Beiträge zur Algebra und Geometrie
11 (1981), 51–63

Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen I

Wolfgang Bannuscher

Bezeichnungen

$A, B, \ldots$	Gruppenelemente
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$	Gruppen bzw. Untergruppen
E	Einheitselement einer Gruppe
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E} = \langle E \rangle$
$\langle \mathfrak{M} \rangle$	die aus $\mathfrak{M}$ erzeugte Untergruppe, wobei $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge einer Gruppe ist
$\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$	direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$
$\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{G}$	$\mathfrak{A}$ ist Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$
$\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$	$\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$
ord A	Ordnung des Gruppenelementes A
$\lvert\mathfrak{G}\rvert$	Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$
exp $\mathfrak{G}$	Exponent der Gruppe $\mathfrak{G}$
A^B	$A^B = B^{-1}AB$
$\mathfrak{M}^G$	$\mathfrak{M}^G = \{M^G \mid M \in \mathfrak{M}\}$
$[A, B]$	Kommutator $[A, B] = A^{-1}B^{-1}AB$
$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$	$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \langle [A, B] \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \rangle$
$Z_j = Z_j(\mathfrak{G})$	j-tes Glied der absteigenden Zentralreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$
$\mathfrak{G}'$	$\mathfrak{G}' = Z_2(\mathfrak{G})$
$Z^j = Z^j(\mathfrak{G})$	j-tes Glied der aufsteigenden Zentralreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$
$Z = Z(\mathfrak{G}) = Z^1(\mathfrak{G})$	Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$
$\Phi(\mathfrak{G})$	Frattinigruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$
$c(\mathfrak{G})$	Nilpotenzklasse der (nilpotenten) Gruppe $\mathfrak{G}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
(a, b)	größter gemeinsamer Teiler der ganzen rationalen Zahlen a und b

Einleitung

In Verallgemeinerung des von P. Hall in [1] eingeführten Regularitätsbegriffes werden in dieser Arbeit sogenannte k-reguläre p-Gruppen untersucht.
Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *k-regulär*, falls für alle $X, Y \in \mathfrak{G}$

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_i D_i^{p^k} \tag{*}$$

mit geeigneten $D_i \in \langle X, Y \rangle'$ gilt.

Für $k = 1$ erhält man gerade die gewöhnlich regulären p-Gruppen im Sinne von P. Hall.

In § 1 erkennen wir, daß aus der k-Regularität einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ stets die $(k + 1)$-Regularität von $\mathfrak{G}$ folgt (Satz 1). Hat eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ den Exponenten p^l, so ist sie offenbar l-regulär. Demnach existiert eine kleinste positive Zahl $m \leqq l$, die sogenannte *Regularitätsstufe* von $\mathfrak{G}$, so daß für alle $k \geqq m$ die Formel (*) gilt.

§ 2 enthält einige Sätze über Eigenschaften einer k-regulären p-Gruppe $\mathfrak{G}$. Die vollinvarianten Untergruppen $\Omega_l(\mathfrak{G})$ bzw. $\mho_l(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ enthalten für $l \geqq k$ nur Elemente der Ordnung kleiner oder gleich p^l bzw. nur p^l-te Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{G}$ (Satz 2). Somit kann also insbesondere die Ordnung eines Produktes von Elementen aus $\mathfrak{G}$ nicht das Maximum, das aus den Ordnungen der einzelnen Faktoren sowie k gebildet wird, übersteigen. Außerdem gilt $|\mathfrak{G}/\Omega_l(\mathfrak{G})| = |\mho_l(\mathfrak{G})|$ (Satz 4). In Satz 5 werden Beziehungen zwischen den Untergruppen $\mho_l(\mathfrak{G})$ und $\Omega_l(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ für $l \geqq k$ und der Kommutatorstruktur von $\mathfrak{G}$ hergeleitet. Alle Sätze in § 2 sind für $k = 1$, also für gewöhnlich reguläre p-Gruppen, bereits bekannt (P. Hall [1]), die Beweise lassen sich mit Hilfe von Satz 1 direkt auf den allgemeinen Fall übertragen.

In § 3 wird ein einfaches k-Regularitätskriterium bewiesen (Satz 6). Für spezielle 2-Gruppen (2-Gruppen der Klasse 2 und 2-Gruppen mit zyklischem Normalteiler vom Index 2) wird die Regularitätsstufe ermittelt.

§ 4 beschäftigt sich mit dem Problem der Bestimmung einer nicht k-regulären p-Gruppe kleinster Ordnung. Man erkennt leicht mit Hilfe von § 3, daß jede 2-Gruppe mit einer Ordnung kleiner oder gleich 2^{k+1} k-regulär ist und daß es für $k \geqq 2$ bzw. $k = 1$ genau 3 bzw. 2 nicht k-reguläre Gruppen der Ordnung 2^{k+2} gibt. Für allgemeines p wird das Kranzprodukt einer zyklischen Gruppe der Ordnung p^k mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p als Beispiel einer nicht k-regulären Gruppe der Ordnung p^{p^k+1} angegeben. Nach einem notwendigen und hinreichenden k-Regularitätskriterium für p-Gruppen mit abelschem Normalteiler vom Index p (Satz 8) wird eine nicht k-reguläre Gruppe der Ordnung $p^{(p-1)k+2}$ konstruiert.

§ 1. Definition und Motivation der verallgemeinerten Regularität von p-Gruppen

Definition. Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *k-regulär*, falls für alle X, Y aus $\mathfrak{G}$

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_i D_i^{p^k}$$

mit geeigneten D_i aus $\langle X, Y\rangle'$ gilt. Dabei ist $k \in \mathbb{N}$.

Offenbar folgt aus der k-Regularität einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ stets die k-Regularität jeder Faktor- und Untergruppe von $\mathfrak{G}$. 1-Regularität von $\mathfrak{G}$ bedeutet gewöhnliche Regularität im Sinne von P. Hall [1].

Definition. In einer beliebigen p-Gruppe $\mathfrak{G}$ seien die vollinvarianten Untergruppen $\Omega_i(\mathfrak{G})$ und $\mho_i(\mathfrak{G})$ durch

$$\Omega_i(\mathfrak{G}) = \langle G \in \mathfrak{G} \mid G^{p^i} = E\rangle$$

und

$$\mho_i(\mathfrak{G}) = \langle G^{p^i} \mid G \in \mathfrak{G}\rangle$$

für $i \geqq 0$ definiert.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine k-reguläre p-Gruppe. Dann gilt:*

a) *Ist $X^{p^k} = Y^{p^k} = E$, so auch $(XY)^{p^k} = E$, d. h., die Elemente X aus $\mathfrak{G}$ mit $X^{p^k} = E$ bilden die vollinvariante Untergruppe $\Omega_k(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.*

b) *Für alle $X, Y \in \mathfrak{G}$ gilt $(XY)^{p^k} = Z^{p^k}$ mit einem gewissen (von X und Y abhängenden) $Z \in \mathfrak{G}$. Die p^k-ten Potenzen der Elemente aus $\mathfrak{G}$ bilden also die vollinvariante Untergruppe $\mho_k(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. a) Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$, wobei der Induktionsanfang gesichert ist. Es sei also $X^{p^k} = Y^{p^k} = E$. Wir haben $(XY)^{p^k} = E$ nachzuweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathfrak{G} = \langle X, Y\rangle$ nichtabelsch. Weiterhin sei $\mathfrak{L} = \langle X^G \mid G \in \mathfrak{G}\rangle$ sowie $\mathfrak{A}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $X \in \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{L}$ k-regulär ist und $|\mathfrak{L}| < |\mathfrak{G}|$ gilt, folgt aus der Induktionsannahme, daß alle Elemente von $\mathfrak{L}$ höchstens die Ordnung p^k haben.
Es ist $[X, Y] = X^{-1}X^Y$ mit $X^{-1}, X^Y \in \mathfrak{L}$, also $[X, Y]^{p^k} = E$. Wegen $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}' = \langle [X, Y]^G \mid G \in \mathfrak{G}\rangle$ liefert die Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}'$ die Ungleichung $\exp \mathfrak{G}' \leqq p^k$. Dann folgt aus der k-Regularität von $\mathfrak{G}$

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_{\substack{i\\ D_i \in \mathfrak{G}'}} D_i^{p^k} = E,$$

was zu zeigen war.

b) Der Beweis der Behauptung erfolgt durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$, wobei wieder o. B. d. A. $\mathfrak{G} = \langle X, Y\rangle$ nichtabelsch angenommen werden kann. Es sei $\mathfrak{L} = \langle XY, \mathfrak{G}'\rangle$. Wegen $\mathfrak{G}' \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ ist $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{L}$ gilt also die Behauptung nach Induktionsannahme. Aus der k-Regularität von $\mathfrak{G}$ erhalten wir

$$X^{p^k} Y^{p^k} = (XY)^{p^k} \prod_i D_i^{p^k}.$$

Dabei ist $D_i \in \mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{L}$ und $XY \in \mathfrak{L}$. Die rechte Seite der obigen Gleichung ist demnach p^k-te Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine k- und l-reguläre p-Gruppe oder $k = 0$ oder $l = 0$. Dann gilt:*

a) *Die Gleichung $X^{p^k} = Y^{p^k}$ ist gleichwertig mit $(XY^{-1})^{p^k} = E$.*

b) *$[X^{p^k}, Y^{p^l}] = E$ ist gleichwertig mit $[X, Y]^{p^{k+l}} = E$.*

Beweis. a) Der Fall $k = 0$ ist trivial. Für $k \geqq 1$ beweisen wir die Behauptung durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$, wobei wieder o. B. d. A. $\mathfrak{G} = \langle X, Y\rangle$ nichtabelsch sei.
(1) Es sei $X^{p^k} = Y^{p^k}$ sowie $Z = [X, Y]$. Dann ist $[X^{p^k}, Y] = [Y^{p^k}, Y] = E$. Daraus folgt $X^{p^k} = Y^{-1}X^{p^k}Y = (Y^{-1}XY)^{p^k} = (XZ)^{p^k}$. Wegen $\langle X, Z\rangle \leqq \langle X, \mathfrak{G}'\rangle \leqq \langle X, \Phi(\mathfrak{G})\rangle < \mathfrak{G}$ ist damit nach Induktionsannahme $(XZX^{-1})^{p^k} = XZ^{p^k}X^{-1} = E$, also $Z^{p^k} = E$.

Hilfssatz 1a), angewandt auf $\mathfrak{G}'$, liefert wegen $\mathfrak{G}' = \langle [X, Y]^G \mid G \in \mathfrak{G}\rangle$ die Abschätzung $\exp \mathfrak{G}' \leqq p^k$.
Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ ergibt somit

$$(XY^{-1})^{p^k} = X^{p^k} Y^{-p^k} \prod_{\substack{i\\ D_i \in \mathfrak{G}'}} D_i^{p^k} = X^{p^k} Y^{-p^k} = E.$$

(2) Umgekehrt sei $(XY^{-1})^{p^k} = E$. Dann ist $(YX^{-1})^{p^k} = \big((XY^{-1})^{-1}\big)^{p^k} = E$, also auch $(Y^{-1}X)^{p^k} = Y^{-1}(XY^{-1})^{p^k}Y = E$. Somit gilt YX^{-1}, $Y^{-1}X \in \Omega_k(\mathfrak{G})$. Aus Hilfssatz 1a) folgt dann $(Y^{-1}XYX^{-1})^{p^k} = [Y, X^{-1}]^{p^k} = E$. Da $[Y, X^{-1}]$ mit seinen Konjugierten $\mathfrak{G}'$ erzeugt, erhält man aus Hilfssatz 1a), angewandt auf $\mathfrak{G}'$, die Abschätzung

$\exp \mathfrak{G}' \leqq p^k$. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ liefert jetzt

$$E = (XY^{-1})^{p^k} = X^{p^k} Y^{-p^k} \prod_{\substack{i \\ D_i \in \mathfrak{G}'}} D_i^{p^k} = X^{p^k} Y^{-p^k}$$

und damit $X^{p^k} = Y^{p^k}$.

b) Es ist $[X^{p^k}, Y^{p^l}] = (X^{p^k})^{-1} \big((Y^{p^l})^{-1} X Y^{p^l}\big)^{p^k}$. Daher ist $[X^{p^k}, Y^{p^l}] = E$ gleichwertig mit $\big((Y^{p^l})^{-1} X Y^{p^l}\big)^{p^k} = X^{p^k}$, und dies ist nach a) mit $\big(X^{-1}(Y^{p^l})^{-1} X Y^{p^l}\big)^{p^k} = E$ gleichwertig. Das heißt $X^{-1}(Y^{p^l})^{-1} X Y^{p^l} = (X^{-1}YX)^{-p^l}\, Y^{p^l} \in \Omega_k(\mathfrak{G})$.
Die Anwendung von a) zeigt, daß dies gleichwertig ist mit

$$(X^{-1}Y^{-1}XY)^{p^l} \in \Omega_k(\mathfrak{G}),$$

und das heißt

$$([X, Y]^{p^l})^{p^k} = [X, Y]^{p^{k+l}} = E.$$

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine k- und l-reguläre p-Gruppe oder $k = 0$ oder $l = 0$, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist*

$$[\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})] = \mho_{k+l}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1b) gilt

$$[\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})] = \langle [M^{p^k}, N^{p^l}] \mid M \in \mathfrak{M}, N \in \mathfrak{N} \rangle.$$

Es ist

$$[M, N]^{p^{k+l}} \equiv E \bmod \mho_{k+l}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]).$$

Hilfssatz 2b) ergibt dann

$$[M^{p^k}, N^{p^l}] \equiv E \bmod \mho_{k+l}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]),$$

woraus

$$[\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})] \leqq \mho_{k+l}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}])$$

folgt.
Andererseits gilt

$$[M^{p^k}, N^{p^l}] \equiv E \bmod [\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})]$$

und somit nach Hilfssatz 2b)

$$[M, N]^{p^{k+l}} \equiv E \bmod [\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})].$$

Es ist $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] = \langle [M, N] \mid M \in \mathfrak{M},\ N \in \mathfrak{N} \rangle$. Daher wird $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]/[\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})]$ von Elementen erzeugt, deren Ordnung höchstens p^{k+l} ist. Mithin haben alle Elemente von $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]/[\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})]$ nach Hilfssatz 1a) höchstens die Ordnung p^{k+l}. Das iefert die noch fehlende Beziehung

$$\mho_{k+l}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) \leqq [\mho_k(\mathfrak{M}), \mho_l(\mathfrak{N})].$$

Daß die Definition der k-Regularität einer p-Gruppe sinnvoll ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine k-reguläre p-Gruppe. Dann ist $\mathfrak{G}$ $(k + 1)$-regulär.*

Beweis. Es seien $X, Y \in \mathfrak{G}$ beliebig sowie $\mathfrak{H} = \langle X, Y \rangle$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_i D_i^{p^k}$$

mit $D_i \in \mathfrak{H}'$. Hilfssatz 1b), angewandt auf $\mathfrak{H}'$, liefert:

Es gibt ein $D \in \mathfrak{H}'$ mit $\prod_i D_i^{p^k} = D^{p^k}$.

Es ist also

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} D^{p^k}. \tag{1}$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$(XY)^{p^{k+1}} \equiv X^{p^{k+1}} Y^{p^{k+1}} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')$$

ist. Durch Induktion nach l beweisen wir für $l \geqq 1$

$$\big((XY)^{p^k}\big)^l \equiv (X^{p^k})^l\,(Y^{p^k})^l\,(D^{p^k})^l \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}').$$

Für $l = 1$ ist die Behauptung wegen (1) richtig. Es sei jetzt $l > 1$ und die Behauptung bis $l - 1$ bewiesen. Dann gilt nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\big((XY)^{p^k}\big)^l &= \big((XY)^{p^k}\big)^{l-1}\,(XY)^{p^k}\\ &\equiv (X^{p^k})^{l-1}\,(Y^{p^k})^{l-1}\,(D^{p^k})^{l-1}\,X^{p^k}Y^{p^k}D^{p^k} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\\ &\equiv (X^{l-1})^{p^k}\,(Y^{l-1})^{p^k}\,(D^{l-1})^{p^k}\,X^{p^k}Y^{p^k}D^{p^k} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}').\end{aligned}$$

Hilfssatz 3, angewandt auf $\mathfrak{H}$, liefert

$$[\mho_k(\mathfrak{H}), \mho_k(\mathfrak{H})] = \mho_{2k}(\mathfrak{H}') \leqq \mho_{k+1}(\mathfrak{H}') \quad (k \geqq 1);$$

also ist $\mho_k(\mathfrak{H})/\mho_{k+1}(\mathfrak{H}')$ abelsch.
Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\big((XY)^{p^k}\big)^l &\equiv (X^{l-1})^{p^k}\,X^{p^k}(Y^{l-1})^{p^k}\,Y^{p^k}(D^{l-1})^{p^k}\,D^{p^k} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\\ &\equiv (X^{p^k})^l\,(Y^{p^k})^l\,(D^{p^k})^l \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}'),\end{aligned}$$

wie behauptet. Setzt man $l = p$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(XY)^{p^{k+1}} &\equiv X^{p^{k+1}}Y^{p^{k+1}}D^{p^{k+1}} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\\ &\equiv X^{p^{k+1}}Y^{p^{k+1}} \bmod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}').\end{aligned}$$

Da $X, Y \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt waren, ist $\mathfrak{G}$ also $(k+1)$-regulär.

§ 2. Einige Eigenschaften von m-regulären p-Gruppen

In diesem Paragraphen werden einige Sätze über reguläre p-Gruppen auf m-reguläre p-Gruppen übertragen. Setzt man in den Sätzen 2 bis 5 $m = 1$, so erhält man die bekannten Ergebnisse von P. Hall [1]. Die Hilfssätze 1 bis 3 aus § 1 werden unter Berücksichtigung von Satz 1 (§ 1) neu formuliert.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine m-reguläre p-Gruppe sowie $k \geqq m$. Dann gilt:*

a) $\Omega_k(\mathfrak{G}) = \{X \in \mathfrak{G} \mid X^{p^k} = E\}$;

b) $\mho_k(\mathfrak{G}) = \{X^{p^k} \mid X \in \mathfrak{G}\}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 1 unter Berücksichtigung von Satz 1.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine m-reguläre p-Gruppe sowie $k, l \geqq m$ oder gleich Null. Dann gilt:*

a) *Die Gleichung $X^{p^k} = Y^{p^k}$ ist gleichwertig mit $(XY^{-1})^{p^k} = E$.*

b) *$[X^{p^k}, Y^{p^l}] = E$ ist gleichwertig mit $[X, Y]^{p^{k+l}} = E$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 2 unter Berücksichtigung von Satz 1.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine m-reguläre p-Gruppe sowie $k \geqq m$ und $l \in \mathbb{N}$.*

a) *Es gilt* $|\mathfrak{G}/\Omega_k(\mathfrak{G})| = |\mho_k(\mathfrak{G})|$.

b) *Setzt man* $|\Omega_{lm}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G})| = p^{\omega_l^{(m)}}$, *so gilt*

$$\omega_1^{(m)} \geqq \omega_2^{(m)} \geqq \cdots \geqq \omega_\mu^{(m)}.$$

Dabei ist $p^{m(\mu-1)} < \exp \mathfrak{G} \leqq p^{m\mu}$.

Beweis. a) Man betrachte die Abbildung $X \to X^{p^k}$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mho_k(\mathfrak{G})$. Die Anwendung von Satz 3a) liefert

$$X^{p^k} = Y^{p^k} \Leftrightarrow (XY^{-1})^{p^k} = E \Leftrightarrow XY^{-1} \in \Omega_k(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow X\Omega_k(\mathfrak{G}) = Y\Omega_k(\mathfrak{G}),$$

d. h., genau die Elemente aus einer festen Nebenklasse von $\Omega_k(\mathfrak{G})$ haben die gleiche p^k-te Potenz. Damit gilt also $|\mathfrak{G}/\Omega_k(\mathfrak{G})| = |\mho_k(\mathfrak{G})|$, wie behauptet.

b) Es sei $\mathfrak{K} = \Omega_{(l+1)m}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G})$. Dann gilt

$$\Omega_m(\mathfrak{K}) = \Omega_{lm}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G}),$$

denn es gilt

$$X^{p^m} \in \Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow (X^{p^m})^{p^{(l-1)m}} = X^{p^{lm}} = E \Leftrightarrow X \in \Omega_{lm}(\mathfrak{G}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mho_m(\mathfrak{K}) &= \{X^{p^m}\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G}) \mid X \in \Omega_{(l+1)m}(\mathfrak{G})\} \\ &\leqq \Omega_{lm}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G}) = \Omega_m(\mathfrak{K}).\end{aligned}$$

Mit a) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}p^{\omega_{l+1}^{(m)}} &= |\Omega_{(l+1)m}(\mathfrak{G})/\Omega_{lm}(\mathfrak{G})| \\ &= |\Omega_{(l+1)m}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G})/\Omega_{lm}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G})| \\ &= |\mathfrak{K}/\Omega_m(\mathfrak{K})| = |\mho_m(\mathfrak{K})| \leqq |\Omega_m(\mathfrak{K})| \\ &= |\Omega_{lm}(\mathfrak{G})/\Omega_{(l-1)m}(\mathfrak{G})| = p^{\omega_l^{(m)}}.\end{aligned}$$

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine m-reguläre p-Gruppe, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sowie $r, s \geqq m$ oder gleich Null. Dann gilt:*

a) $[\mho_r(\mathfrak{M}), \mho_s(\mathfrak{N})] = \mho_{r+s}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}])$.

b) $Z_j\big(\mho_r(\mathfrak{G})\big) = \mho_{rj}\big(Z_j(\mathfrak{G})\big)$.

c) $\Big[\mho_r(\mathfrak{M}), \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k}\Big] = \mho_r\Big[\Big(\mathfrak{M}, \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k}\Big)\Big]$.

d) $Z_{j+1}(\mathfrak{G}) \leqq \Omega_r(\mathfrak{G})$ *ist gleichwertig mit* $\mho_r(\mathfrak{G}) \leqq Z^j(\mathfrak{G})$.

e) $[\mathfrak{M}, \mathfrak{G}] \leqq \Omega_r(\mathfrak{G})$ *ist gleichwertig mit* $[\mathfrak{M}, \mho_r(\mathfrak{G})] = \mathfrak{E}$.

f) *Ist* $r - s \geqq m$ *oder* $r - s \leqq 0$, *so gilt*

$$[\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_s(\mathfrak{G})] \leqq \Omega_{r-s}(\mathfrak{G})$$

mit $\Omega_k(\mathfrak{G}) \doteq \mathfrak{E}$ *für* $k < 0$.

Insbesondere ist $[\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_r(\mathfrak{G})] = \mathfrak{E}$, *d. h., die p^r-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{G}$ sind mit allen Lösungen von $X^{p^r} = E$ elementweise vertauschbar.*

Beweis. a) Die Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 3 unter Berücksichtigung von Satz 1.

b) Der Beweis der Behauptung erfolgt durch Induktion nach j. Für $j = 1$ ist die Aussage b) trivial. Wegen der Induktionsannahme und a) gilt dann

$$\begin{aligned} Z_{j+1}(\mho_r(\mathfrak{G})) &= [Z_j(\mho_r(\mathfrak{G})), \mho_r(\mathfrak{G})] = [\Omega_{rj}(Z_j(\mathfrak{G})), \mho_r(\mathfrak{G})] \\ &= \mho_{rj+r}([Z_j(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}]) = \mho_{r(j+1)}(Z_{j+1}(\mathfrak{G})). \end{aligned}$$

c) Wir führen den Beweis durch Induktion nach k. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus a) mit $s = 0$. Nach der Induktionsannahme und a) gilt dann

$$\begin{aligned} [\mho_r(\mathfrak{M}), \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k}] &= [[\mho_r(\mathfrak{M}), \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k-1}], \mathfrak{N}] \\ &= [\mho_r([\mathfrak{M}, \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k-1}]), \mathfrak{N}] = \mho_r([\mathfrak{M}, \underbrace{\mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}}_{k}]). \end{aligned}$$

d) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

$$Z_{j+1}(\mathfrak{G}) \leqq \Omega_r(\mathfrak{G}),$$

$$\mho_r(Z_{j+1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{E},$$

$$[\mho_r(\mathfrak{G}), \underbrace{\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{G}}_{j}] = \mathfrak{E} \quad \text{(wegen c))};$$

$$\mho_r(\mathfrak{G}) \leqq Z^j(\mathfrak{G}).$$

e) Nach a) ist $[\mathfrak{M}, \mathfrak{G}] \leqq \Omega_r(\mathfrak{G})$ gleichwertig mit

$$\mho_r([\mathfrak{M}, \mathfrak{G}]) = [\mathfrak{M}, \mho_r(\mathfrak{G})] = \mathfrak{E}.$$

f) Aus $[\mathfrak{G}, \Omega_r(\mathfrak{G})] \leqq \Omega_r(\mathfrak{G})$ folgt mit $\mathfrak{M} = \Omega_r(\mathfrak{G})$ nach e) $[\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_r(\mathfrak{G})] = \mathfrak{E}$. Damit ist die Richtigkeit der Behauptung für $r = s$ bewiesen.
Ist $r - s \leqq 0$, d. h. $r \leqq s$, so gilt $\mho_s(\mathfrak{G}) \leqq \mho_r(\mathfrak{G})$ und folglich $[\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_s(\mathfrak{G})] \leqq [\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_r(\mathfrak{G})] = \mathfrak{E}$.
Für $r - s \geqq m$ ist $\Omega_s(\mathfrak{G}/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G})) = \Omega_r(\mathfrak{G})/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G})$, denn es gilt

$$X^{p^s} \in \Omega_{r-s}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow (X^{p^s})^{p^{r-s}} = X^{p^r} = E \Leftrightarrow X \in \Omega_r(\mathfrak{G}).$$

Nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes ergibt sich

$$\begin{aligned} &[\Omega_r(\mathfrak{G})/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G}), \mho_s(\mathfrak{G})\, \Omega_{r-s}(\mathfrak{G})/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G})] \\ &= [\Omega_s(\mathfrak{G}/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G})), \mho_s(\mathfrak{G}/\Omega_{r-s}(\mathfrak{G}))] = \bar{\mathfrak{E}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$[\Omega_r(\mathfrak{G}), \mho_s(\mathfrak{G})] \leqq \Omega_{r-s}(\mathfrak{G}).$$

§ 3. Bestimmung der Regularitätsstufe für spezielle 2-Gruppen

Definition. Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *scharf k-regulär*, wenn folgendes gilt:

1. $\mathfrak{G}$ ist k-regulär.
2. $\mathfrak{G}$ ist nicht $(k - 1)$-regulär.

k heißt *Regularitätsstufe* von $\mathfrak{G}$.

Definition. Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *k-abelsch*, falls für alle X, Y aus $\mathfrak{G}$

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}$$

gilt.

Offenbar ist jede abelsche p-Gruppe k-abelsch, jede k-abelsche k-regulär.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige p-Gruppe, $M = \{1\} \cup \{t \mid 1 \leq t \leq [\log_p c(\mathfrak{G})]\}$ und* $k = \max_{l \in M} \{l + \log_p \exp Z_{p^l}(\mathfrak{G})\}$.

Dann ist $\mathfrak{G}$ k-regulär.

Beweis. Die Identität von HALL-PETRESCU (siehe beispielsweise B. HUPPERT [3], III, Satz 9.4. S. 317) besagt:

Für X, $Y \in \mathfrak{G}$ beliebig gilt

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}C_2^{\binom{p^k}{2}}C_3^{\binom{p^k}{3}}\cdots C_{p^k}^{\binom{p^k}{p^k}}$$

mit geeigneten $C_i \in Z_i(\langle X, Y\rangle)$. Offenbar gilt für $s \leq p^k$ mit $(s, p^k) = p^r$

$$\left(p^k, \binom{p^k}{s}\right) = p^{k-r}.$$

Daraus folgt

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}D_0D_1\cdots D_k$$

mit $D_i \in \mho_{k-i}\left(Z_{p^i}(\langle X, Y\rangle)\right)$ $(1 \leq i \leq k)$ und $D_0 \in \mho_k(\langle X, Y\rangle')$. Nach Voraussetzung ist $k \geq i + \log_p \exp Z_{p^i}(\mathfrak{G})$ $(1 \leq i \leq k)$, also $k - i \geq \log_p \exp Z_{p^i}(\mathfrak{G})$. Somit gilt $\mathfrak{E} = \mho_{k-i}\left(Z_{p^i}(\mathfrak{G})\right)$. Es folgt jetzt

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k}Y^{p^k}D_0$$

mit $D_0 \in \mho_k(\langle X, Y\rangle')$, und $\mathfrak{G}$ ist k-regulär.

Folgerungen. 1. (P. HALL [1], Corollary 4.13, S. 73). Ist die Klasse von $\mathfrak{G}$ kleiner als p, so ist $\mathfrak{G}$ regulär.

2. Ist die Klasse von $\mathfrak{G}$ kleiner als p^2, so ist $\mathfrak{G}$ $(\log_p \exp Z_p(\mathfrak{G}) + 1)$-regulär.

Beweis. 1. Es ist $[\log_p c(\mathfrak{G})] = 0$, in Satz 6 also $M = \{1\}$. Außerdem ist $\log_p \exp Z_p(\mathfrak{G}) = 0$ wegen $Z_p(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$. Nach Satz 6 ist dann $\mathfrak{G}$ 1-regulär, also regulär im gewöhnlichen Sinne.

2. Die Behauptung folgt aus Satz 6 mit $M = \{1\}$.

In einem speziellen Fall erhalten wir durch Satz 6 sogar die Regularitätsstufe, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine 2-Gruppe mit $c(\mathfrak{G}) \leq 2$. Dann ist $\mathfrak{G}$ scharf* $(\log_2 \exp \mathfrak{G}' + 1)$-*regulär. Ist $\mathfrak{G}$ k-regulär, so ist $\mathfrak{G}$ k-abelsch. $\langle X, Y\rangle'$ ist für alle X, $Y \in \mathfrak{G}$ zyklisch mit einer Ordnung kleiner oder gleich 2^{k-1}.*

Beweis. $\mathfrak{G}$ ist $(\log_2 \exp \mathfrak{G}' + 1)$-regulär nach Folgerung 2 aus Satz 6. Es sei jetzt $\mathfrak{G}$ k-regulär. Da die Klasse von $\mathfrak{G}$ kleiner oder gleich 2 ist, gelten offenbar die Identitäten

$$[A, BC] = [A, B]\,[A, C] \quad \text{und} \quad [BC, A] = [B, A]\,[C, A]$$

für alle A, B, $C \in \mathfrak{G}$. Es seien X, $Y \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt sowie $\mathfrak{H} = \langle X, Y\rangle$. Dann ist

$$\mathfrak{H}' = \langle [X, Y]\rangle. \tag{$*$}$$

Es gilt

$$(XY)^{2^j} = X^{2^j} Y^{2^j} [Y^{2^j-1}, X^{2^{j-1}}]$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Der Beweis wird durch Induktion nach j geführt. Für $j = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}(XY)^2 &= X^2Y^2[Y, X]\,[Y, X, Y] \\ &= X^2Y^2[Y, X] = X^2Y^2[Y^{2^1-1}, X^{2^{1-1}}].\end{aligned}$$

Es sei jetzt $j > 1$ und die Behauptung bis $j - 1$ bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned}(XY)^{2^j} &= \left((XY)^{2^{j-1}}\right)^2 = (X^{2^{j-1}}Y^{2^{j-1}}[Y^{2^{j-1}-1}, X^{2^{j-}}])^2 \\ &= X^{2^{j-1}}Y^{2^{j-1}}X^{2^{j-1}}Y^{2^{j-1}}[Y^{2^{j-1}-1}, X^{2^{j-1}}] \\ &= X^{2^j}Y^{2^j}[Y^{2^{j-1}}, X^{2^{j-1}}]\,[Y^{2^{j-1}-1}, X^{2^{j-1}}] \\ &= X^{2^j}Y^{2^j}[Y^{2\cdot 2^{j-1}-1}, X^{2^{j-1}}] \\ &= X^{2^j}Y^{2^j}[Y^{2^j-1}, X^{2^{j-1}}].\end{aligned}$$

Wählt man $j = k$, so erhält man

$$(XY)^{2^k} = X^{2^k}Y^{2^k}[Y^{2^k-1}, X^{2^{k-1}}] = X^{2^k}Y^{2^k}[Y, X]^{2^{k-1}(2^k-1)}.$$

Aus der k-Regularität von $\mathfrak{G}$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (*)

$$[Y, X]^{2^{k-1}(2^k-1)} \in \mho_k(\mathfrak{H}') = \langle [X, Y]^{2^k} \rangle = \langle [Y, X]^{2^k} \rangle.$$

Da $2^{k-1} - 1$ ungerade ist, folgt $[Y, X]^{2^{k-1}} = E$, also gilt $(XY)^{2^k} = X^{2^k}Y^{2^k}$ sowie $\exp \langle X, Y \rangle' \leqq 2^{k-1}$ für alle $X, Y \in \mathfrak{G}$. Weil $\mathfrak{G}'$ abelsch ist, gilt

$$\exp \mathfrak{G}' = \max_{X, Y \in \mathfrak{G}} \exp \langle X, Y \rangle' \leqq 2^{k-1}.$$

Das bedeutet $k \geqq \log_2 \exp \mathfrak{G}' + 1$.

Beispiele. Im folgenden werden 2-Gruppen mit zyklischem Normalteiler vom Index 2 auf ihre Regularitätsstufe untersucht.

1. Es sei $\mathfrak{G}$ die Diedergruppe der Ordnung 2^{n+1} ($n \geqq 2$), also $\mathfrak{G} = \langle A, B \rangle$ mit $B^{2^n} = A^2 = E$ und $ABA = B^{-1}$. Offenbar ist $[A, B] = B^2$ sowie $|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}'| \geqq 4$. Es ist $|\mathfrak{G} : \langle B^2 \rangle| = 4$ und damit $\mathfrak{G}' = \langle B^2 \rangle$. Es sei $\mathfrak{G}$ k-regulär. Es ist $(AB)^2 = E$, also auch $(AB)^{2^k} = E$. Außerdem ist $A^{2^k}B^{2^k} = B^{2^k}$. Es gilt also $B^{2^k} \in \mho_k(\langle B^2 \rangle) = \langle B^{2^{k+1}} \rangle$. Das erfordert $B^{2^k} = E$, mithin ist $k \geqq n$. Andererseits ist $\exp \mathfrak{G} = 2^n$, also $\mathfrak{G}$ n-regulär. Somit ist $\mathfrak{G}$ scharf n-regulär.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 2^{n+1} ($n \geqq 2$), also $\mathfrak{G} = \langle A, B \rangle$ mit $B^{2^n} = E$, $A^2 = B^{2^{n-1}}$ und $A^{-1}BA = B^{-1}$. Offenbar ist wieder $\mathfrak{G}' = \langle B^2 \rangle$. Es sei $\mathfrak{G}$ k-regulär. Da $\mathfrak{G}$ nichtabelsch ist, gilt wegen B. Huppert [3], III, Satz 10.3 a), S. 322, $k \geqq 2$. Weiterhin gilt $(AB)^2 = B^{2^{n-1}}$, also $(AB)^{2^k} = E$. Außerdem ist $A^{2^k}B^{2^k} = B^{2^k}$. Wir erhalten wie in Beispiel 1: $\mathfrak{G}$ ist scharf n-regulär.

3. Es sei $\mathfrak{G} = \langle A, B \rangle$ mit $|\mathfrak{G}| = 2^{n+1}, n \geqq 3$, sowie $B^{2^n} = A^2 = E$ und $ABA = B^{-1+2^{n-1}}$ Wieder ist $\mathfrak{G}' = \langle B^2 \rangle$. Es sei $\mathfrak{G}$ k-regulär. Es ist $k \geqq 2$, da $\mathfrak{G}$ nichtabelsch ist. Weiterhin gilt $(AB)^2 = B^{2^{n-1}}$, also $(AB)^{2^k} = E$. Außerdem ist $A^{2^k}B^{2^k} = B^{2^k}$. Wir erhalten wie in Beispiel 1: $\mathfrak{G}$ ist scharf n-regulär.

4. Es sei $\mathfrak{G} = \langle A, B \rangle$ mit $|\mathfrak{G}| = 2^{n+1}, n \geqq 3$, sowie $B^{2^n} = A^2 = E$ und $ABA = B^{1+2^{n-1}}$. Es ist $[A, B] = B^{2^{n-1}}$ und $[A, B]^A = [A, B]^B = [A, B]$. Damit gilt $\mathfrak{G}' = \langle [A, B]^G \mid$

$G \in \mathfrak{G}\rangle = \langle [A, B] \rangle = \langle B^{2^{n-1}} \rangle$. $|\mathfrak{G}'| = |\langle B^{2^{n-1}} \rangle| = 2$ bedeutet $c(\mathfrak{G}) = 2$. Mit Satz 7 erhalten wir: $\mathfrak{G}$ ist scharf 2-regulär.

5. Die abelschen 2-Gruppen mit zyklischem Normalteiler vom Index 2 sind regulär (1-regulär).

§ 4. Das Problem der Bestimmung einer nicht p-regulären k-Gruppe kleinster Ordnung

Im folgenden wird zu jeder natürlichen Zahl k eine Zahl $n(k, p)$ mit den folgenden Eigenschaften gesucht:

(1) Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige p-Gruppe mit $|\mathfrak{G}| \leqq p^{n(k,p)}$, so ist $\mathfrak{G}$ k-regulär.

(2) Es existiert eine nicht k-reguläre p-Gruppe der Ordnung $p^{n(k,p)+1}$.

Für $k = 1$ ist bekannt, daß $n(1, p) = p$ gilt (P. HALL [1], Corollary 4.14, S. 73, und B. HUPPERT [3], III, Satz 10.3 d), S. 323).

Offenbar ist jede 2-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{G}| \leqq 2^{k+1}$ k-regulär, denn sie ist entweder zyklisch oder hat höchstens den Exponenten 2^k. In § 3 wurde gezeigt, daß die Diedergruppe, die Quaternionengruppe und für $k \geqq 2$ die Gruppe $\mathfrak{G} = \langle A, B \rangle$ mit $B^{2^{k+1}} = A^2 = E$ und $ABA = B^{-1}$ scharf $(k + 1)$-reguläre, also nicht k-reguläre 2-Gruppen der Ordnung 2^{k+2} sind. Andere nicht k-reguläre 2-Gruppen der Ordnung 2^{k+2} kann es nicht geben, da offenbar jede dieser Gruppen einen zyklischen Normalteiler vom Index 2 enthalten muß. Alle derartigen Gruppen wurden in § 3 untersucht. Für $p = 2$ gilt also

$$n(k, 2) = k + 1.$$

Um $n(k, p)$ für allgemeines p nach oben abschätzen zu können, betrachten wir in Verallgemeinerung der p-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^2}$ das folgende Beispiel.

Beispiel. Für jedes p gibt es eine scharf $(k + 1)$-reguläre p-Gruppe der Ordnung p^{pk+1}, z. B. das Kranzprodukt einer zyklischen Gruppe der Ordnung p^k mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p.

Beweis. Es sei $\mathfrak{A} = \langle A_1 \rangle \times \langle A_2 \rangle \times \cdots \times \langle A_p \rangle$ eine abelsche Gruppe mit ord $A_i = p^k$ für $1 \leqq i \leqq p$. Man betrachte dann die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\langle X \rangle$ mit ord $X = p$ sowie $A_i^X = A_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, p - 1)$ und $A_p^X = A_1$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also isomorph zum Kranzprodukt einer zyklischen Gruppe der Ordnung p^k mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung p.

Da $\mathfrak{G}$ offenbar zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^{k+1}}$ isomorph ist, gilt $\exp \mathfrak{G} \leqq p^{k+1}$. Damit ist $\mathfrak{G}$ $(k + 1)$-regulär.

Es ist $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{A}$, also $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ würde somit $(YZ)^{p^k} = Y^{p^k} Z^{p^k}$ für alle $Y, Z \in \mathfrak{G}$ erfordern. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}(A_1 X^{-1})^p &= A_1^{1+X+X^2+\cdots+X^{p-1}} X^{-p} \\ &= A_1 A_2 \cdots A_p.\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$(A_1 X^{-1})^{p^k} = (A_1 A_2 \cdots A_p)^{p^{k-1}} \neq E = A_1^{p^k} X^{-p^k}.$$

Somit ist $\mathfrak{G}$ nicht k-regulär.

Folgerung. Die p-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{p^k}$ sind scharf k-regulär, denn sie haben den Exponenten p^k und enthalten eine zum obigen Beispiel isomorphe Untergruppe, wobei ord $A_i = p^{k-1}$ gilt.

Das obige Beispiel zeigt, daß $n(k, p) \leqq pk$ ist. Im weiteren wird sich jedoch erweisen, daß diese Abschätzung für $k > 1$ ungenau ist.

Um die Umkehrung von Satz 6 (§ 3) in einem Spezialfall beweisen zu können, benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 4. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein abelscher Normalteiler einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$.*

a) *Für alle A_1, A_2 aus $\mathfrak{A}$ und alle G aus $\mathfrak{G}$ gilt*

$$[A_1A_2, G] = [A_1, G]\,[A_2, G].$$

b) *Für $A \in \mathfrak{A}$ und $G \in \mathfrak{G}$ und alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$(GA)^n = G^nA^n \prod_{i=2}^{n} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{i-1}\Big]^{\binom{n}{i}}.$$

Beweis. Siehe B. HUPPERT [3], III, Hilfssatz 10.9, S. 330.

Es folgt die angekündigte Umkehrung von Satz 6 in einem speziellen Fall.

Satz 8. *Die p-Gruppe $\mathfrak{G}$ habe einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ vom Index p. Ist $\mathfrak{G}$ k-regulär, so gilt*

$$\mho_{k-j}\big(Z_{p^j}(\mathfrak{G})\big) = \mathfrak{E}$$

für $j = 1, \ldots, k$. Außerdem ist stets $\mho_k\big(Z_2(\mathfrak{G})\big) = \mathfrak{E}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{A}, G\rangle$. Zunächst zeigen wir, daß

$$Z_j(\mathfrak{G}) = \left\langle \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{j-1}\Big]^X \mid A \in \mathfrak{A},\ X \in \mathfrak{G} \right\rangle =: \mathfrak{N}$$

für alle $j \geqq 2$ gilt.
Es ist $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}, G\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{G}$, so daß

$$Z_j(\mathfrak{G}) = \langle [X_1, X_2, \ldots, X_j]^Y \mid X_i \in \mathfrak{M},\ Y \in \mathfrak{G}\rangle$$

ist. Um ein Element $\neq E$ zu erhalten, ist notwendig

$$[X_1, X_2] = [A, G]^{\pm 1}$$

mit einem gewissen $A \in \mathfrak{A}$ sowie $X_3 = \cdots = X_j = G$.
Ist $[X_1, X_2] = [A, G]$, so ist $[X_1, X_2, \ldots, X_j] \in \mathfrak{N}$.
Es sei $[X_1, X_2] = [A, G]^{-1}$. Dann ist $[X_1, X_2] = [A, G]^{\mathrm{ord}[A,G]-1}$, und es folgt nach Hilfssatz 4a) $[X_1, X_2, \ldots, X_j] \in \mathfrak{N}$ und damit $Z_j(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}$, wie behauptet.
Es gilt für k-reguläres $\mathfrak{G}$ wegen $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{A}]$

$$\mho_k(\mathfrak{G}') = \mho_k([\mathfrak{G}, \mathfrak{A}]) = [\mho_k(\mathfrak{G}), \mathfrak{A}] = \mathfrak{E}, \text{ weil } \mho_k(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{A} \text{ ist.}$$

Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ erfordert also

$$(GA)^{p^k} = G^{p^k}A^{p^k}$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$.
Wir beweisen jetzt: $\mho_{k-j}\big(Z_{p^j}(\mathfrak{G})\big) = \mathfrak{E}$ für alle j mit $1 \leqq j \leqq k$ durch Induktion nach j.
Es sei zunächst $j = 1$. Wir wenden Hilfssatz 4b) für $n = p$ an und erhalten

$$(GA)^p = G^pA^p[A, G]^{\binom{p}{2}} \cdots \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-2}\Big]^{\binom{p}{p-1}} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-1}\Big].$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen sämtlichst Elemente aus $\mathfrak{A}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}(GA)^{p^k} &= \left(G^p A^p [A, G]^{\binom{p}{2}} \cdots \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-2}\Big]^{\binom{p}{p-1}} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-1}\Big]\right)^{p^{k-1}} \\ &= G^{p^k} A^{p^k} [A, G]^{\binom{p}{2} p^{k-1}} \cdots \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-1}\Big]^{p^{k-1}} \\ &= G^{p^k} A^{p^k} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-1}\Big]^{p^{k-1}}.\end{aligned}$$

Es muß also $\Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p-1}\Big]^{p^{k-1}} = E$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gelten, d. h., alle erzeugenden Elemente von $Z_p(\mathfrak{G})$ haben höchstens die Ordnung p^{k-1}, und damit hat $Z_p(\mathfrak{G})$ als abelsche Gruppe höchstens den Exponenten p^{k-1}, also ist $\mho_{k-1}(Z_p(\mathfrak{G})) = \mathfrak{E}$. Es sei jetzt $1 < j \leqq k$, und es gelte bereits

$$\mho_{k-r}(Z_{p^r}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{E}$$

für alle r mit $1 \leqq r \leqq j - 1$.
Wir wenden Hilfssatz 4b) für $n = p^j$ an und erhalten

$$(GA)^{p^j} = G^{p^j} A^{p^j} [A, G]^{\binom{p^j}{2}} \cdots \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p^j-2}\Big]^{\binom{p^j}{p^j-1}} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p^j-1}\Big].$$

Daraus folgt

$$(GA)^{p^k} = G^{p^k} A^{p^k} [A, G]^{\binom{p^j}{2} p^{k-j}} \cdots \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p^j-1}\Big]^{p^{k-j}}.$$

Nach Induktionsannahme bedeutet das

$$(GA)^{p^k} = G^{p^k} A^{p^k} \Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p^j-1}\Big]^{p^{k-j}}.$$

Somit muß also $\Big[A, \underbrace{G, \ldots, G}_{p^j-1}\Big]^{p^{k-j}} = E$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gelten, und wir erhalten $\mho_{k-j}(Z_{p^j}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{E}$.

Folgerung (B. HUPPERT [3], III, Satz 10.10, S. 330). Die p-Gruppe $\mathfrak{G}$ habe einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ vom Index p. Ist $\mathfrak{G}$ regulär, so hat $\mathfrak{G}$ höchstens die Klasse $p - 1$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 8 mit $k = 1$.

Jetzt können wir für $n(k, p)$ eine bessere obere Schranke angeben. Im folgenden werden wir in Anlehnung an ein Beispiel von BLACKBURN (siehe B. HUPPERT [3], III, Beispiel 10.15, S. 334) für jedes $k \geqq 1$ eine nicht k-reguläre Gruppe der Ordnung $p^{(p-1)k+2}$ konstruieren.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{A} = \langle A_1 \rangle \times \langle A_2 \rangle \times \cdots \times \langle A_{p-1} \rangle$ eine abelsche Gruppe mit ord $A_1 = p^{k+1}$ und ord $A_i = p^k$ füi $2 \leqq i \leqq p - 1$. Dann ist die Abbildung α mit

$$A_i^\alpha = A_i A_{i+1} \ (1 \leqq i \leqq p - 2) \text{ und } A_{p-1}^\alpha = A_{p-1} A_1^{-\binom{p}{1}} A_2^{-\binom{p}{2}} \cdots A_{p-1}^{-\binom{p}{p-1}}$$

offenbar ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$.
Wir zeigen

$$\text{ord } \alpha = p.$$

Zunächst betrachten wir $A_1^{\alpha^p}$: Offensichtlich ist

$$A_1^{\alpha^{p-2}} = A_1 A_2^{\binom{p-2}{1}} A_3^{\binom{p-2}{2}} \cdots A_{p-1}^{\binom{p-2}{p-2}}.$$

Daraus folgt

$$A_1^{\alpha^{p-1}} = A_1 A_2^{\binom{p-1}{1}} A_3^{\binom{p-1}{2}} \cdots A_{p-2}^{\binom{p-1}{p-3}} A_{p-1}^{\binom{p-1}{p-2}} A_1^{-\binom{p}{1}} A_2^{-\binom{p}{2}} \cdots A_{p-1}^{-\binom{p}{p-1}}.$$

Somit gilt

$$A_1^{\alpha^p} = A_1 A_2^{\binom{p}{1}} \cdots A_{p-1}^{\binom{p}{p-2}} \left(A_1^{-\binom{p}{1}} A_2^{-\binom{p}{2}} \cdots A_{p-1}^{-\binom{p}{p-1}}\right)^{\binom{p-1}{p-2}} B,$$

$$B = A_1^{-\binom{p}{1}} A_2^{-\left(\binom{p}{2}+\binom{p}{1}\right)} \cdots A_{p-1}^{-\left(\binom{p}{p-1}+\binom{p}{p-2}\right)} \left(A_1^{\binom{p}{1}} A_2^{\binom{p}{2}} \cdots A_{p-1}^{\binom{p}{p-1}}\right)^{\binom{p}{p-1}}.$$

Also ist

$$A_1^{\alpha^p} = A_1^{1-\binom{p-1}{p-2}p-p+p\binom{p}{p-1}} \prod_{j=2}^{p-1} A_j^{\binom{p}{j-1}-\binom{p}{j}\binom{p-1}{p-2}-\binom{p}{j}-\binom{p}{j-1}+\binom{p}{j}\binom{p}{p-1}}.$$

Es gilt $1 - \binom{p-1}{p-2} p - p + p \binom{p}{p-1} = 1 - (p-1)p - p + p^2 = 1$ sowie

$$\binom{p}{j-1} - \binom{p}{j}\binom{p-1}{p-2} - \binom{p}{j} - \binom{p}{j-1} + \binom{p}{j}\binom{p}{p-1}$$
$$= \binom{p}{j-1} - \binom{p}{j} p + \binom{p}{j} - \binom{p}{j} - \binom{p}{j-1} + \binom{p}{j} p = 0,$$

d. h. $A_1^{\alpha^p} = A_1$.

Wir zeigen jetzt $A_j^{\alpha^p} = A_j$ für $2 \leqq j \leqq p-1$ durch Induktion nach j. Es sei schon $A_{j-1}^{\alpha^p} = A_{j-1}$. Dann gilt $A_{j-1}^{\alpha^{p+1}} = A_{j-1}^{\alpha} = A_{j-1}A_j$. Daraus folgt $A_j = A_{j-1}^{-1}A_{j-1}^{\alpha}$ und somit

$$A_j^{\alpha^p} = (A_{j-1}^{-1}A_{j-1}^{\alpha})^{\alpha^p} = (A_{j-1}^{\alpha^p})^{-1} A_{j-1}^{\alpha} = A_{j-1}^{-1}A_{j-1}A_j = A_j.$$

Also ist ord $\alpha = p$, wie behauptet.
Wir betrachten nun die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\langle X\rangle$ mit $A^X = A^\alpha$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $X^p = E$. Dann hat die Gruppe $\mathfrak{G}$ als semidirektes Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\langle X\rangle$ die Ordnung $p^{(p-1)k+2}$. Offensichtlich ist

$$[A_1, \underbrace{X, \ldots, X}_{p-1}] = A_1^{-\binom{p}{1}} A_2^{-\binom{p}{2}} \cdots A_{p-1}^{-\binom{p}{p-1}}.$$

Daraus folgt $[A_1, \underbrace{X, \ldots, X}_{p-1}]^{p^{k-1}} = A_1^{-p^k} \neq E$ und somit $\mho_{k-1}(Z_p) > \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 8 nicht k-regulär.

Bemerkung. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ im Beispiel ist in gewissem Sinne verallgemeinerte Diedergruppe, denn es gilt für $p = 2$: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\langle X\rangle$, $\mathfrak{A} = \langle A_1\rangle$, ord $A_1 = 2^{k+1}$, ord $X = 2$ sowie $A_1^X = A_{2-1}^{\alpha} = A_1A_1^{-2} = A_1^{-1}$.

LITERATUR

[1] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc. **36** (1933), 29–95.

[2] Hall, P.: On a theorem of Frobenius, Proc. London Math. Soc. **40** (1936), 468–507.

[3] Huppert, B.: Endliche Gruppen I, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

Manuskripteingang: 15. 9. 1978

VERFASSER:

Wolfgang Bannuscher, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock