Werk

Titel: Über das Zutreffen einer Eigenschaft einer Menge auf die Elemente der Potenzmenge...

Autor: Thron, R.

Jahr: 1981

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0011|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
11 (1981), 41–50

Über das Zutreffen einer Eigenschaft einer Menge auf die Elemente der Potenzmenge[1])

REINHARD THRON

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 75. Geburtstag gewidmed

0. Einleitung

Eine Eigenschaft einer Menge trifft nicht notwendig auf die Elemente der Potenzmenge zu. So enthält z. B. ein konvexes Vieleck einer euklidischen Ebene nicht nur konvexe Teilmengen.
Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist eine gewisse Beschreibung des Zutreffens einer Eigenschaft einer Menge auf die Elemente der Potenzmenge. Hierzu sei E eine Menge geordneter Paare $\big(P(M), P(M)_0\big)$, wobei $P(M)$ die Potenzmenge einer Menge M ist und $P(M)_0$ diejenigen Elemente aus $P(M)$ enthält, auf die eine gewisse Eigenschaft von M zutrifft. Dann läßt sich E bezüglich des Zutreffens der Eigenschaft von M auf die Elemente aus der Potenzmenge $P(M)$ bei den verschiedenen Paaren $\big(P(M), P(M)_0\big)$ wie folgt klassifizieren.
Zunächst existiert in E eine Äquivalenzrelation, wobei zwei Paare $\big(P(M), P(M)_0\big)$ und $\big(P(N), P(N)_0\big)$ genau dann äquivalent sind, falls eine eineindeutige Abbildung von M auf N existiert, wodurch $P(M)_0$ auf $P(N)_0$ abgebildet wird. Weiter gibt es in der Menge der Äquivalenzklassen eine Halbordnungsrelation mit der Eigenschaft, daß die von den Paaren $\big(P(M), P(M)_0\big)$ und $\big(P(N), P(N)_0\big)$ erzeugten Äquivalenzklassen genau dann in Relation stehen, falls es eine eineindeutige Abbildung von M auf N gibt, wobei $P(M)_0$ in $P(N)_0$ abgebildet wird und keine entsprechende Abbildung von N auf M existiert.
Wird vorausgesetzt, daß zu jedem $\big(P(M), P(M)_0\big)$ aus E gewisse Abbildungen von $P(M)$ in $P(M)_0$ existieren, die ähnliche Eigenschaften wie Hüllenoperatoren auf einer halbgeordneten Menge haben, so läßt sich das Zutreffen der zu M gehörenden Eigenschaft auf die Elemente aus $P(M)$ mittels Homologiemoduln beschreiben. Hierzu wird jedem Paar $\big(P(M), P(M)_0\big)$ ein Kettenkomplex bzw. die Folge der zum Kettenkomplex gehörenden Homologiemoduln zugeordnet. Zu verschiedenen Paaren gehören nicht notwendig verschiedene Folgen von Homologiemoduln. Weiter gehören zu äquivalenten Paaren solche Folgen, bei denen die entsprechenden Homologiemoduln isomorph sind. Stehen jedoch die von den Paaren erzeugten Äquivalenzklassen in Relation, so existieren gewisse homomorphe Abbildungen von den Homologiemoduln der einen Folge in die entsprechenden Homologiemoduln der anderen Folge.
In der vorliegenden Arbeit werden die genannten Ergebnisse in etwas allgemeinerer

---

[1]) Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Pädagogische Hochschule „N. K. Krupskaja", Halle 1977.

Form dargestellt, indem statt der Potenzmenge eine kommutative Halbgruppe betrachtet wird. Darüber hinaus werden eine direkte Summendarstellung von Homologiemoduln sowie Verschwindungssätze für direkte Summanden angegeben.

1. Eine Menge geordneter Paare

Es wird von einer Menge E geordneter Paare (K, K_0) ausgegangen, wobei K ein Halbmodul, d. h. eine kommutative Halbgruppe, ist und darüber hinaus $K_0 \subseteqq K$ gilt. In E gibt es eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ derart, daß folgendes gilt:

Für alle (K, K_0) und (L, L_0) aus E gilt $(K, K_0) \sim (L, L_0)$ genau dann, wenn ein Isomorphismus f von K auf L mit $f(K_0) = L_0$ existiert.

Für jedes (K, K_0) aus E sei $[K, K_0]$ die durch (K, K_0) bezüglich der Relation $\sim$ in E erzeugte *Äquivalenzklasse* und $[E]$ die Menge aller Äquivalenzklassen.
In $[E]$ existiert eine *irreflexive Halbordnungsrelation* $<$ mit folgenden Eigenschaften:

Für alle $[K, K_0]$ und $[L, L_0]$ aus $[E]$ gilt $[K, K_0] < [L, L_0]$ genau dann, wenn ein Isomorphismus f von K auf L mit $f(K_0) \subseteqq L_0$ existiert und es keinen Isomorphismus g von L auf K mit $g(L_0) \subseteqq K_0$ gibt.

Beispiel. Es sei V die Menge der konvexen, abgeschlossenen Vielecke mit endlicher Eckenzahl einer euklidischen Ebene. Zu jedem Vieleck u aus V gehört ein geordnetes Paar $\big(K(u), K_0(u)\big)$, das wie folgt charakterisiert ist: $\big(K(u), K_0(u)\big)$ besteht aus dem Halbmodul $K(u)$, der durch die Elemente der Potenzmenge des Randes von u und u bezüglich der Mengenvereinigung als Operation erzeugt wird, sowie aus derjenigen Teilmenge $K_0(u)$ von $K(u)$, die genau die konvexen Elemente aus $K(u)$ enthält.
Nun sei $E = \big\{\big(K(u), K_0(u)\big) : u \in V\big\}$. Dann gilt für alle $\big(K(u), K_0(u)\big)$ und $\big(K(v), K_0(v)\big)$ aus E genau dann $[K(u), K_0(u)] < [K(v), K_0(v)]$, wenn die Eckenzahl von v kleiner als die Eckenzahl von u ist, und genau dann $[K(u), K_0(u)] = [K(v), K_0(v)]$, wenn die Eckenzahl von v gleich der Eckenzahl von u ist.

2. Paare mit A-Bedingung

Zur Formulierung einer sogenannten A-Bedingung wird für (K, K_0) aus E zunächst der Begriff des *Hauptideals* in K eingeführt:

Für alle x aus K ist $\underline{x} := \{x + y : y \in K\}$ das durch x erzeugte Hauptideal bezüglich K.

Dann lautet die *A-Bedingung* für (K, K_0) aus E wie folgt:

Zu jedem x aus K existiert ein x_0 aus K_0 mit $\underline{x_0} \subseteqq \underline{x}$. Für alle x aus K und alle x_0 aus K_0 mit $\underline{x_0} \subseteqq \underline{x}$ existiert ein x_0' aus K_0 mit $\underline{x_0} \subseteqq \underline{x_0'} \subseteqq \underline{x}$ und $\{z : \underline{x_0'} \subseteqq \underline{z} \subseteqq \underline{x},\ z \in K_0\} = \{x_0'\}$.

Zu jedem (K, K_0), das der A-Bedingung genügt, gibt es eine Menge S derjenigen *Operatoren* s auf K in K_0, für die folgendes gilt:

Für alle x aus K sind die Beziehungen $\underline{s(x)} \subseteqq \underline{x}$ und $\{z : \underline{s(x)} \subseteqq \underline{z} \subseteqq \underline{x},\ z \in K_0\} = \{s(x)\}$ erfüllt.

Es bestehen enge Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Hüllenoperatoren auf einer halbgeordneten Menge und den Operatoren aus S, wie die folgenden Beziehungen zeigen (vgl. [2]).

Hierzu sei die A-Bedingung für (K, K_0) aus E erfüllt und S die zu (K, K_0) gehörende Operatormenge. Dann gilt:

Für alle x_0 aus K_0 und alle s aus S ist $\underline{s(x_0)} = \underline{x_0}$. Für alle x und y aus K mit $\underline{y} \subseteqq \underline{x}$ und alle s aus S existiert ein t aus S, so daß $\underline{s(y)} \subseteqq \underline{t(x)}$ gilt. Für alle x aus K und alle s und t aus S gilt $\underline{s\big(t(x)\big)} = \underline{t(x)}$.

Ist nun K ein Halbmodul mit $x + x = x$ für $x \in K$ und s ein Hüllenoperator von K in K bezüglich der Halbordnung $\leqq$ von K mit der Eigenschaft, daß für $x, y \in K$ genau dann $x \leqq y$ gilt, falls $x + y = y$ ist, so erfüllt das Paar $\big(K, s(K)\big)$ die A-Bedingung, falls $\big(K, s(K)\big) \in E$ ist. Weiter gilt, daß die zu dem Paar $\big(K, s(K)\big)$ gehörende Operatorenmenge S genau den Hüllenoperator s enthält.

Der folgende Satz gibt an, wie sich die Äquivalenzklassenhalbordnung in E durch Operatorenmengen beschreiben läßt.

Satz 1. *Es seien (K, K_0) und (L, L_0) aus E. Weiter sei für diese Elemente aus E die A-Bedingung erfüllt. Zu (K, K_0) gehöre die Operatorenmenge S, und zu (L, L_0) gehöre die Operatorenmenge T. Dann gilt:*

(1) *Aus $[K, K_0] < [L, L_0]$ folgt die Existenz eines Isomorphismus f von K auf L, so daß es für alle x aus K und alle s aus S ein t aus T mit $\underline{f\big(s(x)\big)} \subseteqq \underline{t\big(f(x)\big)}$ gibt.*

(2) *Aus $[K, K_0] = [L, L_0]$ folgt die Existenz eines Isomorphismus f von K auf L, so daß es für alle x aus K und alle s aus S ein t aus T mit $\underline{f\big(s(x)\big)} = \underline{t\big(f(x)\big)}$ gibt.*

Beweis. Zu (1): Zunächst existiert ein Isomorphismus f von K auf L mit $f(K_0) \subseteqq L_0$. Nun sei x aus K und s aus S. Dann gilt $\underline{s(x)} \subseteqq \underline{x}$ mit $s(x) \in K_0$. Hieraus folgt $\underline{f\big(s(x)\big)} \subseteqq \underline{f(x)}$ mit $f\big(s(x)\big) \in L_0$. Nun existiert zu jedem t_1 aus T ein t aus T, so daß $\underline{t_1\big(f(s(x))\big)} \subseteqq \underline{t\big(f(x)\big)}$ gilt. Weil nun $f\big(s(x)\big)$ aus L_0 ist, folgt $\underline{f\big(s(x)\big)} \subseteqq \underline{t\big(f(x)\big)}$.

Zu (2): Es existieren Isomorphismen f von K auf L und f^{-1} von L auf K mit $f(K_0) \subseteqq L_0$ und $f^{-1}(L_0) \subseteqq K_0$. Nach (1) gelten dann die Aussagen:

(3) Für alle x aus K und alle s aus S existiert ein t aus T mit $\underline{f\big(s(x)\big)} \subseteqq \underline{t\big(f(x)\big)}$.

(4) Für alle y aus L und alle p aus T existiert ein q aus S mit $\underline{f^{-1}\big(p(y)\big)} \subseteqq \underline{q\big(f^{-1}(y)\big)}$.

Nun sei x aus K und $y = f(x)$ mit y aus L. Setzt man y in (4) ein, so folgt:

(5) Für alle x aus K und alle p aus T existiert ein q aus S mit $\underline{f^{-1}\big(p(f(x))\big)} \subseteqq \underline{q\big(f^{-1}(f(x))\big)}$ und nach Anwendung von f mit $\underline{p\big(f(x)\big)} \subseteqq \underline{f\big(q(x)\big)}$.

Nun wähle man in (3) s mit $s = q$. Dann gilt: Für alle x aus K existiert ein t aus T mit $\underline{f\big(q(x)\big)} \subseteqq \underline{t\big(f(x)\big)} \subseteqq \underline{f(x)}$.
Zusammen mit (5) ergibt das die Beziehung: Für alle x aus K und alle p aus T existiert ein q aus S mit $\underline{p\big(f(x)\big)} \subseteqq \underline{f\big(q(x)\big)} \subseteqq \underline{f(x)}$, und weil $f\big(q(x)\big)$ aus L_0 ist, mit $\underline{p\big(f(x)\big)} = \underline{f\big(q(x)\big)}$, q. e. d.

Beispiel. Es sei E die Menge der Paare $\big(K(u), K_0(u)\big)$ aus dem Beispiel von Abschnitt 1. Dann erfüllt jedes Paar $\big(K(u), K_0(u)\big)$ die A-Bedingung. Die zu einem beliebigen Paar $\big(K(u), K_0(u)\big)$ gehörende Operatorenmenge S enthält genau einen Operator s, der jedem x aus $K(u)$ die konvexe Hülle $s(x)$ von x zuordnet, falls diese in $K_0(u)$ enthalten ist. Andernfalls ist $s(x) = u$.

3. Eine Beschreibung der Halbordnung durch Homologiemoduln

Es werden denjenigen Elementen aus E, die der A-Bedingung genügen, Kettenkomplexe zugeordnet. Zunächst gehört zu jeder Menge X und jeder natürlichen Zahl q ein *Modul* $A_q(X)$, der wie folgt charakterisiert ist:

$A_q(X)$ wird von den formalen Produkten $x_0 x_1 \cdots x_q$ mit $\{x_0, x_1, \ldots, x_q\} \subseteqq X$ erzeugt, wobei die definierende Gleichung $x_0 \cdots x_i x_{i+1} \cdots x_q + x_0 \cdots x_{i+1} x_i \cdots x_q = 0$ für $x_i \neq x_{i+1}$ besteht, falls $x_0 \cdots x_{i+1} x_i \cdots x_q$ aus $x_0 \cdots x_i x_{i+1} \cdots x_q$ durch Vertauschung von x_i mit x_{i+1} hervorgeht.

Nun werden spezielle Untermoduln der Moduln $A_q(X)$ betrachtet. Hierzu sei (K, K_0) ein die A-Bedingung erfüllendes Element aus E, S sei die zu (K, K_0) gehörende Operatorenmenge. Weiter sei X eine Teilmenge von K. Dann existiert für jede natürliche Zahl q ein *Untermodul* $D_q(X)$ von $A_q(X)$, der wie folgt definiert ist:

Es ist $D_0(X) = A_0(X)$.

Für jede natürliche Zahl q mit $1 \leqq q$ wird $D_q(X)$ von genau denjenigen Produkten $x_0 \cdots x_q$ aus $A_q(X)$ erzeugt, für die folgendes gilt: Es ist $x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots x_q \in D_{q-1}(X)$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq q$, und es gibt eine natürliche Zahl i mit $0 \leqq i \leqq q$, so daß ein s aus S existiert mit

$$\underline{s(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_q)} \nsubseteq \underline{t(x_0 + \cdots + x_i + \cdots + x_q)}$$

für alle t aus S.

Wegen $D_q(X) \subseteqq A_q(X)$ existiert der *Faktormodul* $A_q(X)/D_q(X)$, der mit $C_q(X)$ bezeichnet wird. Bei jeder Restklasse $\bar{u}$ aus $C_q(X)$ sei im folgenden stets u ein Repräsentant aus $A_q(X)$. Es gibt einen *Kettenkomplex* $C(X)$ mit Moduln $C_q(X)$ und mit *Homomorphismen* $d_q\colon C_q(X) \to C_{q-1}(X)$, die folgende Eigenschaften haben (vgl. [1]):

Für jede natürliche Zahl q und jedes $\overline{x_0 \cdots x_q}$ aus $C_q(X)$ gilt

$$d_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, \overline{x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots x_q}.$$

Nun werden *Kettenabbildungen* $f^*\colon C \to C^*$ zwischen Kettenkomplexen C und C^* betrachtet, die wie folgt charakterisiert sind (vgl. [1]):

Für jede natürliche Zahl q gibt es einen Epimorphismus $f_q\colon C_q \to C_q^*$ mit $d_q^* f_q = f_{q-1} d_q$. Sind die f_q Isomorphismen, so heißt f^* Kettenisomorphismus.

Satz 2. *Es seien (K, K_0) und (L, L_0) die A-Bedingung erfüllende Elemente aus E. Dann gilt: Ist $[K, K_0] < [L, L_0]$ bzw. $[K, K_0] = [L, L_0]$, so existiert ein derartiger Isomorphismus f von K auf L, daß jede Teilmenge X von K eine Teilmenge Y von L und eine Kettenabbildung bzw. einen Kettenisomorphismus $f^*\colon C(X) \to C(Y)$ induziert, wobei für jede natürliche Zahl q und jedes $\overline{x_0 \cdots x_q}$ aus $C_q(X)$ die Beziehung*

$$f_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) = \overline{f(x_0) \cdots f(x_q)}$$

gilt.

Beweis. Zu (K, K_0) gehöre die Operatorenmenge S, und zu (L, L_0) gehöre die Operatorenmenge T. Es sei $[K, K_0] < [L, L_0]$. Zunächst existiert ein Isomorphismus f von K auf L mit $f(K_0) \subseteqq L_0$. Für jede Teilmenge X von K werde nun $Y = f(X)$ gesetzt. Nun betrachte man die Moduln $C_q(X)$ und $C_q(Y)$ für jede natürliche Zahl q. Für jedes $\overline{x_0 \cdots x_q}$ aus $C_q(X)$ werde $f_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) := \overline{f(x_0) \cdots f(x_q)}$ gesetzt sowie $f_q(\bar{a} + \bar{b}) = f_q(\bar{a}) + f_q(\bar{b})$ für alle $\bar{a}$ und $\bar{b}$ aus $C_q(X)$. Dann ist f_q ein Epimorphismus von $C_q(X)$

auf $C_q(Y)$: Zunächst ist $f_q(\overline{x_0\cdots x_q})$ von der speziellen Darstellung von $x_0\cdots x_q$ in $A_q(X)$ unabhängig.
Weiter ist $f_q(\overline{x_0\cdots x_q})$ von der speziellen Auswahl des Repräsentanten von $\overline{x_0\cdots x_q}$ in $A_q(X)$ unabhängig, denn es gilt für alle $x_0\cdots x_q$ aus $D_q(X)$ die Beziehung $f_q(\overline{x_0\cdots x_q}) = \bar{0}$, wie durch vollständige Induktion nach q folgt. Für $q = 0$ gilt nämlich wegen $D_0(Y) = A_0(Y)$ die Beziehung $f_0(\overline{x_0}) = \bar{0}$.
Nun gelte $f_k(\overline{x_0\cdots x_k}) = \bar{0}$ für eine natürliche Zahl k und alle $x_0\cdots x_k$ aus $D_k(X)$. Es sei $x_0\cdots x_{k+1}$ aus $D_{k+1}(X)$. Dann ist zunächst $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_{k+1}$ aus $D_k(X)$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq k+1$, und es gibt eine natürliche Zahl i mit $0 \leqq i \leqq k+1$, so daß ein p aus S existiert mit

$$\underline{p(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{k+1})} \nsubseteq \underline{v(x_0 + \cdots + x_{k+1})}$$

für alle v aus S. Nun ist auch $y_0\cdots y_{k+1}$ aus $D_{k+1}(Y)$, wobei $y_i = f(x_i)$ ist. Denn $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_{k+1}$ ist aus $D_k(X)$, und nach Induktionsvoraussetzung ist auch $y_0\cdots\hat{y}_i\cdots y_{k+1}$ aus $D_k(Y)$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq k+1$. Außerdem gibt es eine natürliche Zahl i mit $0 \leqq i \leqq k+1$, so daß ein r aus T existiert mit

$$\underline{r(y_0 + \cdots + \hat{y}_i + \cdots + y_{k+1})} \nsubseteq \underline{s(y_0 + \cdots + y_{k+1})}$$

für alle s aus T. Andernfalls gilt für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq k+1$ die Beziehung: Für alle r aus T existiert ein s aus T mit

$$\underline{r(y_0 + \cdots + \hat{y}_i + \cdots + y_{k+1})} \subseteq \underline{s(y_0 + \cdots + y_{k+1})}.$$

Dann gilt für alle r aus T die Inklusion

$$\underline{r(y_0 + \cdots + \hat{y}_i + \cdots + y_{k+1})} \subseteq \underline{(y_0 + \cdots + y_{k+1})},$$

d. h., es ist

$$\underline{r\big(f(x_0) + \cdots + f(\hat{x}_i) + \cdots + f(x_{k+1})\big)} \subseteq \underline{\big(f(x_0) + \cdots + f(x_{k+1})\big)}.$$

Nach Satz 1, (1), gilt weiter: Für alle x aus K und alle u aus S existiert ein v aus T mit $\underline{f\big(u(x)\big)} \subseteq \underline{v\big(f(x)\big)}$. Wählt man nun r gleich v, so gilt für alle u aus S

$$\underline{f\big(u(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{k+1})\big)} \subseteq \underline{f(x_0 + \cdots + x_{k+1})}$$

mit $x = x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{k+1}$. Nach Anwendung von f^{-1} folgt für alle u aus S die Inklusion

$$\underline{u(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{k+1})} \subseteq \underline{(x_0 + \cdots + x_{k+1})}.$$

Hieraus folgt schließlich: Für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq k+1$ und alle u aus S existiert ein w aus S mit

$$\underline{u(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{k+1})} \subseteq \underline{w(x_0 + \cdots + x_{k+1})}.$$

Das ist ein Widerspruch dazu, daß $x_0\cdots x_{k+1}$ aus $D_{k+1}(X)$ ist. Somit ist $y_0\cdots y_{k+1}$ aus $D_{k+1}(Y)$ und $f_{k+1}(\overline{x_0\cdots x_{k+1}}) = \bar{0}$.

Es sei $[K, K_0] = [L, L_0]$. Zunächst existiert ein Isomorphismus f von K auf L mit $(K_0) = L_0$. Für jede Teilmenge X von K werde nun $Y = f(X)$ gesetzt. Für den Isomorphismus f^{-1} von L auf K gilt $f^{-1}(L_0) = K_0$. Also gibt es dann für jede natürliche Zahl q Monomorphismen $f_q: D_q(X) \to D_q(Y)$ und $f_q^{-1}: D_q(Y) \to D_q(X)$. Somit ist f_q ein Isomorphismus. Nun mögen zu $C(X)$ die Homomorphismen d_q^1 und zu $C(Y)$ die

Homomorphismen d_q^2 gehören. Dann gilt für jede natürliche Zahl q die Beziehung $d_q^2 f_q = f_{q-1} d_q^1$. Denn es ist

$$d_q^2 f_q(\overline{x_0\cdots x_q}) = d_q^2\bigl(\overline{f(x_0)\cdots f(x_q)}\bigr) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, \overline{f(x_0)\cdots f(\hat{x}_i)\cdots f(x_q)}$$

$$= f_{q-1}\Bigl(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, \overline{x_0\cdots \hat{x}_i\cdots x_q}\Bigr) = f_{q-1} d_q^1(\overline{x_0\cdots x_q}),$$

q. e. d.

Aus Satz 2 ergibt sich folgende Aussage über die zu den Kettenkomplexen $C(X)$ gehörenden *Homologiemoduln* $H_q\bigl(C(X)\bigr)$:

Satz 3. *Es seien* (K, K_0) *und* (L, L_0) *die A-Bedingung erfüllende Elemente aus E. Dann gilt: Ist* $[K, K_0] < [L, L_0]$ *bzw.* $[K, K_0] = [L, L_0]$, *so existiert ein derartiger Isomorphismus* f *von* K *auf* L, *daß jede Teilmenge* X *von* K *eine Teilmenge* Y *von* L *und einen Homomorphismus bzw. Isomorphismus* $f_q^*: H_q\bigl(C(X)\bigr) \to H_q\bigl(C(Y)\bigr)$ *für jede natürliche Zahl* q *induziert, wobei für jede Restklasse* $\overline{x_0\cdots x_q} + B_q(X)$ *aus* $H_q\bigl(C(X)\bigr)$ *die Beziehung*

$$f_q^*\bigl(\overline{x_0\cdots x_q} + B_q(X)\bigr) = \overline{f(x_0)\cdots f(x_q)} + B_q(Y)$$

gilt.
$B_q(X)$ *bzw.* $B_q(Y)$ *ist der Untermodul der Ränder von* $C_q(X)$ *bzw.* $C_q(Y)$.

4. Eine direkte Summendarstellung der Homologiemoduln

Zunächst werden spezielle *Untermoduln* $A_q^{2p}(X)$ der $A_q(X)$ eingeführt. *Hierzu sei* $A_q^{2p}(X)$ *derjenige Untermodul von* $A_q(X)$, *der von genau denjenigen Produkten* $x_0\cdots x_q$ *aus* $A_q(X)$ *erzeugt wird, die folgende Eigenschaft besitzen: Die größte Vielfachheit, in der irgendein* x *aus* X *im Produkt* $x_0\cdots x_q$ *als Faktor vorkommt, ist* $2p$ *oder* $2p+1$.
Offensichtlich ist $A_q^{2p}(X) = 0$ für $q + 2 \leqq 2p$.
Desgleichen werden auch spezielle *Untermoduln* $D_q^{2p}(X)$ der $D_q(X)$ mit $D_q^{2p}(X) = D_q(X) \cap A_q^{2p}(X)$ betrachtet. Weiter existiert der *Faktormodul* $A_q^{2p}(X)/D_q^{2p}(X)$, der mit $C_q^{2p}(X)$ bezeichnet wird.
Bei jeder Restklasse $\bar{u}$ aus $C_q^{2p}(X)$ sei im folgenden stets u ein Repräsentant aus $A_q^{2p}(X)$.
Nun induzieren für jede natürliche Zahl p die Moduln $C_q^{2p}(X)$ einen *Kettenkomplex* $C^{2p}(X)$ mit *Homomorphismen* $d_q^{2p}: C_q^{2p}(X) \to C_{q-1}^{2p}(X)$, für die gilt: *Für jede natürliche Zahl* q *und jedes* $\overline{x_0\cdots x_q}$ *aus* $C_q^{2p}(X)$ *ist*

$$d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, \overline{x_0\cdots \hat{x}_i\cdots x_q}.$$

Für jeden Homologiemodul $H_q\bigl(C(X)\bigr)$ existiert eine direkte Summendarstellung gemäß

Satz 4. *Jeder Homologiemodul* $H_q\bigl(C(X)\bigr)$ *besitzt eine direkte Summendarstellung* $H_q\bigl(C(X)\bigr) = \sum_{p\in N}^{\oplus} H_q\bigl(C^{2p}(X)\bigr)$, *wobei* N *die Menge der natürlichen Zahlen ist.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß $A_q(X) = \sum_{p\in N}^{\oplus} A_q^{2p}(X)$ ist, wobei nur endlich viele $A_q^{2p}(X)$ von 0 verschieden sind. Wegen $D_q(X) = \sum_{p\in N} D_q^{2p}(X)$ folgt hieraus $C_q(X) = \sum_{p\in N}^{\oplus} C_q^{2p}(X)$. Somit ist

$$H_q\bigl(C(X)\bigr) = \sum_{p\in N}^{\oplus} H_q\bigl(C^{2p}(X)\bigr),$$

q. e. d.

5. Verschwindungssätze für die direkten Summanden

Zum Auffinden von Kriterien, nach denen ein Modul $H_q(C^{2p}(X))$ gleich 0 ist, erweist es sich als nützlich, Homomorphismen folgender Art zu betrachten (vgl. [3]). Hierzu sei ein Kettenkomplex $C^{2p}(X)$ gegeben. Weiter sei y aus X, und es gelte

$$D_q^{2p}(X)\cdot\{y\}\cap A_{q+1}^{2p}(X)\subseteqq D_{q+1}^{2p}(X)$$

für eine natürliche Zahl q, wobei die Multiplikation mit y distributiv sei.
Dann gibt es einen *Homomorphismus* $h_q^{2p}\colon C_q^{2p}(X)\to C_{q+1}^{2p}(X)$, der folgende Eigenschaft hat:

Für jedes $\overline{x_0\cdots x_q}$ *aus* $C_q^{2p}(X)$ *gilt*

$$h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})=\begin{cases}(-1)^{q+1}\,\overline{x_0\cdots x_q y}, & \textit{falls } x_0\cdots x_q y \textit{ aus } A_{q+1}^{2p}(X) \textit{ ist,}\\ \bar{0}, & \textit{falls } x_0\cdots x_q y \textit{ nicht aus } A_{q+1}^{2p}(X) \textit{ ist.}\end{cases}$$

Satz 5. *Gegeben sei ein Kettenkomplex* $C^{2p}(X)$. *Weiter sei* y *aus* X *mit*

$$D_{q-1}^{2p}(X)\cdot\{y\}\cap A_q^{2p}(X)\subseteqq D_q^{2p}(X),$$
$$D_q^{2p}(X)\cdot\{y\}\cap A_{q+1}^{2p}(X)\subseteqq D_{q+1}^{2p}(X)$$

für eine natürliche Zahl q, *wobei die Multiplikation mit* y *distributiv sei. Dann gilt für die Homomorphismen* h_q^{2p} *und* h_{q-1}^{2p} *die Beziehung*

$$d_{q+1}^{2p}h_q^{2p}(\bar u)+h_{q-1}^{2p}d_q^{2p}(\bar u)=\bar u$$

für alle $\bar u$ *aus* $C_q^{2p}(X)$.

Beweis. Es genügt, daß für alle $\overline{x_0\cdots x_q}$ aus $C_q^{2p}(X)$ die Beziehung

$$d_{q+1}^{2p}h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})+h_{q-1}^{2p}d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})=\overline{x_0\cdots x_q}$$

gezeigt wird. Es sind die Fälle $x_0\cdots x_q y\in A_q^{2p}(X)$ und $x_0\cdots x_q y\notin A_q^{2p}(X)$ zu unterscheiden.

(1) Zunächst sei $x_0\cdots x_q y\in A_q^{2p}(X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&d_{q+1}^{2p}h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})+h_{q-1}^{2p}d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})\\ &=d_{q+1}^{2p}\big((-1)^{q+1}\overline{x_0\cdots x_q y}\big)+h_{q-1}^{2p}\Big(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}\Big)\\ &=(-1)^{q+1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y}+(-1)^{2q+2}\,\overline{x_0\cdots x_q}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,h_{q-1}^{2p}(\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}).\end{aligned}$$

Nun ist $\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y$ aus $A_q^{2p}(X)$, es gehört aber nicht notwendig $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0\leqq i\leqq q$ zu $A_q^{2p}(X)$. Es gilt aber

$$\sum_{i=0}^{q}{}^{*}\,(-1)^i\,x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y,$$

wobei $\sum^{*}$ die Summationen über diejenigen $(-1)^i\,x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y$ bedeutet, die in $A_p^{2p}(X)$ enthalten sind. Weil nun $h_{q-1}^{2p}(\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y})=\bar{0}$ ist, wenn $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y$ nicht in $A_q^{2p}(X)$

enthalten ist, folgt

$$\sum_{i=0}^{q}{}' (-1)^i\, h_{q-1}^{2p}(\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}) = \sum_{i=0}^{q}{}^{*} (-1)^i\, (-1)^q\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y}.$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$d_{q+1}^{2p} h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) + h_{q-1}^{2p} d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q})$$

$$= \overline{x_0\cdots x_q} + (-1)^{q+1} \sum_{i=0}^{q}{}^{*} (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y}$$

$$+ (-1)^q \sum_{i=0}^{q}{}^{*} (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y} = \overline{x_0\cdots x_q}.$$

(2) Nun sei $x_0\cdots x_q y \notin A_q^{2p}(X)$. Das ist nur möglich, wenn y im Produkt $x_0\cdots x_q$ mit der Vielfachheit $2p+1$ als Faktor vorkommt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = x_1 = \cdots = x_{2p} = y$. Wegen $h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \bar{0}$ ist $d_{q+1}^{2p} h_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \bar{0}$. Es gilt aber $h_{q-1}^{2p} d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \overline{x_0\cdots x_q}$; denn zunächst ist

$$d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \sum_{i=0}^{q}{}' (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}$$

$$= \sum_{i=0}^{2p}{}' (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q} + \sum_{i=2p+1}^{q}{}' (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}.$$

Wegen $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q = x_0\cdots\hat{x}_j\cdots x_q$ für alle natürlichen Zahlen i und j mit $0 \leqq i \leqq j \leqq 2p$ gilt

$$\sum_{i=0}^{2p}{}' (-1)^i\, x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q = x_1\cdots x_q \sum_{i=0}^{2p}{}' (-1)^i = x_1\cdots x_q.$$

Also ist

$$d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \overline{x_1\cdots x_q} + \sum_{i=2p+1}^{q}{}' (-1)^i\, \overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}.$$

Hieraus folgt

$$h_{q-1}^{2p} d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = (-1)^q\, \overline{x_1\cdots x_q y} + \sum_{i=2p+1}^{q}{}' (-1)^i\, h_{q-1}^{2p}(\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}).$$

Weiter gilt

$$(-1)^q\, x_1\cdots x_q y = (-1)^q\, x_1\cdots x_q x_0 = (-1)^q\, x_1\cdots x_{2p} x_{2p+1}\cdots x_q x_0$$

$$= (-1)^q\, (-1)^{q-2p}\, x_1\cdots x_{2p} x_0 x_{2p+1}\cdots x_q$$

$$= (-1)^{2q-2p}\, x_0\cdots x_{2p} x_{2p+1}\cdots x_q = x_0\cdots x_q.$$

Somit gilt

$$h_{q-1}^{2p} d_q^{2p}(\overline{x_0\cdots x_q}) = \overline{x_0\cdots x_q} + \sum_{i=2p+1}^{q}{}' (-1)^i\, h_{q-1}^{2p}(\overline{x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q}).$$

Nun ist aber $x_0\cdots\hat{x}_i\cdots x_q y$ nicht aus A_q^{2p} für alle natürlichen Zahlen i mit $2p+1 \leqq i \leqq q$.

Mithin ist $h^{2p}_{q-1} d^{2p}_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) = \overline{x_0 \cdots x_q}$, und es gilt insgesamt

$$d^{2p}_{q+1} h^{2p}_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) + h^{2p}_{q-1} d^{2p}_q(\overline{x_0 \cdots x_q}) = \overline{x_0 \cdots x_q},$$

q. e. d.

Aus Satz 5 ergibt sich die folgende Bedingung für das Verschwinden eines Homologiemoduls $H_q(C^{2p}(X))$:

Satz 6. *Gegeben sei ein Kettenkomplex $C^{2p}(X)$. Weiter sei y aus X mit*

$$D^{2p}_{q-1}(X) \cdot \{y\} \cap A^{2p}_q(X) \subseteqq D^{2p}_q(X),$$

$$D^{2p}_q(X) \cdot \{y\} \cap A^{2p}_{q+1}(X) \subseteqq D^{2p}_{q+1}(X)$$

für eine natürliche Zahl q, wobei die Multiplikation mit y distributiv sei. Dann gilt $H_q(C^{2p}(X)) = 0$.

Beweis. Zunächst ist $H_q(C^{2p}(X)) = Z_q(C^{2p}(X))/B_q(C^{2p}(X))$. $Z_q(C^{2p}(X))$ bzw. $B_q(C^{2p}(X))$ ist der Untermodul der Zyklen bzw. Ränder von $C^{2p}_q(X)$.
Nun gilt die Inklusion $Z_q(C^{2p}(X)) \subseteqq B_q(C^{2p}(X))$: Hierzu sei $\overline{u}$ aus $Z_q(C^{2p}(X))$. Es ist also $d^{2p}_q(\overline{u}) = \overline{0}$. Nach Satz 5 ist also

$$d^{2p}_{q+1} h^{2p}_q(\overline{u}) + h^{2p}_{q-1} d^{2p}_q(\overline{u}) = d^{2p}_{q+1} h^{2p}_q(\overline{u}) = \overline{u}.$$

Wegen $h^{2p}_q(\overline{u}) \in C^{2p}_{q+1}(X)$ ist somit $\overline{u}$ aus $B_q(C^{2p}(X))$. Mithin ist $H_q(C^{2p}(X)) = 0$, q. e. d.

Mit Hilfe von Satz 6 läßt sich mittels der Homologiemoduln $H_q(C^{2p}(X))$ eine notwendige Bedingung dafür angeben, daß es eine natürliche Zahl k mit $k \cdot x = (k+1) \cdot x$ für alle x aus X gibt.

Satz 7. *Gegeben sei ein Kettenkomplex $C^{2p}(X)$. Dann ist $H_q(C^{2p}(X)) = 0$ für alle natürlichen Zahlen q, falls eine natürliche Zahl k existiert mit $k + 1 \leqq 2p$, $k \cdot x = (k+1) \cdot x$ für alle x aus X.*

Beweis. Es ist $D^{2p}_q(X) = 0$ für alle natürlichen Zahlen q mit $1 \leqq q$, denn zunächst gilt $D^{2p}_q(X) = 0$ für $q + 1 < 2p$. Nun sei $2p \leqq q + 1$. Angenommen, es ist $D^{2p}_q(X) \neq 0$ und $k + 1 \leqq 2p \leqq q + 1$. Dann gibt es ein Produkt $x_0 \cdots x_q$ aus $D^{2p}_q(X)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = x_1 = \cdots = x_{2p-1}$. Hieraus folgt, daß $x_0 \cdots x_{2p-1}$ aus $D^{2p}_{2p-1}(X)$ ist. Dann gibt es eine Operatorenmenge S, für die gilt: Es gibt für eine natürliche Zahl i mit $0 \leqq i \leqq 2p - 1$ ein s aus S, so daß für alle t aus S die Beziehung

$$s\underline{(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{2p-1})} \subsetneqq t\underline{(x_0 + \cdots + x_{2p-1})}$$

gilt. Andererseits ist aber $x_0 + \cdots + x_{2p-1} = x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{2p-1}$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq 2p - 1$. Hieraus folgt $\underline{(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{2p-1})} \subseteqq \underline{(x_0 + \cdots + x_{2p-1})}$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq 2p - 1$.
Nun gibt es für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leqq i \leqq 2p - 1$ für jedes s aus S ein t aus S mit

$$s\underline{(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{2p-1})} \subseteqq t\underline{(x_0 + \cdots + x_{2p-1})}.$$

Das ist ein Widerspruch. Mithin ist $D^{2p}_q(X) = 0$ für alle natürlichen Zahlen q mit $1 \leqq q$, so daß nach Satz 6 und wegen $D_0(X) = A_0(X)$ sowie $H_1(C^{2p}(X)) = 0$ die Beziehung $H_q(C^{2p}(X)) = 0$ für alle natürlichen Zahlen q gilt, q. e. d.

Beispiel. Es wird von der Menge E der Paare $(K(u), K_0(u))$ aus dem Beispiel von Abschnitt 1 ausgegangen. Nach dem Beispiel aus Abschnitt 2 genügen diese Paare der A-Bedingung. Zur Definition einer Teilmenge X von $K(u)$ betrachte man das zugehörige Vieleck u mit den Eckpunkten $P_1(u)$, $P_2(u), \ldots, P_n(u)$ und den Seiten $P_1(u)\, P_2(u), P_2(u)\, P_3(u), \ldots, P_{n-1}(u)\, P_n(u), P_n(u)\, P_1(u)$. Die Menge X bestehe aus abzählbar unendlich vielen Elementen z_i aus $K(u)$, wobei die z_i paarweise verschieden seien. Dabei sei jedes z_i eine Teilmenge von u, die genau einen inneren Punkt einer Seite von u enthält. Darüber hinaus sollen die folgenden Bedingungen gelten:

$$z_{n-2}, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \ldots \subseteqq P_1(u)\, P_2(u),$$

$$z_{n-k} \subseteqq P_{k-1}(u)\, P_k(u)$$

für alle natürlichen Zahlen k mit $3 \leqq k \leqq u$.
Wegen $x + x = x$ für alle x aus X gilt nach Satz 7 für alle natürlichen Zahlen p und q mit $1 \leqq p$ und $0 \leqq q$ die Beziehung $H_q\big(C^{2p}(X)\big) = 0$. Nach Satz 4 folgt hieraus $H_q\big(C(X)\big) = H_q\big(C^0(X)\big)$. Schließlich gilt

$$H_0\big(C(X)\big) = 0, \quad H_1\big(C(X)\big) = 0, \quad H_2\big(C(X)\big) \approx Z^{\binom{n-2}{2}}, \quad H_q\big(C(X)\big) = 0$$

für alle natürlichen Zahlen q mit $3 \leqq q$. Mit Hilfe der natürlichen Zahl $\binom{n-2}{2}$ wird ein „Maß" für das Zutreffen der Eigenschaft der Konvexität auf die Teilmengen des Randes eines n-Ecks u gegeben. Mit zunehmender Eckenzahl n „verringert" sich das Zutreffen quadratisch.

LITERATUR

[1] FRANZ, W.: Topologie II, Berlin 1965.
[2] KUROŠ, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
[3] RADÓ, T., and P. V. REICHELDERFER: Continuous transformations in analysis, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

Manuskripteingang: 29. 5. 1978

VERFASSER:

REINHARD THRON, Institut für Landschaftsforschung und Naturschutz Halle der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR