

## Werk

**Titel:** Eine Variante zur Bestimmung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung

**Autor:** BEYER, G.

**Jahr:** 1981

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0011|log13](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0011|log13)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Eine Variante zur Bestimmung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung

GERT BEYER

### 1. Einleitung

In der Literatur werden verschiedene Verfahren zur punktweisen bzw. linienelementweisen Bestimmung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung angegeben. In diesem Beitrag wird eine Variante vorgestellt, die eine stückweise Parameterdarstellung der Schnittkurve liefert. Es wird dabei vorausgesetzt, daß ein nichtsingulärer Punkt  $X_0$  der Schnittkurve bekannt ist, d. h. insbesondere, daß eine reelle Schnittkurve der beiden Flächen zweiter Ordnung existiert. In [1] wurde gezeigt, daß in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung, deren Trägerkurve einen nichtsingulären Punkt  $X_0$  enthält, eine Fläche  $Q_C$  existiert, die sich aus Geraden erzeugen läßt und die Tangente in  $X_0$  an die Schnittkurve enthält. Nimmt man diese Geraden als Parameterlinien einer Parameterdarstellung dieser Fläche, so läßt sich der Schnitt von zwei Flächen zweiter Ordnung auf den Schnitt von Geraden mit einer Fläche zweiter Ordnung zurückführen. Im folgenden wird, falls  $Q_C$  eine Regelfläche mit zwei Erzeugendenscharen ist, eine Parameterdarstellung für  $Q_C$  konstruiert und daraus eine stückweise Parameterdarstellung der Schnittkurve abgeleitet.

Eine Regelfläche des Büschels erhält man auch, indem man die ausgearteten Quadriken aufsucht. Ist nicht bereits eine der beiden Quadriken ausgeartet, so haben die ausgearteten Quadriken die Gleichung  $x^T(\lambda A + B)x = 0$  mit  $|\lambda A + B| = 0$  [3]. Um den Parameter  $\lambda$  zu bestimmen, ist somit eine Gleichung vierten Grades zu lösen. Da dies nur näherungsweise möglich ist, kann auch die darstellende Matrix der Regelfläche nur näherungsweise angegeben werden. Bei der im folgenden vorzustellenden Variante verlagert sich dieses Problem auf das Aufsuchen des vorausgesetzten Schnittpunktes  $X_0$ , was in diesem Beitrag jedoch nicht behandelt werden soll.

### 2. Eine Parameterdarstellung der Quadrik $Q_C$

In dem von den beiden Flächen zweiter Ordnung  $Q_A: 0 = x^T A x$  und  $Q_B: 0 = x^T B x$  erzeugten Büschel enthält diejenige Fläche  $Q_C: 0 = x^T C x = x^T(\lambda_1 A + \lambda_2 B)x$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ), auf deren Tangentialebene in  $X_0$  der Krümmungsmittelpunkt  $M$  der Trägerkurve  $c$  in einem nichtsingulären Punkt  $X_0$  liegt, die Tangente  $t$  ([1], Satz 4).

**Behauptung.** Sind  $m$  und  $x_0$  homogene Koordinatenvektoren von  $M$  bzw.  $X_0$ , so ist  $C = (m^T B x_0) A - (m^T A x_0) B$  eine darstellende Matrix der Quadrik  $Q_C$ .

**Beweis.** Für  $(m^T B x_0, m^T A x_0) \neq (0, 0)$  (für nichtsingulären Punkt  $X_0$  erfüllt!) ist  $Q_C$  ersichtlich eine Quadrik des Büschels. Es gilt

$$\begin{aligned} m^T C x_0 &= m^T ((m^T B x_0) A - (m^T A x_0) B) x_0 \\ &= (m^T B x_0) (m^T A x_0) - (m^T A x_0) (m^T B x_0) = 0, \end{aligned}$$

d. h., die Bedingung für die Inzidenz des Krümmungsmittelpunktes  $M$  mit der Tangentialebene  $\tau_C$  ist erfüllt. Demnach ist  $Q_C$  die  $t$  enthaltende Fläche des Büschels.

Der Schnitt der Tangentialebene  $\tau_C$  mit der Fläche  $Q_C$  ist ein Geradenpaar, dessen eine Gerade die Tangente  $t$  ist. Es läßt sich zeigen, daß  $0 = \tilde{g}^T C_{00} \tilde{g}$  eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine Gerade  $g$  durch  $X_0 \in Q_C$  mit dem Richtungsvektor  $\tilde{g}$ , die der Tangentialebene  $\tau_C$  in  $X_0$  angehört, auch in  $Q_C$  enthalten ist.

Der Richtungsvektor  $\tilde{g}$  einer durch  $X_0$  gehenden Geraden  $g$  der Tangentialebene  $\tau_C$  stellt sich mit  $\tilde{n} := [\tilde{t}, \tilde{u}_C]$ , wobei  $\tilde{u}_C = c + C_{00} \tilde{x}_0$  ist, dar als  $\tilde{g} = \lambda_1 \tilde{t} + \lambda_2 \tilde{n}$ . Soll  $g$  außerdem in  $Q_C$  enthalten sein, so muß  $0 = \tilde{g}^T C_{00} \tilde{g} = \lambda_2 (\lambda_1 \cdot 2\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} + \lambda_2 \cdot \tilde{n}^T C_{00} \tilde{n})$  gelten. Das ist einerseits erfüllt für  $\lambda_2 = 0$  (wegen  $t \subset Q_C$  nach Voraussetzung) und andererseits für  $\lambda_1 \cdot 2\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} + \lambda_2 \cdot \tilde{n}^T C_{00} \tilde{n} = 0$ . Ein Richtungsvektor der zweiten Geraden des beim Schnitt der Tangentialebene  $\tau_C$  mit  $Q_C$  entstehenden Geradenpaares ist somit

$$\tilde{g} = \tilde{n}^T C_{00} \tilde{n} \cdot \tilde{t} - 2\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} \cdot \tilde{n}. \quad (1)$$

Die Darstellung (1) läßt folgende Fallunterscheidung für die Fläche  $Q_C$  zu:

- I:  $\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} \neq 0$   
einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid,
- II:  $\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} = 0, \tilde{n}^T C_{00} \tilde{n} \neq 0$   
Kegel, Zylinder,
- III:  $\tilde{t}^T C_{00} \tilde{n} = \tilde{n}^T C_{00} \tilde{n} = 0$   
Ebenenpaar.

Auf die Spezialfälle II und III wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Im Fall I enthält die Regelfläche  $Q_C$  zwei Geradenscharen, und  $t$  und  $g$  gehören zu verschiedenen Scharen. Eine Gerade der Schar, zu der  $g$  gehört, mit dem Scharparameter  $\mu$  ist

$$g(\mu): \tilde{z}(\mu, \nu) = \tilde{y}(\mu) + \nu \cdot \tilde{g}(\mu) \quad (-\infty < \mu, \nu < \infty),$$

und wegen  $\tilde{y}(\mu) = \tilde{x}_0 + \mu \tilde{t}$

$$g(\mu): \tilde{z}(\mu, \nu) = \tilde{x}_0 + \mu \tilde{t} + \nu \cdot \tilde{g}(\mu) \quad (-\infty < \mu, \nu < \infty). \quad (2)$$

Dabei gilt  $g(\mu) \subset \tau_C(\mu)$ ,  $\tilde{g}(\mu)^T C_{00} \tilde{g}(\mu) = 0$ .

Mit den Parametern  $\mu$  und  $\nu$  ist (2) gleichzeitig eine Parameterdarstellung von  $Q_C$ .

### 3. Bestimmung der Schnittkurve

Um  $Q_C$  mit einer der beiden gegebenen Flächen (o. B. d. A.  $Q_A \neq Q_C$ ) zu schneiden, wird für jedes  $\mu$  die Gerade  $g(\mu)$  mit  $Q_A$  geschnitten. Einsetzen von (2) in die Gleichung von  $Q_A$  liefert in Abhängigkeit von  $\mu$  eine Gleichung zweiten Grades in  $\nu$ :

$$0 = a_{00} + 2a^T \tilde{z} + \tilde{z}^T A_{00} \tilde{z} = a_0(\mu) + 2b_0(\mu) \cdot \nu + c_0(\mu) \cdot \nu^2.$$

Damit erhält man für jedes  $\mu$  ein Lösungspaar

$$v_{1,2} = \frac{1}{c_0} (-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}),$$

also zwei Parameterpaare  $(\mu, v_1)$  und  $(\mu, v_2)$  für die beiden Schnittpunkte der Geraden  $g(\mu)$  mit  $Q_A$ .

Für die Existenz von reellen Lösungen ist die Diskriminante  $d(\mu) = b_0^2 - a_0 c_0$  verantwortlich. Die Diskriminante ist ein Polynom vierten Grades in  $\mu$ :  $d(\mu) = d_0 + d_1 \mu + d_2 \mu^2 + d_3 \mu^3 + d_4 \mu^4$ . Am Verhalten der Diskriminante kann man erkennen, wie die Geradenschar  $g(\mu)$  die Schnittkurve  $c$  überstreicht.

Die Diskriminante läßt sich somit sowohl für die Festlegung der Parametergrenzen einer Parameterdarstellung der Schnittkurve als auch für die Ableitung gewisser globaler Aussagen über die Form der Schnittkurve verwenden.

Für den Fall, daß  $d(\mu)$  vier verschiedene reelle Nullstellen  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$  besitzt und  $d_4 < 0$  gilt, ist die Schnittkurve  $c$  eine zweiteilige Kurve vierter Ordnung und besteht aus vier Kurvenstücken mit den folgenden Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned} k_1: \tilde{z}_1(\mu) &= \tilde{x}_0 + \mu \tilde{t} + v_1(\mu) \cdot \tilde{g}(\mu), & \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \\ k_2: \tilde{z}_2(\mu) &= \tilde{z}_1(\mu), & \mu_3 \leq \mu \leq \mu_4, \\ k_3: \tilde{z}_3(\mu) &= \tilde{x}_0 + \mu \tilde{t} + v_2(\mu) \cdot \tilde{g}(\mu), & \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \\ k_4: \tilde{z}_4(\mu) &= \tilde{z}_3(\mu), & \mu_3 \leq \mu \leq \mu_4. \end{aligned} \tag{3}$$

Bezeichnet man die Menge der Parameter  $\mu$ , für die  $d(\mu) > 0$  gilt, mit  $I_i$ , und die Menge der Parameter  $\mu$ , für die  $d(\mu) = 0$  gilt, mit  $I_r$ , so lassen sich drei Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{I: } \infty &\notin I_i \cup I_r & (d_4 < 0), \\ \text{II: } \infty &\in I_r & (d_4 = 0), \\ \text{III: } \infty &\in I_i & (d_4 > 0). \end{aligned}$$

Diese Fälle werden in dieser Arbeit nicht untersucht. Sie sind jedoch von Bedeutung für die vorgestellte Variante der Bestimmung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung. In dem im folgenden Abschnitt vorgestellten Beispiel liegt der Fall I vor.

#### 4. Vivianische Kurve

Um die vorgestellte Bestimmungsweise der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung an einem Beispiel zu demonstrieren, wurde der Anschaulichkeit wegen eine Schnittaufgabe mit bekannter Schnittkurve gewählt, obwohl diese spezielle Aufgabe mit anderen Mitteln einfacher zu lösen ist. Die Vivianische Kurve ist der Schnitt einer Kugel  $Q_A$  mit einem gewissen Zylinder  $Q_B$  (vgl. [2], Kap. VII, § 1). Im Beispiel wird  $R = 2$  gesetzt und der Punkt  $X_0 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{3}, \sqrt{3} \right)$  als der bekannte nichtsinguläre Kurvenpunkt angenommen (Abb. 1). Über die Normalenvektoren  $\hat{u}_A = a + A_{00} \hat{x}_0$  und  $\hat{u}_B = b + B_{00} \hat{x}_0$  der Flächen  $Q_A$  und  $Q_B$  in  $X_0$  läßt sich ein Richtungsvektor  $\hat{t}$  der Tangente an die Schnittkurve in  $X_0$  bestimmen:  $\hat{t} = [-3 \ -1 \ 1]^T$ . In [1] wurde angegeben, wie die Krümmungsmittelpunkte  $M_A$  und  $M_B$  der Normalschnitte

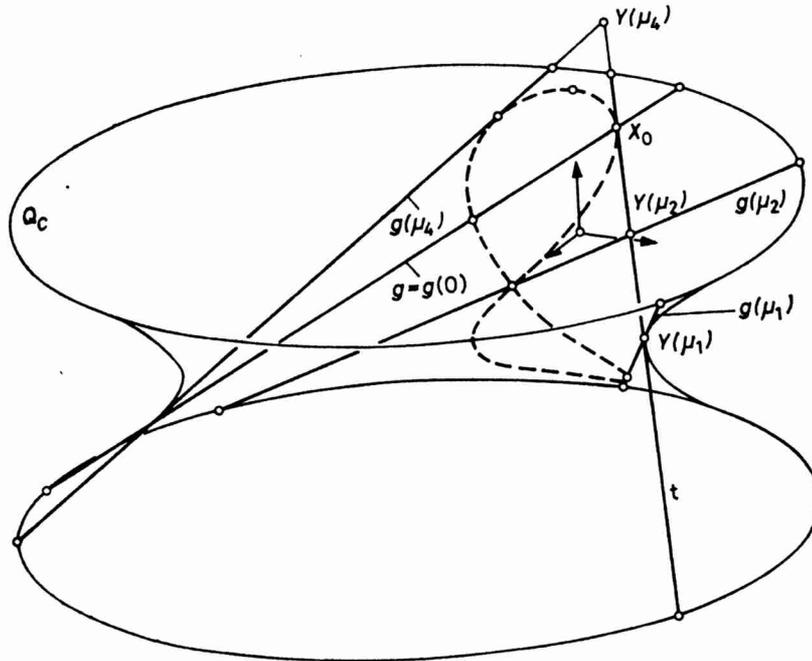


Abb. 1

in Tangentenrichtung und daraus der Krümmungsmittelpunkt  $M$  der Schnittkurve  $c$  in  $X_0$  bestimmt werden können. Mit dem homogenen Koordinatenvektor  $m = \frac{1}{25} [92 \ 81 \ -9\sqrt{3} \ 72\sqrt{3}]^T$  des Krümmungsmittelpunktes ist dann

$$C = (m^T B x_0) A - (m^T A x_0) B = \begin{bmatrix} 16 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

eine darstellende Matrix der Quadrik  $Q_C$ . Wegen  $f^T C_{00} f = 30 \neq 0$  liegen gemäß der in Abschnitt 2 angegebenen Fallunterscheidung auf  $Q_C$  zwei Geradenscharen. Insbesondere ist  $Q_C$  ein einschaliges Rotationshyperboloid mit zur Achse des Zylinders  $Q_B$  paralleler Rotationsachse und dem Mittelpunkt  $M_Q(5, 0, 0)$ . Der Richtungsvektor der zweiten, von  $t$  verschiedenen Erzeugenden durch  $X_0$  ist nach (1)  $g = [-375\sqrt{3} \ 825 \ 525]^T$ . In der Parameterdarstellung (2) ist  $g(\mu) = g + \mu g_1 + \mu^2 g_2$  mit

$$g_1 = [-900 \ 100\sqrt{3} \ 200\sqrt{3}]^T$$

und

$$g_2 = [-100\sqrt{3} \ -100 \ 100]^T.$$

Die Diskriminante

$$d(\mu) = (1,69 + 2,92\mu - 1,12\mu^2 - 3,90\mu^3 - 1,50\mu^4) \cdot 10^6,$$

wobei die in der Klammer stehenden Koeffizienten auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet sind, ist in Abb. 2 dargestellt. Am Nullstellenverhalten des Polynoms  $d(\mu)$  kann man ablesen, daß es sich um eine Schnittkurve in Form einer Acht handelt. Die Darstellung (3) hat dann folgende konkrete Parametergrenzen:

$$\mu_1 = -\sqrt{3}, \quad \mu_2 = \mu_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \mu_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

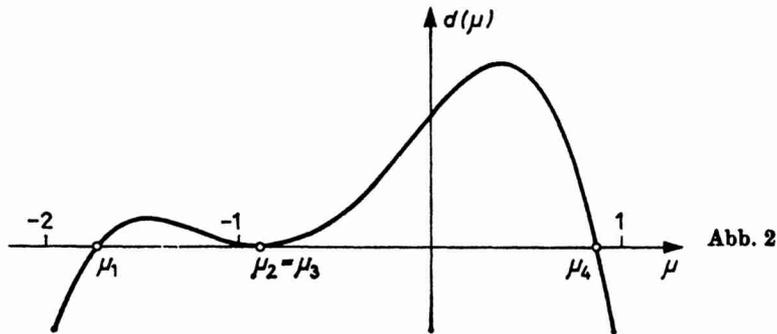


Abb. 2

Wird als Parameterschrittweite  $\frac{1}{10}\sqrt{3}$  gewählt, so erhält man die in Abb. 3 dargestellten Punkte  $\bar{z}(\mu)$  und in den nichtsingulären Punkten die Linienelemente  $\bar{l}(\mu) = [a + A_{00}\bar{z}(\mu), b + B_{00}\bar{z}(\mu)]$  der Schnittkurve. Um die Punktfolge günstiger zu gestalten, wäre die Parameterschrittweite variabel zu wählen, und zwar z. B. in Abhängigkeit vom Punktabstand im Raum bzw. in der Projektionsebene. Die

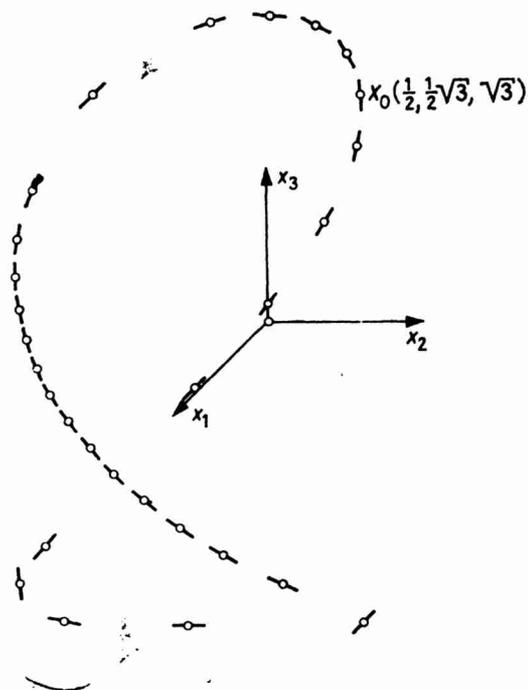


Abb. 3

Erörterung dieses und weiterer Probleme, die bei der praktischen Verwendung dieser Variante der Bestimmung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung auftreten, sollen jedoch nicht Gegenstand dieses Artikels sein.

#### LITERATUR

- [1] BEYER, G.: Untersuchungen zur Krümmung von Kurven zweiter Ordnung in der Ebene und Kurven vierter Ordnung erster Art im Raum, Beiträge zur Algebra und Geometrie 11 (1981), 65–73.
- [2] FICHTENHOLZ, G. M.: Differential- und Integralrechnung I, 12. Aufl., Berlin 1981 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [3] KELLER, O.-H.: Analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl., Berlin 1968.

Manuskripteingang: 30. 10. 1978

VERFASSER:

GERT BEYER, Ingenieurhochschule Dresden, Abt. Mathematik/Naturwissenschaften