eine kompatible Teilmenge von $\Gamma(\boldsymbol{R})$. ν ist eine obere Schranke von K auch bezüglich $\Gamma(\boldsymbol{U})$. Da aber jede obere Schranke ν' von K bezüglich $\Gamma(\boldsymbol{U})$ zugleich obere Schranke von K bezüglich $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist, ist ν das Supremum von K bezüglich $\Gamma(\boldsymbol{R})$.

Satz 3. *Ist $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ eine Kette, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig.*

$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ ist distributiv. Zum Beweis der Vollständigkeit von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ genügt es nach [1] zu zeigen, daß jede zweielementige kompatible Teilmenge von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ein Supremum besitzt. Es sei $\{\eta, \zeta\}$ kompatibel. Da $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ eine Kette ist, kann $\alpha(\eta) \leqq \alpha(\zeta)$ angenommen werden. Dann gilt $\alpha(\eta \wedge \zeta) = \alpha(\eta) \wedge \alpha(\zeta) = \alpha(\eta)$. Aus $\eta \wedge \zeta \leqq \eta$ und $\alpha(\eta \wedge \zeta) = \alpha(\eta)$ folgt $\eta \wedge \zeta = \eta$, also $\eta \leqq \zeta$, daher $\bigvee\{\eta, \zeta\} = \zeta$.

Wir betrachten zuerst als einfachsten Fall induktiver Gruppoide, die zu endlichen nichtzyklischen Ringen gehören, die induktiven Gruppoide, die zu nichtzyklischen Ringen der Ordnung $2^2 = 4$ gehören. Schon die Betrachtung dieser induktiven Gruppoide ist sehr umfangreich (im Gegensatz beispielsweise zur Betrachtung der induktiven Gruppoide, die zu Gruppen der Ordnung 4 gehören, da es nur zwei Gruppen der Ordnung 4 gibt).

Satz 4. *Es sei $\boldsymbol{R}$ ein Ring der Ordnung 4. Wenn $\boldsymbol{R}$ die direkte Summe von Unterringen der Ordnung 2 ist, ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig; es sei denn, $\boldsymbol{R}$ hat drei Unterringe der Ordnung 2, die keine Zeroringe sind, dann ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.*

Beweis. $\boldsymbol{R}$ sei nichtzyklisch, es gelte $\boldsymbol{R} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$. Danng ilt nach [2], Satz 89, $2a = 2b = ab = ba = 0$. Ist $\boldsymbol{R}$ ein Zeroring, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nach [6], Satz 7, vollständig; anderenfalls gilt 1. $a^2 = a$ und $b^2 = b$ oder 2. $a^2 = 0$ und $b^2 = b$ oder 3. $a^2 = a$ und $b^2 = 0$. Im Fall 1 hat $\langle a + b \rangle$ die Ordnung 2, $\boldsymbol{R}$ hat in diesem Fall drei Unterringe der Ordnung 2. Im Fall 2 oder 3 erzeugt $a + b$ keinen Unterring der Ordnung 2. Der Ring $\boldsymbol{R}$ hat dann nur zwei Unterringe der Ordnung 2. Im Fall 2 ist die Abbildung φ über $\langle a \rangle$ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = b$ wegen $\varphi(a^2) = 0 \neq b = \varphi(a) \times \varphi(a)$ kein Isomorphismus von $\langle a \rangle$ auf $\langle b \rangle$. Die beiden Unterringe der Ordnung 2 sind also nicht isomorph. Die identischen Automorphismen sind die einzigen Automorphismen der Unterringe der Ordnung 2, und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist trivialerweise vollständig. Fall 3 erledigt sich analog. Um im Fall 1 zu zeigen, daß $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig ist, nutzen wir die Tatsache aus, daß nicht jeder Automorphismus von $\langle a \rangle^+ \oplus \langle b \rangle^+ = \boldsymbol{R}^+$ auch Automorphismus von $\boldsymbol{R}$ ist. Wir betrachten die Abbildung φ_1 mit $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(a) = a + b$ von $\langle a \rangle$ auf $\langle a + b \rangle$. Diese ist ein Isomorphismus von $\langle a \rangle^+$ auf $\langle a + b \rangle^+$ und wegen $\varphi_1(a^2) = a + b = (a + b)^2 = \varphi_1(a)\, \varphi_1(a)$ auch ein Isomorphismus von $\langle a \rangle$ auf $\langle a + b \rangle$. Wir betrachten die kompatible Teilmenge $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von $\Gamma(\boldsymbol{R})$ mit

$\varphi_2 = \varepsilon_{\langle b\rangle}$. Diese hat in $\Gamma(\boldsymbol{R})$ kein Supremum, denn für eine Abbildung φ über $\boldsymbol{R}$ mit $\varphi(a) = a + b$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(0) = 0$ gilt

$$\varphi(ab) = \varphi(0) = 0 \neq b = (a + b)\, b = \varphi(a)\, \varphi(b).$$

Satz 5. *Ist $\boldsymbol{R}$ ein Ring der Ordnung 4 mit höchstens zwei Unterringen der Ordnung 2, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig.*

Beweis. Hat $\boldsymbol{R}$ genau einen Unterring der Ordnung 2, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nach Satz 3 vollständig. $\boldsymbol{R}$ habe genau zwei Unterringe $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ der Ordnung 2. Wir unterscheiden die Fälle 1. $a^2 = 0$ und $b^2 = b$, 2. $a^2 = a$ und $b^2 = 0$, 3. $a^2 = 0$ und $b^2 = 0$, 4. $a^2 = a$ und $b^2 = b$. Im Fall 1 ist die Abbildung φ über R mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = b$ wegen $\varphi(a^2) = \varphi(0) = 0 \neq b = \varphi(a)\,\varphi(a)$ kein Isomorphismus von $\langle a\rangle$ auf $\langle b\rangle$. Nach Voraussetzung hat $\boldsymbol{R}$ keine weiteren Unterringe der Ordnung 2. Alle Automorphismen sind identische, und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist trivialerweise vollständig. Fall 2 erledigt sich analog. Im Fall 3 ist $(a + b)^2 = ab + ba$. Da $\boldsymbol{R}$ nach Voraussetzung höchstens zwei Unterringe der Ordnung 2 haben soll, müssen im Fall $ab = 0$ die Ungleichheiten $ba \neq 0$, $ba \neq a + b$ gelten; im Fall $ab \neq 0$ gilt $ab \neq a + b$ (sonst $(ab)\, a = (a + b)\, a = ba$, $a(ba) = a\big((ab)\, a\big) = a^2(ba) = 0$, also $ba = 0$, $ab + ba = a + b$) und $ba = 0$ (die anderen Möglichkeiten scheiden aus). Es genügt, den Fall $ab = 0$, $ba \neq 0$, $ba \neq a + b$ zu betrachten. Dieser Fall kann, da $\boldsymbol{R}$ ein Ring ist, wegen $(ba)\, a = ba$ für $ba = b$ und $b(ba) = ba$ für $ba = a$ und andererseits $ba^2 = b^2a = 0$ nicht eintreten. Im Fall 4 gilt $(a + b)^2 = a + b + ab + ba$. Da $\boldsymbol{R}$ nur zwei Unterringe der Ordnung 2 besitzt, gilt $ab \neq ba$. Ebenso gilt $ab + ba \neq a + b$. Wäre $ab = a + b$, so wäre $(ab)\, b = (a + b)\, b = a + b + b = a \neq a + b = ab = ab^2$. Ebensowenig gilt $ba = a + b$. Es bleiben die Möglichkeiten $ab = 0$, $ba = a$ oder $ba = 0$, $ab = a$ (dann $(ab)\, a \neq a(ba)$) und $ab = 0$, $ba = b$ oder $ba = 0$, $ab = b$ (dann $(ba)\, b \neq b(ab)$), welche alle dem Assoziativgesetz widersprechen.

Satz 6. *Ist R ein Ring der Ordnung 4 mit genau drei Unterringen der Ordnung 2, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ genau dann vollständig, wenn $\boldsymbol{R}$ mindestens einen Zerounterring der Ordnung 2 hat.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $\boldsymbol{R}$ nicht zyklisch. Dann gibt es zwei Elemente a und b mit $b \notin \langle a\rangle^+$, $a \neq 0$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Alle drei Unterringe der Ordnung 2 sind Zeroringe. Dann gilt $a^2 = b^2 = (a + b)^2 = 0$, also $ab + ba = 0$, daher auch $ab = ba$. Für $ab = a$ gilt $ab^2 = 0$, jedoch $(ab)\, b = a$; für $ab = b$ ist entsprechend $ba^2 \neq (ba)\, a$; für $ab = a + b$ gilt $ab^2 = 0$, jedoch $(ab)\, b = a + b$. Somit gilt $ab = 0$, $\boldsymbol{R}$ ist Zeroring und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ damit vollständig.

2. Der Fall genau zweier Zerounterringe der Ordnung 2 ist nicht möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ die beiden Zerounterringe der Ordnung 2. Dann gilt $a^2 = b^2 = 0$, $(a + b)^2 = ab + ba \neq 0$. Wäre $ba \neq 0$ bzw. $ab \neq 0$, so wäre $b(aa) \neq (ba)\, a$ bzw. $(aa)\, b \neq a(ab)$. Damit muß $ab = 0$ und $ba = 0$ gelten; Widerspruch zu $ab + ba \neq 0$.

3. $\boldsymbol{R}$ habe genau einen Zerounterring der Ordnung 2, etwa $\langle b\rangle$. Es sei $a^2 = a$. Dann gilt $a + b = (a + b)^2 = a + ab + ba$. Wir unterscheiden vier Unterfälle:

3a). Es gelte $ab = b$, $ba = 0$. Da nur $\langle b\rangle$ Zerounterring der Ordnung 2 ist, ist $\langle b\rangle$ weder zu $\langle a\rangle$ noch zu $\langle a + b\rangle$ isomorph. Es sei η_1 der Isomorphismus von $\langle a\rangle$ auf $\langle a + b\rangle$, $\eta_2 = \varepsilon_{\langle b\rangle}$. Die Abbildung $\varphi = \eta_1 \vee \eta_1^{-1} \vee \eta_2$ ist das Supremum von $\{\eta_1, \eta_2\}$, denn φ ist ein Automorphismus von $\boldsymbol{R}^+$, und es gilt $\varphi(ab) = \varphi(b) = b = (a + b)\, b = \varphi(a)\, \varphi(b)$. Entsprechend besitzt $\{\eta_1^{-1}, \eta_2\}$ ein Supremum. Die übrigen Suprema existieren trivialerweise, $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig.

3b). Es gelte $ab = 0$, $ba = b$. Der Fall erledigt sich wie 3a), nur daß $\varphi(ab) = 0 = \varphi(a)\, \varphi(b)$ gilt. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig.

3c). Es sei $ab = a + b$, $ba = a$. Wegen $a(ab) = a(a + b) = a + a + b = b$, aber $a^2b = ab = a + b$ ist dieser Fall nicht möglich.
3d). Es sei $ab = a$, $ba = a + b$. Wegen $b^2a = 0$, aber $b(ba) = b(a + b) = a + b$ ist auch dieser Fall nicht möglich.

4. $\boldsymbol{R}$ habe keinen Zerounterring der Ordnung 2. Dann gilt $a^2 = a$, $b^2 = b$, $(a + b)^2 = a + b$. Es gilt $ab + ba = 0$, also $ab = ba$.
4a). Es sei $ab = ba = 0$. Dann gilt $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$, und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist nach Satz 4 nicht vollständig.
4b). Es sei $ab = ba = a$. Die Abbildung η_1 über $\langle b\rangle$ mit $\eta_1(0) = 0$, $\eta_1(b) = a + b$ ist ein Isomorphismus von $\langle b\rangle$ auf $\langle a + b\rangle$ wegen $\eta_1(b^2) = \eta_1(b) = a + b = (a + b)^2 = \eta_1(b)\,\eta_1(b)$. Es sei $\eta_2 = \varepsilon_{\langle a\rangle}$. $\{\eta_1, \eta_2\}$ ist kompatibel, hat jedoch kein Supremum, denn für eine obere Schranke φ von $\{\eta_1, \eta_2\}$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(a) = a$, jedoch $\varphi(a)\,\varphi(b) = a(a + b) = a + a = 0$.
4c). Es sei $ab = ba = b$. Analog Fall 4b).
4d). Es sei $ab = ba = a + b$. Wegen $a^2b = ab = a + b$, jedoch $a(ab) = a(a + b) = a + a + b = b$ ist dieser Fall unmöglich.

Als Folgerung ergibt sich

Satz 7. *$\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist für einen Ring der Ordnung 4 genau dann nicht vollständig, wenn er drei Unterringe der Ordnung 2 hat, die alle drei keine Zeroringe sind.*

Da die Betrachtung für Ringe der Ordnung 4 sehr umfangreich war, werden wir im folgenden nur noch nichtzyklische Ringe von Primzahlpotenzordnung betrachten, die direkte Summen zyklischer Unterringe sind. Obwohl sich der Modul eines Ringes der Ordnung p^n als direkte Summe zyklischer Gruppen darstellen läßt, ist ein solcher Ring im allgemeinen keine direkte Summe von Unterringen. Nach [2] ist der Ring $\boldsymbol{R}$ genau dann direkte Summe von Unterringen $\boldsymbol{R}_i$, wenn $\boldsymbol{R}^+$ direkte Summe der $\boldsymbol{R}_i^+$ ist und die $\boldsymbol{R}_i$ Ideale sind.

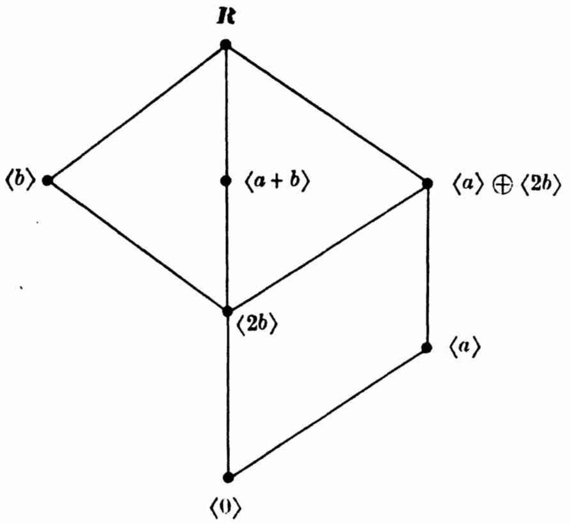
Satz 8. *Es sei $\boldsymbol{R}$ direkte Summe zweier zyklischer Ringe $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ der Primzahlordnung p. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig genau dann, wenn $\boldsymbol{R}$ keine weiteren Unterringe der Ordnung p enthält.*

Beweis. Es gilt $ab = ba = 0$, außerdem kann angenommen werden, daß 1. $a^2 = a$. $b^2 = b$ oder 2. $a^2 = 0$, $b^2 = b$ oder 3. $a^2 = a$, $b^2 = 0$ oder 4. $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ gilt. Im Fall 4 ist R ein Zeroring, der drei Unterringe der Ordnung p enthält; $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist dann nach [6, Satz 7] nicht vollständig. Im Fall 1 gilt $p(a + b) = pa + pb = 0$ und $(a + b)(a + b) = a + b$, d. h., $a + b$ erzeugt einen Unterring der Ordnung p. Der Isomorphismus η_1 von $\langle a\rangle^+$ auf $\langle a + b\rangle^+$ mit $\eta_1(a) = a + b$ ist auch ein Isomorphismus von $\langle a\rangle$ auf $\langle a + b\rangle$, da $\eta_1(a^2) = \eta_1(a) = a + b = (a + b)^2 = \eta_1(a)\,\eta_1(a)$ gilt. Es sei $\eta_2 = \varepsilon_{\langle b\rangle}$. Wegen $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a + b\rangle \cap \langle b\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\eta_1, \eta_2\}$ kompatibel. $\{\eta_1, \eta_2\}$ besitzt kein Supremum, denn für den Automorphismus φ von $\boldsymbol{R}^+$ mit $\varphi(a) = a + b$, $\varphi(b) = b$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(0) = 0 \neq b = b^2 = ab + b^2 = (a + b)\,b = \varphi(a)\,\varphi(b)$. Im Fall 3 (Fall 2 ist analog) gibt es wegen $(a + b)^2 = a$ nur zwei Unterringe der Ordnung p. Diese sind nicht isomorph, denn $\langle b\rangle$ ist ein Zeroring und $\langle a\rangle$ nicht. $\langle a\rangle$ hat nur den identischen Automorphismus. Dieser bildet mit jedem Automorphismus von $\langle b\rangle$ eine kompatible Teilmenge, diese besitzt ein Supremum, da $\varphi(ab) = 0 = \varphi(a)\,\varphi(b)$ für die Vereinigung φ gilt. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist also vollständig.

Wir betrachten nun Ringe der Ordnung p^3 (p prim), die direkte Summen zyklischer Ringe sind. Zunächst geben wir ein Beispiel.

Beispiel. Es sei $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ ein Ring mit $|\langle a\rangle| = 2$, $|\langle b\rangle| = 4$, $a^2 = a$, $b^2 = b$. Es gilt $ab = ba = 0$. Nach [3, Satz 10] ist $\Gamma(\boldsymbol{R}^+) = \Gamma(\langle a\rangle^+ \oplus \langle b\rangle^+)$ nicht vollständig.

Wir zeigen, daß $\Gamma(\boldsymbol{R})$ auch nicht vollständig ist:
$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ hat die Gestalt



Es sei η der Isomorphismus von $\langle b\rangle^+$ auf $\langle a+b\rangle^+$ mit $\eta(b) = a + b$. Wegen $\eta(b^2) = \eta(b) = a + b = a^2 + b^2 = (a + b)^2 = \big(\eta(b)\big)^2$ ist η auch Isomorphismus von $\langle b\rangle$ auf $\langle a + b\rangle$. Bei einem Automorphismus von $\boldsymbol{R}$ läßt sich a nur auf sich abbilden, denn $\langle 2b\rangle$ ist Zeroring, nicht aber $\langle a\rangle$, und weitere Unterringe der Ordnung 2 gibt es nicht. Somit läßt sich η nicht zu einem Automorphismus φ von $\boldsymbol{R}$ erweitern, denn es ist $\varphi(ab) = \varphi(0) = 0 \neq a = a(a + b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$. Wegen $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a\rangle \cap \langle a + b\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\eta, \varepsilon_{\langle a\rangle}\}$ kompatibel, besitzt jedoch kein Supremum. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist also nicht vollständig.

Satz 9. *$\boldsymbol{R}$ sei ein Ring der Ordnung p^3 (p prim), der direkte Summe zyklischer Ringe ist. Ist $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$, os ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ genau dann vollständig, wenn $p = 2$ und genau zwei von den Unterringen $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ und $\langle c\rangle$ Zeroringe sind. Ist $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ mit $|\langle a\rangle| = p$, $|\langle b\rangle| = p^2$, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ genau dann vollständig, wenn $a^2 \neq 0$ und $b^3 = 0$ (äquivalent $b^2 \neq b$) ist.*

Bemerkung. Ein Ring $\boldsymbol{R}$ der zweiten Art, für den $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig ist, hat genau einen Zerounterring der Ordnung p und genau einen Nichtzerounterring der Ordnung p, und $a + b$ erzeugt keinen zyklischen Unterring.

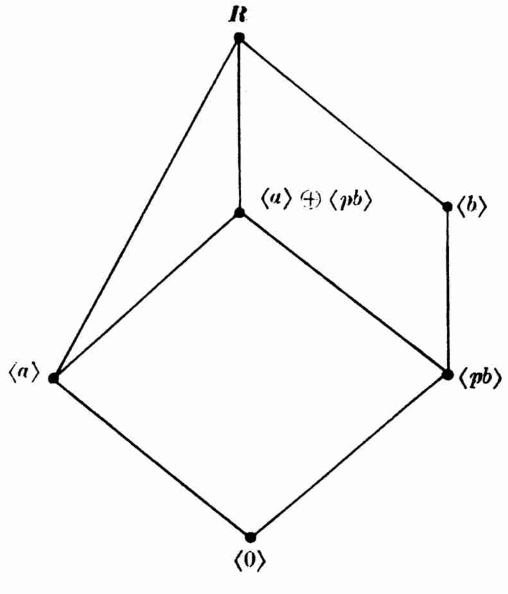
Beweis des Satzes. *Teil Ia.* Es sei $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$ und $p > 2$. Ferner sei $\boldsymbol{U} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$. Nach Satz 8 ist $\Gamma(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle)$ nicht vollständig, wenn $\boldsymbol{U}$ mehr als zwei Unterringe der Ordnung p enthält. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist in diesem Fall auch nicht vollständig. Enthält $\boldsymbol{U}$ nur zwei Unterringe der Ordnung p, so gilt 1. $a^2 = 0$ und $b^2 = b$ oder 2. $a^2 = a$ und $b^2 = 0$; außerdem $c^2 = 0$ oder $c^2 = c$; a, b und c jeweils passend gewählt. Ist $c^2 = 0$, so ist $\langle a\rangle \oplus \langle c\rangle$ im Fall 1 und $\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$ im Fall 2 ein Zeroring der Ordnung p^2. Nach [6, Satz 7] ist $\Gamma(\langle a\rangle \oplus \langle c\rangle)$ bzw. $\Gamma(\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle)$ vollständig, und damit ist nach Satz 2 auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig. Ist $c^2 = c$, so ist $\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$ im Fall 1 und $\langle a\rangle \oplus \langle c\rangle$ im Fall 2 ein Unterring der Ordnung p^2 mit drei Unterringen der Ordnung p. Nach Satz 8 ist $\Gamma(\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle)$ bzw. $\Gamma(\langle a\rangle \oplus \langle c\rangle)$ und damit nach Satz 2 auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Teil Ib. Es sei $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$, $p = 2$. Falls $\boldsymbol{R}$ ein Zeroring ist, ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nach [6, Satz 7] nicht vollständig. Anderenfalls gilt o. B. d. A. 1. $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = 0$ oder 2. $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, $c^2 = c$. Es ist $a + b + a + b = 0$. Im Fall 1 ist $(a + b)^2 = a + b$, im Fall 2 ist $(a + b)^2 = 0$. In beiden Fällen ist $\langle a + b\rangle$ ein Unterring der Ordnung 2. Im Fall 1 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle)$ nach Satz 4 und damit auch $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig. Im Fall 2 ist $\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ ein Zeroring der Ordnung 4. Nach [6, Satz 7] ist $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle)$ vollständig, $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle c\rangle)$ und $\boldsymbol{\Gamma}(\langle b\rangle \oplus \langle c\rangle)$ sind nach Satz 4 vollständig. $\langle c\rangle$ ist als einziger Nichtzerounterring der Ordnung 2 nur zu sich selbst isomorph. Zu jeder kompatiblen Teilmenge von $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ mit Elementen sowohl aus $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle)$ als auch aus $\boldsymbol{\Gamma}(\langle c\rangle)$ gibt es ein Supremum, das durch das Supremum der Elemente aus $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle)$ und durch $\varepsilon_{\langle c\rangle}$ bestimmt ist. Für dieses Supremum φ gilt $\varphi(ac) = 0 = \varphi(a)\,\varphi(c)$ bzw. $\varphi(bc) = 0 = \varphi(b)\,\varphi(c)$, da ein erzeugendes Element eines Zerounterringes der Ordnung 2 nur auf ein ebensolches Element und c nur auf sich abgebildet werden kann.

Teil II. Es sei nun $\boldsymbol{R} = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$, $pb \neq 0$. Sind a und b passend gewählt, so gilt 1. $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ oder 2. $a^2 = a$, $b^2 = 0$ oder 3. $a^2 = 0$, $b^2 = pb$ oder 4. $a^2 = a$, $b^2 = pb$ oder 5. $a^2 = 0$, $b^2 = b$ oder 6. $a^2 = a$, $b^2 = b$.

Im Fall 1 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nach [6, Satz 7] nicht vollständig, da dann $\boldsymbol{R}$ ein nichtzyklischer Zeroring der Ordnung p^3 ist. In allen sechs Fällen ist $\langle pb\rangle$ ein Zeroring der Ordnung p wegen $pb \cdot pb = 0$.

Teil IIa. Es sei $p > 2$. Im Fall 3 und 5 ist $\langle a\rangle \oplus \langle pb\rangle$ ein Zerounterring. $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle pb\rangle)$ und damit auch $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ sind in diesen Fällen nach [6, Satz 7] bzw. Satz 2 nicht vollständig. Im Fall 6 ist $\langle a + b\rangle$ wegen $a + b = (a + b)^2$ ein zyklischer Unterring der Ordnung p^2. Es sei η der Isomorphismus von $\langle b\rangle$ auf $\langle a + b\rangle$ mit $\eta(b) = a + b$. Wegen $\langle b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle a + b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\eta, \varepsilon_{\langle a\rangle}\}$ kompatibel, hat jedoch kein Supremum, da $\varphi(ab) = 0 \neq a = a(a + b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ für eine η und $\varepsilon_{\langle a\rangle}$ umfassende Abbildung φ gilt. $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ ist also nicht vollständig. Im Fall 4 hat $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ das Diagramm



Die beiden Unterringe der Ordnung p sind nicht isomorph, da genau einer Zeroring ist. Der einzige Automorphismus von $\langle a\rangle$ ist $\varepsilon_{\langle a\rangle}$. Nach Satz 4 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a\rangle \oplus \langle pb\rangle)$

vollständig. Eine kompatible Menge von Elementen von $\Gamma(\langle a\rangle \oplus \langle pb\rangle)$ und $\Gamma(\langle b\rangle)$ besitzt ein Supremum φ, definiert durch $\varepsilon_{\langle a\rangle}$ und den vorgegebenen Automorphismus von $\langle b\rangle$. In allen Fällen gilt $\varphi(ab) = 0 = \varphi(a)\,\varphi(b)$. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig. Im Fall 2 ist der Beweis ganz analog zu Fall 4.

Teil IIb. Es sei $p = 2$. Im Fall 5 gibt es zu dem Isomorphismus η von $\langle a\rangle$ auf $\langle a + 2b\rangle$ und zu $\varepsilon_{\langle b\rangle}$ ($\{\eta, \varepsilon_{\langle b\rangle}\}$ ist kompatibel) keine gemeinsame obere Schranke in $\Gamma(\boldsymbol{R})$, da $\varphi(ab) = 0 \neq 2b = \varphi(a)\,\varphi(b)$ für eine beide Isomorphismen umfassende Abbildung φ gilt. $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist nicht vollständig. Im Fall 3 ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig, da für den Automorphismus η von $\langle a + b\rangle$ mit $\eta(a + b) = a + 3b$ zwar die Menge $\{\varepsilon_{\langle a\rangle}, \varepsilon_{\langle b\rangle}, \eta\}$ kompatibel ist (es ist $\eta(2b) = 2b$), aber $\varphi(a + b) = a + 3b \neq a + b = \varphi(a) + \varphi(b)$ für deren Vereinigung φ gilt. Für die Fälle 2, 4 und 6 gilt Entsprechendes wie in Teil IIa.

Satz 10. *$\boldsymbol{R}$ sei ein Ring der Ordnung p^n (p prim, $n > 3$), der direkte Summe von mindestens drei zyklischen Unterringen ist. Dann ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.*

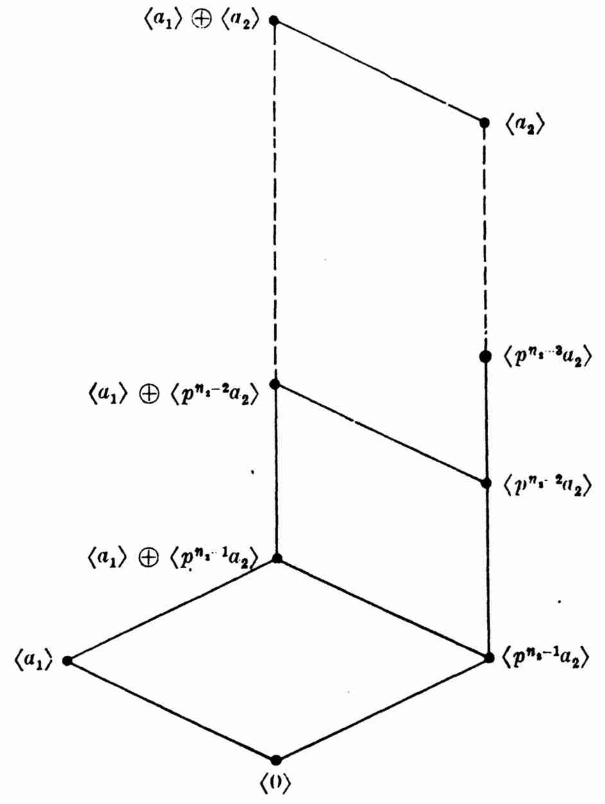
Beweis. Es sei $U = \langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle \oplus \langle a_3\rangle$ ein Unterring von $\boldsymbol{R}$; a_i habe die Ordnung p^{n_i} ($i = 1, 2, 3$), $n_1 \geqq 2$. Es sei $V = \langle p^{n_1-1}a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-1}a_2\rangle \oplus \langle p^{n_3-1}a_3\rangle$. Für $p > 2$ ist $\Gamma(V)$ nach Satz 9 nicht vollständig, da V die direkte Summe von drei Ringen der Ordnung p ist. Für $p = 2$ ist $\Gamma(V)$ nach Satz 9 dann nicht vollständig, wenn o. B. d. A. $n_3 = 1$, $a_3^2 = a_3$ und entweder $n_2 \geqq 2$ oder $a_2^2 = 0$ bei $n_2 = 1$ gilt. Es sei nun $p = 2$ und $a_1^2 = 2^{j_1}a_1$ ($0 \leqq j_1 \leqq n_1$); $a_2^2 = 2^{j_2}a_2$ ($0 \leqq j_2 \leqq n_2$) für $n_2 \geqq 2$ oder $2a_2 = 0$, $a_2^2 = 0$; $2a_3 = 0$; $a_3^2 = a_3$. $\langle a_2\rangle$ enthält einen Zerounterring der Ordnung 2. Ist $\langle a_1\rangle$ ein Zeroring, so ist $\Gamma(\langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle)$ nach [6, Satz 7] nicht vollständig, da $\langle a_2\rangle$ einen Zerounterring der Ordnung 2 enthält. Ist $\langle a_1\rangle$ kein Zeroring, so ist $\langle 2^{n_1-2}a_1\rangle$ im Fall $n_1 > 3$ ein Zerounterring der Ordnung 4, da $2^{n_1-2}a_1 \cdot 2^{n_1-2}a_1 = 0$ gilt. $\Gamma(\langle 2^{n_1-2}a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle)$ und damit auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist also nicht vollständig. Dasselbe gilt für $n_1 = 3$ und $0 < j_1 < n_1$. Für $n_1 = 3$ und $j_1 = 0$ ist $a_1^2 = a_1$. Ebenso wie $\langle a_1\rangle$ ist $\langle a_1 + a_3\rangle$ ein Unterring der Ordnung 8 von $\langle a_1\rangle \oplus \langle a_3\rangle$. Es gilt $(a_1 + a_3)^2 = a_1 + a_3$. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_1\rangle$ auf $\langle a_1 + a_3\rangle$ mit $\eta(a_1) = a_1 + a_3$. Die Menge $\{\varepsilon_{\langle a_3\rangle}, \eta\}$ ist wegen $\langle a_3\rangle \cap \langle a_1\rangle = \langle a_3\rangle \cap \langle a_1 + a_3\rangle = \langle 0\rangle$ kompatibel, hat aber kein Supremum, da $\varphi(a_1a_3) = 0 \neq a_3 = (a_1 + a_3)\,a_3 = \varphi(a_1)\,\varphi(a_3)$ für eine $\varepsilon_{\langle a_3\rangle}$ und η umfassende Abbildung φ gilt. Es sei $n_1 = 2$. $\langle 2a_1\rangle$ ist ein Zerounterring der Ordnung 2 von $\langle a_1\rangle$. Es kann $n_2 = 2$ oder $n_2 = 1$ angenommen werden. Es sei $n_2 = 2$. Ist $\langle a_2\rangle$ ein Zeroring, so ist $\langle 2a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle$ ein nichtzyklischer Zeroring der Ordnung 8 und $\Gamma(\langle 2a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle)$ nach [6, Satz 7] nicht vollständig. Ist $\langle a_2\rangle$ kein Zeroring, also $4a_1 = 0$, $a_1^2 = 2a_1$ oder $a_1^2 = a_1$; $4a_2 = 0$, $a_2^2 = 2a_2$ oder $a_2^2 = a_2$, so ist $\Gamma(\langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle)$ nicht vollständig entsprechend Teil b_5) des Beweises, der zu Satz 11 gebracht werden wird. Es bleibt der Fall $n_2 = 1$. Ist $j_1 = 0$, also $a_1^2 = a_1$, so ist $\Gamma(\langle a_1\rangle \oplus \langle a_3\rangle)$ nach Teil IIb, Fall 6 des Beweises zu Satz 9 nicht vollständig. Ist $j_1 = 1$, also $a_1^2 = 2a_1$, so ist $\Gamma(\langle a_2\rangle \oplus \langle a_1\rangle)$ nach Teil IIb, Fall 3 des Beweises zu Satz 9 nicht vollständig.

Satz 11. *$\boldsymbol{R}$ sei ein Ring der Ordnung p^n (p prim, $n > 3$), der direkte Summe von zwei zyklischen Ringen ist: $\boldsymbol{R} = \langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle$. Dann ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig, außer wenn (bis auf eine Vertauschung der Variablen) $pa_1 = 0$, $p^{n_2}a_2 = 0$ ($n_2 \geqq 3$), $a_1^2 = a_1$, $a_2^2 = p^{j_2}a_2$ ($0 < j_2 \leqq n_2$) gilt.*

Bemerkung. Ist $R = \langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle$ und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig, so hat $\boldsymbol{R}$ genau einen Zerounterring der Ordnung p und genau einen Nichtzerounterring der Ordnung p, der von $a_1 + a_2$ erzeugte Unterring ist nicht zyklisch.

Beweis des Satzes. Es sei p^{n_i} die Ordnung von $\langle a_i\rangle$. Es gelte $a_i^2 = p^{j_i}a_i$ ($1 \leqq i \leqq 2$, $0 \leqq j_i \leqq n_i$). Zunächst sei $p > 2$. Für $n_1, n_2 > 1$ sind beide $\langle p^{n_i-1}a_i\rangle$ Zerounterringe der Ordnung p wegen $p(p^{n_i-1}a_i) = 0$ und $(p^{n_i-1}a_i)\,(p^{n_i-1}a_i) = p^{2n_i-2}a_i^2 = p^{2n_i-2}p^{j_i}a_i$

$= p^{n_i-2+j_i}p^{n_i}a_i = 0$ wegen $2n_i - 2 + j_i \geqq n_i$ und $p^{n_i}a_i = 0$ $(i = 1, 2)$. Nach [6, Satz 7] ist also $\boldsymbol{\Gamma}(\langle p^{n_1-1}a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-1}a_2\rangle)$ nicht vollständig, damit auch nicht $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$. Es sei nun o. B. d. A. $n_1 = 1$, $n_2 > 2$. Im Fall $a_1^2 = 0$ sei $\boldsymbol{U} = \langle a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-1}a_2\rangle$. $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ (nach [6, Satz 7]), also auch $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$, ist nicht vollständig. Im Fall $a_1^2 = a_1$ und $a_2^2 = a_2$ ist $\langle a_1 + a_2\rangle$ ein Unterring der Ordnung p^{n_2} von $\boldsymbol{R}$. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + a_2\rangle$ mit $\eta(a_2) = a_1 + a_2$. Wegen $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt aber kein Supremum, da $\varphi(a_1)\,\varphi(a_2) = a_1(a_1 + a_2) = a_1 \neq 0 = \varphi(0) = \varphi(a_1a_2)$ für die Vereinigung φ gilt. $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ ist nicht vollständig. Es sei nun $a_1^2 = a_1$, $a_2^2 = p^{j_2}a_2$ $(0 < j_2 \leqq n_2)$. Der einzige Automorphismus von $\langle a_1\rangle$ ist $\varepsilon_{\langle a_1\rangle}$. Da $\langle a_1\rangle$ kein Zeroring der Ordnung p ist, wohl aber $\langle p^{n_2-1}a_2\rangle$, und weitere Unterringe der Ordnung p nicht existieren, gibt es keine Isomorphismen zwischen Unterringen der Ordnung p. Nach Fall 3 des Beweises zu Satz 8 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-1}a_2\rangle)$, und nach Fall 2, Teil IIa, des Beweises zu Satz 9 ist $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-2}a_2\rangle)$ vollständig $(n_2 > 2$, $j_2 > 0$ nach Voraussetzung). Zu je einem Automorphismus η_1 von $\langle a_1\rangle$ und je einem Automorphismus η_2 von $\langle p^{n_2-i}a_2\rangle$ $(1 \leqq i < n_2)$ gibt es ein Supremum η, einen Automorphismus von $\langle a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-i}a_2\rangle$, definiert durch $\eta(a_1) = \eta_1(a_1)$ und $\eta(p^{n_2-i}a_2) = \eta_2(p^{n_2-i}a_2)$; es gilt nämlich $\eta\big(a_1(p^{n_2-i}a_2)\big) = \eta(0) = 0 = \eta(a_1)\,\eta(p^{n_2-i}a_2)$. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ hat als Diagramm



$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ ist vollständig.

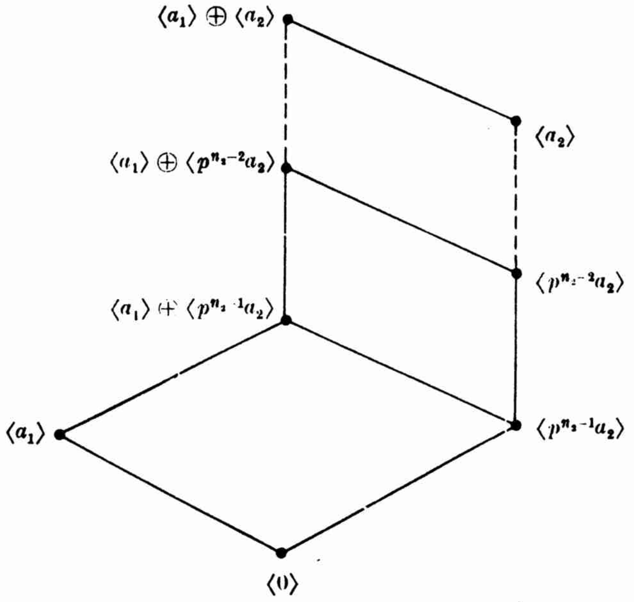
b) Es sei $p = 2$. Wir unterscheiden die Fälle b_1) bis b_5).

b_1) Es sei $n_1 > 1$ und $n_2 \geqq 4$. Ferner sei $\boldsymbol{U} = \langle 2^{n_1-1}a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-2}a_2\rangle$. Der erste Summand ist ein Zeroring der Ordnung 2, da $2(2^{n_1-1}a_1) = 0$ und $2^{n_1-1}a_1 \cdot 2^{n_1-1}a_1 = 2^{2n_1-2}a_1^2 = 0$

für $n_1 > 1$ ist. Der zweite Summand ist wegen $2^{n_2-2}a_2 \cdot 2^{n_2-2}a_2 = 2^{2n_2-4}a_2^2 = 2^{n_2-4+j_2}2^{n_2}a_2 = 0$ für $n_2 \geqq 4$ ein Zeroring der Ordnung 4. Nach [6, Satz 7] ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ nicht vollständig, und damit $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ auch nicht.

b_2) Es sei $n_1 = 1$ und $n_2 \geqq 4$. Ferner sei $U = \langle a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-2}a_2\rangle$. Der zweite Summand ist ein Zeroring der Ordnung 4; der erste hat die Ordnung 2; entweder ist er Zeroring, dann ist $\Gamma(U)$ nach [6, Satz 7] nicht vollständig, oder er ist kein Zeroring und zu $\Gamma\langle 2^{n_2-1}a_2\rangle$ nicht isomorph. Der identische Automorphismus ist sein einziger Automorphismus. $\langle a_1\rangle$ und $\langle 2^{n_2-1}a_2\rangle$ sind die einzigen Unterringe von $\boldsymbol{R}$ der Ordnung 2. Für $j_2 = 0$ erzeugt $a_1 + a_2$ einen zyklischen Unterring der Ordnung p^{n_2} von $\boldsymbol{R}$. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + a_2\rangle$ mit $\eta(a_2) = a_1 + a_2$. Wegen $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt aber kein Supremum, da $\varphi(a_1a_2) = 0 \neq a_1 = a_1(a_1 + a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$ für die Vereinigung φ gilt.

Es sei nun $a_2^2 = 2^{j_2}a_2$ $(0 < j_2 \leqq n_2)$. Dann hat $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ das folgende Diagramm:



$\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-1}a_2\rangle)$ ist nach Fall 3 des Beweises zu Satz 8 und $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-2}a_2\rangle)$ ist nach Fall 2, Teil II b, des Beweises zu Satz 9 vollständig. Eine Menge von je einem Element von $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle)$ und $\boldsymbol{\Gamma}(\langle 2^{n_2-i}a_2\rangle)$ $(0 < i \leqq n_2)$ besitzt einen Automorphismus φ von $\langle a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-i}a_2\rangle$ als Supremum, für welchen $\varphi(a_1 \cdot 2^{n_2-i}a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(2^{n_2-i}a_2) = 0$ gilt.

b_3) Es sei $n_1 > 1$ und $n_2 = 3$.

b_{31}) Es sei $n_1 \geqq 4$ und $n_2 = 3$. Für $n_1 \geqq 4$ ist $U = \langle 2^{n_1-2}a_1\rangle \oplus \langle 2^2a_2\rangle$ ein nichtzyklischer Zerounterring von $\boldsymbol{R}$ der Ordnung 8, denn es gilt $2^{n_1-2} \cdot 2^{n_1-2}a_1^2 = 2^{2n_1-4}a_1^2 = 0$ (wegen $n_1 \geqq 4$) und $2^2a_2 2^2a_2 = 0$. Nach Satz [6, Satz 7] ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ nicht vollständig.

b_{32}) Es sei $n_1 = 2$ oder $= 3$, $n_2 = 3$.

b_{321}) Es sei $j_2 > 0$, und $U = \langle 2^{n_1-1}a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-2}a_2\rangle$ ist wegen $2^{n_1-1}a_1 \cdot 2^{n_1-1}a_1 = 0$ und $2^{n_2-2}a_2 \cdot 2^{n_2-2}a_2 = 2^{2n_2-4+j_2}a_2 = 0$ ein nichtzyklischer Zeroring der Ordnung 8. Nach [6, Satz 7] ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ und damit auch $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

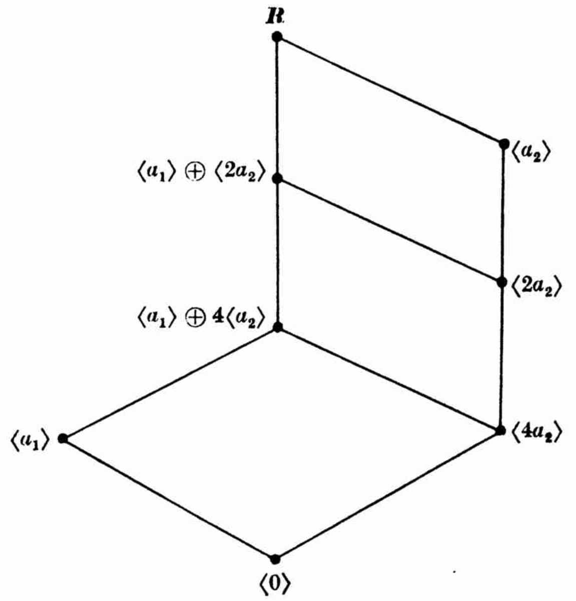
b_{322}) Es sei $j_2 = 0$. Für $j_1 = 0$, d. h. $a_1^2 = a_1$ ist $\langle a_1 + a_2\rangle$ ein Unterring der Ordnung 8. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + a_2\rangle$ mit $\eta(a_2) = a_1 + a_2$. Wegen

$\langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, aber die Vereinigung φ ist kein Supremum wegen $\varphi(a_1 a_2) = 0 \neq a_1 = a_1(a_1 + a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$. Es sei nun $j_1 > 0$, dann ist $\langle 2^{n_1-2}a_1\rangle$ für $n_1 = 3$ ein Zeroring der Ordnung 4 wegen $(2^{n_1-2}a_1)^2 = 2^{2n_1-4+j_1}a_1 = 0$. Dann ist $\langle 2^{n_1-2}a_1\rangle \oplus \langle 2^{n_2-1}a_2\rangle$ ein nichtzyklischer Zeroring der Ordnung 8 und das dazugehörige Gruppoid nach [6, Satz 7] nicht vollständig. Für $n_1 = 2$ ist $a_1^2 = 0$ oder $a_1^2 = 2a_1$. Im ersten Fall ist $\langle a_1\rangle$ ein Zeroring der Ordnung 4, $\langle 2^{n_2-1}a_2\rangle$ ein Zeroring der Ordnung 2, die direkte Summe beider ein nichtzyklischer Zerounterring der Ordnung 8 von $\boldsymbol{R}$, deren Gruppoid nach [6, Satz 7] nicht vollständig ist. Im zweiten Fall erzeugt $a_1 + 2a_2$ einen zyklischen Unterring der Ordnung 4. Es sei η der Isomorphismus von $\langle 2a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + 2a_2\rangle$ mit $\eta(2a_1) = a_1 + 2a_2$. Wegen $\langle a_1\rangle \cap \langle 2a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + 2a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt jedoch kein Supremum, da $\varphi(a_1 \cdot 2a_2) = (0) = \varphi\, 0 \neq 2a_1 = a_1(a_1 + 2a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$ für die Vereinigung φ gilt. $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ und damit auch $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ sind nicht vollständig.

b$_4$) Es sei $n_1 = 1$ und $n_2 = 3$.

b$_{41}$) Ist $a_1^2 = 0$, dann ist $\boldsymbol{U} = \langle a_1\rangle \oplus \langle 2a_2\rangle$ für $j_2 > 0$ ein nichtzyklischer Zerounterring von $\boldsymbol{R}$ der Ordnung 8 und $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U})$ nicht vollständig. Für $j_2 = 0$ erzeugt $a_1 + 4a_2$ wegen $(a_1 + 4a_2)^2 = 0$ einen Zeroring der Ordnung 2. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_1\rangle$ auf $\langle a_1 + 4a_2\rangle$. Wegen $\langle a_2\rangle \cap \langle a_1\rangle = \langle a_2\rangle \cap \langle a_1 + 4a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_2\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt jedoch kein Supremum, da $\varphi(a_1 a_2) = \varphi\,(0) = 0 \neq 4a_2 = 4a_2^2 = (a_1 + 4a_2)\, a_2 = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$ für die Vereinigung φ gilt. Demnach ist $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

b$_{42}$) Es sei $a_1^2 = a_1$ und $a_2^2 = a_2$. Dann erzeugt $a_1 + a_2$ einen zyklischen Unterring der Ordnung 8 wegen $(a_1 + a_2)^2 = a_1 + a_2$ und $8(a_1 + a_2) = 0$. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + a_2\rangle$ mit $\eta(a_2) = a_1 + a_2$. Wegen $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt aber kein Supremum, da $\varphi(a_1 \cdot a_2) = 0 \neq a_1 = a_1(a_1 + a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$ für die Vereinigung φ gilt. Ist $a_1^2 = a_1$ und $j_2 > 0$, so gibt es nur zwei nichtisomorphe Unterringe von $\boldsymbol{R}$ der Ordnung 2. $\langle 4a_2\rangle$ und $\langle 2a_2\rangle$ sind Zerounterringe, $\langle a_1\rangle$ ist kein Zeroring. $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle 4a_2\rangle)$ ist nach Fall 3 des Beweises zu Satz 4 und $\boldsymbol{\Gamma}(\langle a_1\rangle \oplus \langle 2a_2\rangle)$ ist nach Satz 9 vollständig. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R})$ hat das folgende Diagramm:



Jede Menge aus je einem Automorphismus aus $\Gamma(\langle a_1\rangle)$ und aus $\Gamma(\langle a_2\rangle)$ hat als Supremum einen Automorphismus φ von $\boldsymbol{R}$ mit $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2) = 0$.

b_5) Es sei $n_1 > 1$ und $n_2 = 2$. (Wegen $n \geqq 4$ ist $n_1 \geqq 2$.) Der Fall $n_1 \geqq 4$ und $n_2 = 2$ entspricht dem analogen Fall in b_1). Der Fall $n_1 = 3$ und $n_2 = 2$ entspricht dem Fall $n_1 = 2$ und $n_2 = 3$ in b_3). Es sei also $n_1 = n_2 = 2$. $\langle 2a_1\rangle$ und $\langle 2a_2\rangle$ sind Zerounterringe der Ordnung 2 von $\boldsymbol{R}$. Ist $\langle a_1\rangle$ oder $\langle a_2\rangle$ Zeroring, so ist $\boldsymbol{U}_1 = \langle a_1\rangle \oplus \langle 2a_2\rangle$ oder $\boldsymbol{U}_2 = \langle 2a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle$ Zerounterring der Ordnung 8 von $\boldsymbol{R}$. Nach [6, Satz 7] ist $\Gamma(\boldsymbol{U}_1)$ oder $\Gamma(\boldsymbol{U}_2)$ nicht vollständig. Es seien $\langle a_1\rangle$ und $\langle a_2\rangle$ beide keine Zeroringe. Ist $a_1^2 = a_1$ oder $a_2^2 = a_2$, so ist $\boldsymbol{U}_1$ oder $\boldsymbol{U}_2$, definiert wie oben, nach Satz 9 nicht vollständig. Es bleibt der Fall $a_1^2 = 2a_1$ und $a_2^2 = 2a_2$. $a_1 + a_2$ erzeugt einen zyklischen Unterring der Ordnung 4 von $\boldsymbol{R}$. Es sei η der Isomorphismus von $\langle a_2\rangle$ auf $\langle a_1 + a_2\rangle$ mit $\eta(a_2) = a_1 + a_2$. Wegen $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle = \langle a_1\rangle \cap \langle a_1 + a_2\rangle = \langle 0\rangle$ ist $\{\varepsilon_{\langle a_1\rangle}, \eta\}$ kompatibel, besitzt aber kein Supremum, da $\varphi(a_1a_2) = 0 \neq 2a_1 = a_1(a_1 + a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2)$ für die Vereinigung φ gilt. Also ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Folgerungen 1. Enthält ein Ring $\boldsymbol{R}$ als Unterring der Ordnung p^n (p prim, $n \geqq 4$) eine direkte Summe von drei zyklischen Ringen, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

2. Enthält ein Ring $\boldsymbol{R}$ als Unterring eine direkte Summe von Unterringen $\langle a_1\rangle$ der Ordnung p^{n_1} und $\langle a_2\rangle$ der Ordnung p^{n_2} mit $a_i^2 = p^{i_i}a_i$ (p prim, $1 \leqq i \leqq 2$) und gilt im Fall $a_1^2 = a_1$, $n_1 = 1$ auch $a_2^2 = a_2$, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Satz 12. *Enthält ein Ring $\boldsymbol{R}$ zwei Ideale der Ordnung p (p prim, ungerade), von denen nicht genau einer Zeroring ist, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.*

Beweis. Es seien $\langle a_1\rangle$ und $\langle a_2\rangle$ zwei solche Ideale. Nach [2, Satz 89] ist dann $a_1a_2 = a_2a_1 = 0$ und $\langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle$ ein Unterring der Ordnung p^2 von $\boldsymbol{R}$. $a_1 + a_2$ erzeugt einen zyklischen Unterring der Ordnung p, der ebenfalls wie $\langle a_1\rangle$ und $\langle a_2\rangle$ Zeroring bzw. ebenfalls kein Zeroring ist. Nach Satz 8 ist $\Gamma(\langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle)$ und damit auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Satz 13. *Enthält ein Ring $\boldsymbol{R}$ zwei Ideale der Ordnung 2, die beide keine Zeroringe sind, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.*

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 12 ist die direkte Summe beider Ideale ein Nichtzeroring und Unterring von $\boldsymbol{R}$, dessen induktives Gruppoid nach Satz 4 nicht vollständig ist; daher ist auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Satz 14. *Enthält ein Ring $\boldsymbol{R}$ zwei Ideale der Ordnung p^{n_i} (p prim und ungerade, $n_i \geqq 2$), so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.*

Beweis. Es seien $\langle a_1\rangle$ und $\langle a_2\rangle$ zwei solche Ideale. Ihre direkte Summe ist nach [2, Satz 89] ein Unterring $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{Z} = \langle p^{n_1-1}a_1\rangle \oplus \langle p^{n_2-1}a_2\rangle$ ist ein Zerounterring der Ordnung p^2 (p ungerade) von $\boldsymbol{U}$. Nach [6, Satz 7] ist $\Gamma(\boldsymbol{Z})$ und damit auch $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Bemerkung. Ist $\boldsymbol{R}$ ein endlicher Ring der Ordnung n und ist $p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von n, so läßt sich $\boldsymbol{R}$ als direkte Summe der Primärkomponenten der Ordnungen $p_i^{m_i}$ ($1 \leqq i \leqq n$) darstellen. Sind alle Primärkomponenten zyklisch, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ vollständig. Hat eine der Primärkomponenten $\boldsymbol{R}_i$ mit $|\boldsymbol{R}_i| = p_i^{n_i}$, $n_i \geqq 4$, eine direkte Summe von drei zyklischen Ringen als Unterring, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig. Hat eine Primärkomponente eine direkte Summe von zwei zyklischen Ringen als Unterring mit den in Folgerung 2 angegebenen Eigenschaften, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R})$ nicht vollständig.

Satz 15. *Es sei $\boldsymbol{R}$ ein endlicher Ring. $\boldsymbol{U}$ sei genau dann Unterring von $\boldsymbol{R}$, wenn $\boldsymbol{U}^+$ Untermodul von $\boldsymbol{R}^+$ ist. Dann gilt: $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig genau dann, wenn $\boldsymbol{R}$ zyklisch* *oder die direkte Summe eines zyklischen Ringes ungerader Ordnung und des nichtzyklischen Zeroringes der Ordnung 4 ist.*

Beweis. Es gilt $\boldsymbol{R} = \bigoplus_{i=1}^{m} \boldsymbol{R}_i$, wobei $\boldsymbol{R}_i$ für m verschiedene Primzahlen p_i eine Primärkomponente der Ordnung $p_i^{n_i}$ ist. Ist $\boldsymbol{R}_i$ zyklisch, so ist $\Gamma(\boldsymbol{R}_i)$ vollständig. Sind alle Primärkomponenten zyklisch, so auch $\boldsymbol{R}$, und $\Gamma(\boldsymbol{R})$ ist vollständig. Ist $\boldsymbol{R}_i^+$ nicht zyklisch, so ist $\boldsymbol{R}_i^+$ die direkte Summe von zwei Untermoduln $\boldsymbol{A}^+$ und $\boldsymbol{B}^+$. Diese Untermoduln $\boldsymbol{A}^+$ und $\boldsymbol{B}^+$ enthalten je einen Untermodul $\boldsymbol{A}^{*+}$ bzw. $\boldsymbol{B}^{*+}$ der Ordnung p_i, daher ist $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ ein nichtzyklischer Unterring von $\boldsymbol{R}$ der Ordnung p_i^2. Für $p_i \neq 2$ ist $\Gamma(\boldsymbol{U})$ nach Satz 8 nicht vollständig, da $\boldsymbol{U}$ mehr als zwei Unterringe der Ordnung p_i enthält. Ist $p_i = 2$, so enthält $\boldsymbol{U}$ drei Unterringe der Ordnung 2, die alle drei keine Zeroringe oder alle drei Zeroringe sind. Im ersten Fall ist $\Gamma(\boldsymbol{U})$ nach Satz 4 nicht vollständig. Im zweiten Fall ist $\Gamma(\boldsymbol{U})$ vollständig und $\boldsymbol{U}$ ein Zeroring. Ist $|\boldsymbol{R}_i| > 4$, so enthält $\boldsymbol{R}_i^+$ einen Untermodul $\boldsymbol{V}^+$ der Ordnung 8, der direkte Summe eines Untermoduls der Ordnung 2 und eines Untermoduls der Ordnung 4 ist oder direkte Summe von drei zyklischen Untermoduln der Ordnung 2 ist. $\Gamma(\boldsymbol{V})$ ist dann, da jeder Untermodul von $\boldsymbol{V}^+$ Modul eines Unterringes von $\boldsymbol{V}$ ist, nach Satz 9 nicht vollständig und ebenso $\Gamma(\boldsymbol{R})$.

LITERATUR

[1] MICHLER, L., und J. SCHRECKENBERGER: Über die Vollständigkeit induktiver Gruppoide, Studien zur Algebra und ihre Anwendungen **7** (1979), 61–83.

[2] RÉDEI, L.: Algebra I, Leipzig 1959 (Übersetzung aus dem Ungarischen).

[3] FICHTNER, B.: Über die zu Gruppen gehörenden induktiven Gruppoide I, Math. Nachr. **44** (1970), 313–339.

[4] FICHTNER-SCHULTZ, B.: Über die zu Gruppen gehörigen induktiven Gruppoide II, Math. Nachr. **48** (1971), 275–278.

[5] SCHULTZ, B.: Über die induktiven Gruppoide der partiellen Automorphismen von endlichen Körpern, Math. Nachr. **86** (1978), 45–50.

[6] SCHULTZ, B.: Über die zu endlichen zyklischen Ringen gehörigen induktiven Gruppoide, Wiss. Z. TH Karl-Marx-Stadt **20** (1978), 925–934.

Manuskripteingang: 7. 11. 1978

VERFASSER:

BARBARA SCHULTZ, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt