Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 33–50

# Berechnung der Homologiegruppen singularitätenfreier algebraischer Hyperflächen und Konstruktion von Repräsentanten ihrer Erzeugenden

GÜNTHER SCHIEMANN

## I. Einleitung

Im komplexen projektiven Raum $P_{n+1}$ sei $V_n^r$ eine singularitätenfreie projektive algebraische Hyperfläche der Ordnung $r$. Die Homologiegruppen von $V$ sind bekannt. Sie ergeben sich in [4] und [3] bei der Anwendung moderner topologischer Methoden, in [4] sogar als Nebenprodukt.

Wir haben in [10] versucht, mit einfacheren Mitteln auszukommen, und konnten die Homologiegruppen von $V$ aus der Untersuchung gewisser Homologiesequenzen gewinnen. Das gelang durch die Wahl eines geeigneten topologischen Modells für $V$ und einer geeigneten $(2n-1)$-dimensionalen Untermenge $Q \subset V$. Über Repräsentanten von Erzeugenden der Homologiegruppen von $V$ war dabei aber fast nichts zu erfahren.

Wir wollen daher im folgenden die Gruppen $H_d(V)$ mit — wiederum vergleichsweise einfachen — homologietheoretischen Mitteln berechnen derart, daß dabei „möglichst anschaulich" Repräsentanten für ihre Erzeugenden konstruiert werden können. (Der Kürze wegen werden wir „$d$-Repräsentant auf $V$" sagen, wenn wir „Repräsentant eines erzeugenden Elementes von $H_d(V)$" meinen.)

Zu diesem Zweck definieren wir für jedes Indexpaar $n \geqq 0$, $r \geqq 1$ die ganze Zahl

$$b_n = b_n(V_n^r) := \begin{cases} r & \text{für} \quad n = 0, \\ (r-1)(r-2) & \text{für} \quad n = 1, \\ b_{n-2} + (r-2)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

und behaupten damit den

Satz.

$$H_d(V) \approx \begin{cases} \bigoplus_{b_n} \mathbf{Z} & \textit{für } d = n, \\ H_d(P_n) & \textit{sonst}. \end{cases} \tag{*}$$

Für $r = 1$ und $r = 2$ ist (*) richtig. Das entnimmt man [14] und [15], und man findet dort auch Repräsentanten für Erzeugende der Gruppen beschrieben. Wir beschränken uns daher auf $r \geqq 3$[1]) und werden den Beweis durch vollständige Induktion nach $n$ führen.

---

[1]) Diese Einschränkung wäre zu umgehen, aber sie erspart uns einige Fallunterscheidungen.

**Induktionsanfang:** (*) ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$.

**Induktionsvoraussetzung:** (*) sei richtig für ein $n_0 \geqq 1$. Wir betrachten $n_0$ als die Dimension eines singularitätenfreien ebenen Schnittes $W := V \cap P_n$ mit einer passend gewählten Hyperebene $P_n$, setzen $n_0 = n - 1$ und beweisen, dies aber erst in Abschnitt IV, (*) für $n$, die Dimension von $V$.

Für alles Folgende verabreden wir:

— $V$ sei definiert durch die Gleichung $0 = x_0^r + \cdots + x_{n+1}^r$;
für topologische Fragen ist das keine Einschränkung; vgl. [8].

— $P_n$ und $P'_n$ seien die Hyperebenen $x_{n+1} = 0$ bzw. $x_n = 0$.

— $P_{n-1} := P_n \cap P'_n$, $W := V \cap P_n$, $W' := V \cap P'_n$, $U := V \cap P_{n-1}$.

— $I := [0, 1]$, $\tau, \tau' \in I$, $\tau^r + \tau'^r = 1$.

— $L := \{0, \ldots, r-1\}$, $L' := L - \{0\}$, $L'' := L - \{0, 1\}$.

— $\sigma := e^{2i\pi/r}$, $\varrho := e^{i\pi/r}$.

Weiter denken wir uns alle algebraischen Varietäten, mit denen wir zu tun haben, zu endlichen, orientierten, nicht augmentierten simplizialen Komplexen trianguliert, auf denen Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten definiert sind. Es wird nicht vorkommen, daß wir ein und dieselbe Punktmenge auf verschiedene Weisen triangulieren müssen. Deshalb können wir für einen Komplex und für seine Punktmenge dasselbe Zeichen verwenden.
Mit der verkürzenden Aussage, eine Kette $K$ liege in einem Komplex $Q$, meinen wir immer, daß $K$ Element des zu $Q$ gehörenden Kettenkomplexes ist; vgl. [7].
Mit $F$ und $R$ bezeichnen wir zwei häufig benutzte stetige Abbildungen gewisser Komplexe in (auf) gewisse andere. Wir dürfen sie durch simpliziale Abbildungen (die nicht explizit vorkommen werden und daher keines Symbols bedürfen) approximiert denken, vgl. [1], und bezeichnen dann mit $F^\bullet$ und $R^\bullet$ die Homomorphismen der Kettenkomplexe.
Schließlich müssen wir häufig einer $d$-Kette $k$ von $W$ eine gewisse $(d+1)$-Kette „$k \times I$" von $W \times I$ zuordnen. Es genügt, diese zu definieren für eine „elementare $d$-Kette" von $W$; vgl. [7]. Es sei $s$ ein beliebiges orientiertes $d$-Simplex in $W$, $s^*$ seine Punktmenge, $\underline{s}$ seine Elementarkette im Kettenkomplex von $W$ und $s \times I$ diejenige orientierte $(d+1)$-Zelle in $W \times I$, deren Punktmenge $s^* \times I$ ist und zu deren Rand $-s$ gehört. Dann definieren wir $\underline{s} \times I$ als diejenige $(d+1)$-Kette des Kettenkomplexes von $W \times I$, für die $\underline{s} \times I = \sum \underline{s}'_i$ gilt mit Elementarketten $\underline{s}'_i$, deren zugeordnete orientierte $(d+1)$-Simplexe $s'_i$ gerade die Zelle $s \times I$ bilden. Da aus dem Zusammenhang stets klar wird, ob wir es mit Punktmengen, Simplexen oder Ketten zu tun haben, wollen wir auf die Unterscheidung der Symbole künftig auch hier verzichten.

## II. Konstruktion der Punktmenge $Q \subset V$

Es sei $Y$ ein allgemeiner Punkt von $W$, $Y = (y_0, \ldots, y_n, 0)$, $y_i \in \mathbb{C}$. Wir definieren $r$ stetige Abbildungen

$$F^l \colon W \times I \to V, \qquad l \in L,$$

durch

$$F^l(Y, \tau) := (y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n\tau, y_n\tau'\sigma^l).$$

Eine partielle Abbildung mit konstantem $\tau$ bezeichnen wir mit $F^l_\tau$. Der Definition von $F^l$ entnehmen wir:

— $F^l_1(W) = W$, $F^l_0(W) = W'$ für alle $l \in L$.

— $F^l(W \times I) \cap F^j(W \times I) = W \cup W'$ für $l \neq j$.

— $F^l(U \times I) = U$ für alle $l \in L$.

Wir bemerken weiter, daß für jedes feste $\tau$ die Abbildung

$$F^l_\tau : W \to F^l_\tau(W)$$

eine reguläre projektive Abbildung ist. Sie wird — davon werden wir in III.3.2. Gebrauch machen — induziert durch eine projektive Transformation des $P_{n+1}$ mit der Matrix

$$\mathfrak{F}^l_\tau := \left(\begin{array}{c:cc} \mathfrak{E} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ \hdashline & \tau & -\tau'^{r-1}\sigma^{-l} \\ \mathbf{0} & \tau'\sigma^l & \tau^{r-1} \end{array}\right).$$

Nunmehr definieren wir $Q := \bigcup_{l \in L} F^l(W \times I)$ oder, indem wir $F^l(W \times I) =: Q^l$ abkürzen,

$$Q := \bigcup_{l \in L} Q^l.$$

Vermöge der „Prismenkonstruktion“, vgl. [7], dürfen wir auch die nicht-algebraischen Gebilde $W \times I$, alle $Q^l$ und $Q$ als simpliziale Komplexe (endlich, orientiert, nicht augmentiert) voraussetzen. Aus [10] entnehmen wir noch die für das Folgende benötigten Eigenschaften von $Q$:

— Die Punktmenge $V - Q$ zerfällt in $r$ paarweise disjunkte offene Teilmengen, jede einfach zusammenhängend.

— $H_d(V, Q) \approx \begin{cases} \bigoplus_r \mathbb{Z} & \text{für } d = 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

— $H_{2n}(V) \approx \mathbb{Z}$, $H_{2n-1}(V) \approx 0$ und

$$H_d(V) \approx H_d(Q) \quad \text{für} \quad d \neq 2n, \quad 2n - 1. \tag{1}$$

Wegen (1) wird es genügen, statt der Gruppen $H_d(V)$ die $H_d(Q)$ zu berechnen und $d$-Repräsentanten auf $Q$ zu konstruieren.

## III. Einige Folgerungen aus der Induktionsvoraussetzung

### III.1. Repräsentantensysteme für $H_d(W)$ und $H_d(W, U)$

III.1.1. Wir beschreiben zunächst $d$-Repräsentanten von $W$.
Für alle geraden $d \in \{0, \ldots, n-2, n, \ldots, 2n-2\}$ ist $H_d(W) \approx \mathbb{Z}$, wir brauchen also jeweils nur einen $d$-Repräsentanten. Als solchen wählen wir — vgl. [9] — einen $P_{d/2}$, wenn $d < n - 1$, oder einen ebenen Schnitt $S_{d/2} := W \cap P_{1+d/2}$ mit $P_{1+d/2} \subset P_n$, wenn $d > n - 1$ ist.
Über $(n-1)$-Repräsentanten von $W$ wissen wir fast nichts. Ist $n - 1$ gerade, so läßt sich wenigstens aussagen: Ein beliebiger ebener Schnitt $S_{(n-1)/2} := W \cap P_{(n+1)/2}$ mit $P_{(n+1)/2} \subset P_n$ ist $(n-1)$-Repräsentant von $W$; vgl. [10].

III.1.2. Analoge Aussagen können wir über Repräsentanten von $U$ machen. Insbesondere sehen wir, daß es für jedes gerade $d \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ eine erzeugende Klasse von $H_d(W)$ und eine erzeugende Klasse von $H_d(U)$ gibt, die — nach der Inklusion $i\colon U \to W$ — durch ein und denselben $P_{d/2}$ (falls $d \leqq n-2$ ist) bzw. ebenen Schnitt $S_{d/2}$ (falls $d \geqq n-1$ ist) repräsentiert werden können.

III.1.3. Wir finden nun wie in [10]:

$$H_d(W, U) \approx \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } d = 2n-2, \\ \bigoplus_{b_{n-1}+b_{n-2}-1} \mathbf{Z} & \text{für } d = n-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

III.1.4. Wir beschreiben nun Repräsentanten für ein Erzeugendensystem von $H_{n-1}(W, U)$. Dabei ist zu unterscheiden, ob $n-1 = \dim(W)$ gerade oder ungerade ist.

Zunächst sei $n-1$ gerade.

Einer der $b_{n-1}$ $(n-1)$-Repräsentanten von $W$ kann als ebener Schnitt $S_{(n-1)/2}$ gedacht werden; vgl. III.1.1. Wir dürfen annehmen, daß er in $U$ liegt und $H_{n-1}(U)$ erzeugt. Kein anderer Zyklus aus einem $(n-1)$-Repräsentantensystem von $W$, das $S$ enthält, liegt dann in $U$. Wäre $S'$ ein solcher, so bestünde eine Relation $S' \underset{U}{\sim} mS$ mit einer ganzen Zahl $m$, denn $H_{n-1}(U)$ ist zyklisch.

Für $H_{n-1}(W, U)$ kann $S$ natürlich nicht als Repräsentant dienen, wohl aber, wie wir gleich sehen werden, sind die restlichen $b_{n-1} - 1$ $(n-1)$-Repräsentanten $a_i$, die mit $S$ ein vollständiges Erzeugendensystem von $H_{n-1}(W)$ repräsentieren, auch Repräsentanten für ein Teilsystem von Erzeugenden von $H_{n-1}(W, U)$. Die — nach (2) — noch fehlenden $b_{n-2}$ Erzeugenden von $H_{n-1}(W, U)$ repräsentieren wir, indem wir für jeden Zyklus $z_j$ eines $(n-2)$-Repräsentantensystems von $U$ eine $(n-1)$-Kette $c_j \subset W$ angeben mit $\partial c_j = z_j$. Das ist stets möglich, denn es ist $H_{n-2}(W) \approx 0$. Jedes solche $c_j$ ist also ein relativer $(n-1)$-Zyklus auf $W$ mod $U$. (Statt $W$ mod $U$ schreiben wir künftig nur $W, U$.)

Die $a_1, \ldots, a_{b_{n-1}-1}, c_1, \ldots, c_{b_{n-2}}$ repräsentieren nun in der Tat eine Basis für $H_{n-1}(W, U)$. Wir müssen nur zeigen, daß jeder relative $(n-1)$-Zyklus von $W, U$ einer Linearkombination der $a_i$ und $c_j$ relativ homolog ist. Abhängigkeiten zwischen den $a_i$ und $c_j$ sind dann nicht möglich, sonst wäre der Rang von $H_{n-1}(W, U)$ kleiner als $b_{n-1} + b_{n-2} - 1$.

Es sei $k$ ein relativer $(n-1)$-Zyklus von $W, U$. Dann ist $\partial k \subset U$, es gilt $\partial k \underset{U}{\sim} \sum \gamma_j z_j$, und es gibt eine $(n-1)$-Kette $u \subset U$ mit $\partial u = \sum \gamma_j z_j - \partial k$. Weiter ist dann $k + u - \sum \gamma_j c_j$ ein $(n-1)$-Zyklus in $W$, also $k + u - \sum \gamma_j c_j \underset{W}{\sim} \alpha S + \sum \alpha_i a_i$ oder

$$k \underset{W,U}{\sim} \sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_j c_j.$$

Nunmehr sei $n-1$ ungerade.

In diesem Fall bilden, wie wir sehen werden, alle $b_{n-1}$ Zyklen $a_i$ eines $(n-1)$-Repräsentantensystems von $W$ ein Repräsentantenteilsystem von $W, U$. Die restlichen $b_{n-2} - 1$ relativen $(n-1)$-Zyklen für ein vollständiges Repräsentantensystem von $W, U$ erhalten wir folgendermaßen:

Ein $(n-2)$-Repräsentant von $U$ kann als ein $P_{(n-2)/2}$ gedacht werden. Sind $z_1, \ldots, z_{b_{n-2}-1}$ $(n-2)$-Zyklen, die mit $P$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $U$ bilden, so gibt es zu jedem dieser $z_j$ eine $(n-1)$-Kette $c_j \subset W$ mit $\partial c_j = z_j - m_j P$; darin ist $m_j$ eine ganze Zahl, denn $P$ erzeugt $H_{n-2}(W)$. Jedes solche $c_j$ ist also ein relativer $(n-1)$-Zyklus in $W, U$.

Auch in diesem Fall repräsentieren die Relativzyklen $a_1, \ldots, a_{b_{n-1}}, c_1, \ldots, c_{b_{n-2}-1}$ eine Basis für $H_{n-1}(W, U)$. Es sei nämlich $k$ ein beliebiger relativer $(n-1)$-Zyklus von $W, U$, also $\partial k \subset U$. Dann gilt $\partial k \underset{U}{\sim} \sum \gamma_j z_j - \gamma P$ mit $\gamma = \sum \gamma_j m_j$, und es gibt eine $(n-1)$-Kette $u \subset U$ mit $\partial u = \sum \gamma_j z_j - \gamma P - \partial k$. Weiter ist dann $k + u - \sum \gamma_j c_j$ ein $(n-1)$-Zyklus in $W$, also $k + u - \sum \gamma_j c_j \underset{W}{\sim} \sum \alpha_i a_i$ oder $k \underset{W,U}{\sim} \sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_j c_j$. Damit ist jeder relative $(n-1)$-Zyklus von $W, U$ relativ homolog zu einer Linearkombination der $a_i$ und $c_j$. Abhängigkeiten zwischen diesen sind wiederum ausgeschlossen, sonst wäre der Rang von $H_{n-1}(W, U)$ kleiner als $b_{n-1} + b_{n-2} - 1$.

III.1.5. Wir kürzen im folgenden derartige Linearkombinationen der $(n-1)$-Repräsentanten von $W, U$ ab in der Form $\beta\mathfrak{b}$
mit

$$\beta := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{b_{n-1}-b'}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{b_{n-2}-b''})$$

und

$$\mathfrak{b} := (a_1, \ldots, a_{b_{n-1}-b'}, c_1, \ldots, c_{b_{n-2}-b''}).$$

Hierin ist $b' := \begin{Bmatrix} 1, \text{ wenn } n-1 \text{ gerade,} \\ 0, \text{ wenn } n-1 \text{ ungerade,} \end{Bmatrix}$ und $b'' := 1 - b'$.

Zur Unterscheidung verschiedener Linearkombinationen wollen wir obere Indizes bei $\beta$ verwenden:

$$\beta^l := (\alpha_1^l, \ldots, \gamma_1^l, \ldots).$$

Es bedeute weiter

$$\mathfrak{b}^l := F_0^l(\mathfrak{b}) \subset W', \quad l \in L, \tag{3}$$

mit

$$F_0^l(\mathfrak{b}) := \big(F_0^l(a_1), \ldots, F_0^l(c_1), \ldots\big).$$

Es ist klar, daß jedes System $\mathfrak{b}^l$ als $(n-1)$-Repräsentantensystem von $W', U$ dienen kann.
Für die Teilsysteme der $a_i$ und der $c_j$ schreiben wir zusammenfassend $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$.

## III.2. Konstruktion zweier spezieller Zyklen in $W$

Wir brauchen für eine spätere Behauptung zwei $(n-1)$-Zyklen in $W$, etwa $z$ und $z^*$, mit folgenden Eigenschaften:

$$(z, z^*) = 1, \quad \text{was } \big(F_0^0(z), F_0^0(z^*)\big) = 1 \quad \text{impliziert,} \tag{4}$$

und

$$\big(F_0^1(z), F_0^0(z^*)\big) = 0.^{1)} \tag{5}$$

Bei der Suche nach einem solchen Paar $z, z^*$ muß unterschieden werden, ob $n-1$ gerade oder ungerade ist.
Es sei $n-1$ gerade.
Wir wählen als $z$ und als $z^*$ je einen $P_{(n-1)/2}$ und beschreiben jeden durch einen allgemeinen Punkt:

$$z \ni (t_0, \varrho t_0, \ldots, t_{(n-3)/2}, \varrho t_{(n-3)/2}, t_{(n-1)/2}, \varrho t_{(n-1)/2}, 0)$$

und

$$z^* \ni (t_0, \bar\varrho t_0, \ldots, t_{(n-3)/2}, \bar\varrho t_{(n-3)/2}, t_{(n-1)/2}, \varrho t_{(n-1)/2}, 0)$$

[1]) Mit $(z, z^*)$ usw. sind die Schnittzahlen gemeint.

mit $t_i \in \mathbb{C}$. Wir sehen, daß $z$ und $z^*$ nur den Punkt $(0, \ldots, 0, 1, \varrho, 0)$ gemeinsam haben. Sie erfüllen (4), (5).
Nun sei $n - 1$ ungerade.
$W$ enthält die singularitätenfreie ebene Kurve $C_1^r$, die durch den $P_3$ mit der Gleichung $0 = x_0 = \cdots = x_{n-3}$ ausgeschnitten wird. Ein allgemeiner Punkt von $C$ sei $Y = (0, \ldots, 0, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, 0)$. Auf $C$ seien $a$ und $a^*$ zwei 1-Repräsentanten mit $(a, a^*) = 1$. Wir dürfen annehmen, daß weder $a$ noch $a^*$ einen Punkt von $U$ trifft. Dann können wir $y_n = 1$ setzen. Wir beschreiben nun $a$ und $a^*$ durch je einen „allgemeinen Punkt"[1]:

$$(0, \ldots, 0, p, q, 1, 0) \in a \quad \text{und} \quad (0, \ldots, 0, p^*, q^*, 1, 0) \in a^*$$

mit komplexwertigen Funktionen $p = p(\lambda)$ usw. der reellen Variablen $\lambda \in I$ und $p(0) = p(1)$, $q(0) = q(1)$ usw.
Nunmehr definieren wir auch hier $z$ und $z^*$ durch Angabe je eines „allgemeinen Punktes":

$$z \ni (t_0, \varrho t_0, \ldots, t_{(n-4)/2}, \varrho t_{(n-4)/2}, p t_{(n-2)/2}, q t_{(n-2)/2}, t_{(n-2)/2}, 0)$$

bzw.

$$z^* \ni (t_0, \bar{\varrho} t_0, \ldots, t_{(n-4)/2}, \bar{\varrho} t_{(n-4)/2}, p^* t_{(n-2)/2}, q^* t_{(n-2)/2}, t_{(n-2)/2}, 0).$$

In diesem Fall sind also $z$ und $z^*$ je ein $P_{(n-2)/2}$-Büschel über $a$ bzw. $a^*$, deren Träger, je ein $P_{(n-4)/2}$, zueinander und zur Ebene von $C$ windschief sind. Wegen $(a, a^*) = 1$ ist auch $(z, z^*) = 1$, und (4), (5) sind wiederum erfüllt.
Aus (4) und (5) und dem Homologieprinzip folgt zunächst, daß $F_0^0(z) =: z^0$ und $F_0^1(z) =: z^1$ in verschiedenen Homologieklassen von $W'$ liegen.
Sie liegen aber auch in verschiedenen relativen Homologieklassen von $W', U$. Denn aus der Annahme $z^1 \underset{W',U}{\sim} z^0$ würde $z^1 - z^0 \underset{W'}{\sim} u$ folgen, worin $u$ eine von Null verschiedene Homologieklasse von $U$ repräsentiert. Das ist aber nicht möglich: Für ungerades $n - 1$ ist $H_{n-1}(U) \approx 0$, und für gerades $n - 1$ wird $H_{n-1}(U)$ von einem ebenen Schnitt $S$ der Ordnung $r$ erzeugt, $r \geqq 3$, und für keine ganze Zahl $m \neq 0$ ist $u \sim mS$, weil $u$ homolog ist zur Differenz zweier linearer Räume $z$ und $z^*$.

### III.3. $(n - 1)$-Repräsentantensysteme von $W', U$

Wir wollen sehen, wie sich die $(n - 1)$-Repräsentantensysteme (3) von $W', U$ ineinander transformieren lassen.
Zunächst setzen wir

$$\mathfrak{b}^1 \underset{W',U}{\sim} \mathfrak{T}\mathfrak{b}^0 \tag{6}$$

mit einer unbekannten, aber durch (6) eindeutig bestimmten unimodularen Matrix $\mathfrak{T}$, über die wir einiges sagen wollen.

III.3.1. Jeder $(n - 1)$-Repräsentant $a_i^1 \in \mathfrak{a}^1$ von $W', U$ — vgl. III.1.5. — ist relativ homolog zu einer Linearkombination $\beta\mathfrak{b}^0$, in der alle $c_j^0$ den Koeffizienten Null haben. Denn aus $a_i^1 \underset{W',U}{\sim} \sum \alpha_i a_i^0 + \sum \gamma_j c_j^0$ folgt: Es gibt eine $n$-Kette $K \subset W'$ und eine $(n - 1)$-Kette $k \subset U$ mit $\partial K = -a_i^1 + \sum \alpha_i a_i^0 + \sum \gamma_j c_j^0 + k$. Das hat $\partial\partial K = \sum \gamma_j \partial c_j^0 + \partial k = 0$ zur Folge, also $\sum \gamma_j \partial c_j^0 \underset{U}{\sim} 0$, und das ist nach der Konstruktion der $c_j$ nur möglich, wenn alle $\gamma_j$ verschwinden.

---

[1]) Wir wenden gelegentlich den Begriff „allgemeiner Punkt" auch auf nicht-algebraische Gebilde an; das ist zwar unüblich, hier aber nicht zu mißdeuten.

Für jede Differenz $c_j^1 - c_j^0$ gilt dasselbe wie für $a_i^1$. Daraus ergibt sich für $\mathfrak{T}$ die Struktur

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M} & 0 \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}.$$

Hierin ist $\mathfrak{M}$ eine unimodulare Matrix (weil $\mathfrak{T}$ sonst nicht unimodular wäre) mit $b_{n-1} - b'$ Reihen.

III.3.2. Wir erinnern uns der Matrix $\mathfrak{F}_\tau^l$ aus II. und stellen fest:
Für $\tau = 0$ und jedes $l \in L$ gilt

$$\mathfrak{F}_0^{l+1}(\mathfrak{F}_0^l)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{E} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \sigma^{-1} & 0 \\ & 0 & \sigma \end{array}\right) =: \mathfrak{P}.$$

(Ist $l = r - 1$, so setzen wir $l + 1 = 0$.)
Die Matrix $\mathfrak{P}$ besorgt eine projektive Transformation des $P_{n+1}$, bei der $W'$ fest bleibt: Für jeden Punkt $F_0^l(Y) \in W'$ gilt nämlich

$$F_0^l(Y) \cdot \mathfrak{P} = F_0^{l+1}(Y) \in W'.$$

Insbesondere werden bei der durch $\mathfrak{P}$ induzierten Abbildung $W' \to W'$ die Repräsentantensysteme (3) zyklisch vertauscht: $\mathfrak{b}^0 \to \mathfrak{b}^1 \to \cdots \to \mathfrak{b}^{r-1} \to \mathfrak{b}^0$.
Da $\mathfrak{T}$ nur von $\mathfrak{P}$ abhängt, gilt mit (6) auch

$$\mathfrak{b}^{l+1} \underset{W',U}{\sim} \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{b}^l. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\mathfrak{b}^l \underset{W',U}{\sim} \mathfrak{T}^l \cdot \mathfrak{b}^0 \tag{8}$$

mit

$$\mathfrak{T}^l = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{M}^l & 0 \\ \hline \mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1}) & \mathfrak{E} \end{array}\right). \tag{9}$$

Wir bemerken, daß $l$ in den Symbolen $\mathfrak{T}^l$ und $\mathfrak{M}^l$ ein Exponent und nicht bloß ein Unterscheidungsindex wie etwa in $F^l$ u. a. ist. Aus (8) folgt insbesondere $\mathfrak{T}^r = \mathfrak{E}$, und das zieht $\mathfrak{M}^r = \mathfrak{E}$ nach sich.

III.3.3. Wir fassen den in III.2. beschriebenen $(n - 1)$-Zyklus $z \subset W$ auf als relativen Zyklus in $W$, $U$ und setzen $z \underset{W,U}{\sim} \alpha\mathfrak{a}$. Dann ist $z^0 \underset{W',U}{\sim} \alpha\mathfrak{a}^0$ und $z^1 \underset{W',U}{\sim} \alpha\mathfrak{a}^1 \underset{W',U}{\sim} \alpha\mathfrak{M}\mathfrak{a}^0$. Da $z^0$ und $z^1$ in verschiedenen relativen Homologieklassen von $W'$, $U$ liegen, ist $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{E}$.

## IV. Der Induktionsschritt

### IV.1. Definition des Moduls $\mathfrak{z}_d$

IV.1.1. Wir beschränken uns bis IV.3. auf die (topologischen) Dimensionen $d \in \{n, \ldots, 2n - 2\}$.
Jeder $d$-Zyklus $Z_d \subset Q$ läßt sich auf mannigfache Weise wie folgt als Summe von $d$-Ketten $K_d^l \subset Q^l$ schreiben: $Z_d = \sum_{l \in L} K_d^l$. Daß eine solche Darstellung nicht ein-

deutig ist (die $d$-Simplexe aus $W \cup W'$ liegen in jedem $Q^l$), wird uns nicht stören. Für jedes $l \in L$ ist

$$\partial K_d^l \subset W \cup W', \tag{10}$$

sonst wäre $\sum K_d^l$ kein Zyklus.

IV.1.2. Wir betrachten Systeme von $d$-Ketten

$$\mathfrak{k}_d := (K_d^0, \ldots, K_d^{r-1}) \quad \text{mit} \quad K_d^l \subset Q^l \quad \text{und} \quad \partial K_d^l \subset W \cup W'. \tag{11}$$

Ein solches $d$-Kettensystem heiße „$d$-Zyklussystem" genau dann, wenn

$$\sum_{l \in L} \partial K_d^l \underset{W \cup W'}{\sim} 0. \tag{12}$$

Die Bezeichnung liegt nahe. Ist nämlich $\mathfrak{k}_d$ ein $d$-Zyklussystem, so gibt es eine $d$-Kette $J_d \subset W \cup W'$ derart, daß $-\partial J_d = \sum \partial K_d^l$, also $J_d + \sum K_d^l =: Z_d$ ein Zyklus ist. Wenn wir die Eigenschaft „Zyklussystem" hervorheben wollen, schreiben wir künftig $\mathfrak{z}_d$ statt $\mathfrak{k}_d$.

IV.1.3. Für jedes feste $l \in L$ können wir die $d$-Ketten $K_d^l$ in Äquivalenzklassen $\{K_d^l\}$ einteilen: Zwei $d$-Ketten $K_d^l$ und $\tilde{K}_d^l$ seien äquivalent genau dann, wenn

$$\partial K^l \underset{W \cup W'}{\sim} \partial \tilde{K}^l \tag{13}$$

ist. Dies induziert in der Menge der $d$-Kettensysteme (11) eine Einteilung in Äquivalenzklassen

$$(\{K_d^0\}, \ldots, \{K_d^{r-1}\}) =: \{\mathfrak{k}_d\}.$$

Die Menge der Klassen $\{\mathfrak{k}_d\}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_d$, mit $\mathfrak{Z}_d$ die Teilmenge der Klassen $\{\mathfrak{z}_d\}$ von Zyklussystemen.

IV.1.4. Wir machen $\mathfrak{K}_d$ und damit $\mathfrak{Z}_d$ zu einem $\mathbf{Z}$-Modul, indem wir für die $\{\mathfrak{k}_d\}$ eine Addition definieren, und zwar komponentenweise, also für die $\{K_d^l\}$. Die Addition der $\{K_d^l\}$ werde durch die Addition in $H_{d-1}(W \cup W')$ induziert, denn jedem $\{K_d^l\}$ ist eindeutig und additionstreu die Homologieklasse von $\partial K_d^l \subset W \cup W'$ zugeordnet. Damit sind $\mathfrak{K}_d$ und $\mathfrak{Z}_d$ isomorph zu Untermoduln von $\bigoplus_r H_{d-1}(W \cup W')$.

## IV.2. Beziehungen zwischen den $H_d(Q)$ und den $\mathfrak{z}_d$

IV.2.1. Es seien $\mathfrak{z}_d$ und $\tilde{\mathfrak{z}}_d$ zwei äquivalente $d$-Zyklussysteme und $Z_d = J_d + \sum K_k^l$ bzw. $\tilde{Z}_d = \tilde{J}_d + \sum \tilde{K}_d^l$ zwei korrespondierende $d$-Zyklen in $Q$, vgl. IV.1.2. Man wird fragen, ob $Z \underset{Q}{\sim} \tilde{Z}$ ist.

Wir dürfen (13) voraussetzen. Dann gibt es für jedes $l \in L$ eine $d$-Kette $J_d^l \subset W \cup W'$ derart, daß $\tilde{K}_d^l - K_d^l + J_d^l =: Z_d^l$ ein $d$-Zyklus in $Q^l$ ist. Wegen

$$H_d(Q^l) \approx H_d(W) \approx \begin{cases} 0 & \text{für alle ungeraden zugelassenen } d, \\ \mathbf{Z} & \text{für alle geraden zugelassenen } d \end{cases}$$

ist

$$Z_d^l \underset{Q^l}{\sim} \begin{cases} 0 & \text{für alle ungeraden zugelassenen } d, \\ m_l \cdot S_{d/2} & \text{für alle geraden zugelassenen } d \end{cases} \tag{14}$$

mit einem ebenen Schnitt $S \subset W$, der $H_d(W)$ erzeugt, vgl. III.1., und einer ganzen Zahl $m_l$.

Wir bilden die Differenz

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_d - Z_d &= \sum \tilde{K}_d^l - \sum K_d^l + \tilde{J}_d - J_d \\ &= \sum Z_d^l - \sum J_d^l + \tilde{J}_d - J_d. \qquad (15)\end{aligned}$$

Es ist $-\sum J_d^l + \tilde{J}_d - J_d \subset W \cup W' \subset Q^0$ ein $d$-Zyklus, weil die anderen Summanden von (15) $d$-Zyklen sind.

Nun müssen wir unterscheiden:

Ist $d$ ungerade, so ist wegen (14) $Z_d^l \underset{Q^l}{\sim} 0$ für alle $l \in L$ und $-\sum J_d^l + \tilde{J}_d - J_d \underset{Q^0}{\sim} 0$, also $\tilde{Z}_d \underset{Q}{\sim} Z_d$.

Ist $d$ gerade, so ist wegen (14) $Z_d^l \underset{Q^l}{\sim} m_l S_{d/2}$ für alle $l \in L$ und $-\sum J_d^l + \tilde{J}_d - J_d \underset{Q^0}{\sim} m S_{d/2}$, also $\tilde{Z}_d \underset{Q}{\sim} Z_d + (m + \sum m_l)\, S_{d/2}$. Damit liegen $Z$ und $\tilde{Z}$ in ein und derselben Restklasse von $H_d(Q)$ nach der von $S$ erzeugten Untergruppe.

IV.2.2. Nunmehr seien $Z = J + \sum K^l$ und $\tilde{Z} = \tilde{J} + \sum \tilde{K}^l$ zwei $d$-Zyklen aus $Q$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{Z} \underset{Q}{\sim} Z \text{ für ungerades } d \quad \text{bzw.} \quad \tilde{Z} \underset{Q}{\sim} Z + mS \text{ für gerades } d. \qquad (16)$$

Wegen (16) gibt es eine $(d+1)$-Kette $E \subset Q$ mit

$$\partial E = \tilde{Z} - Z \quad \text{bzw.} \quad \partial E = \tilde{Z} - Z - mS.$$

Wir denken $E$ zerlegt: $E = \sum E^l$, $E^l \subset Q^l$, so daß $\partial E^l = \tilde{K}^l - K^l + J^l$ gilt mit einer geeigneten $d$-Kette $J^l \subset W \cup W'$ für jedes $l \in L$. Nochmalige Randbildung liefert

$$0 = \partial \tilde{K}^l - \partial K^l + \partial J^l, \quad \text{also } \partial \tilde{K}^l - \partial K^l \underset{W \cup W'}{\sim} 0$$

für alle $l \in L$. Damit sind $\mathfrak{z}$ und $\tilde{\mathfrak{z}}$ äquivalent.

IV.2.3. Die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte besagen: Wir können jedem $d$-Zyklussystem $\mathfrak{z}_d$ (auf mannigfache Weise) einen $d$-Zyklus $Z_d$ in $Q$ zuordnen. Zwei äquivalenten Zyklussystemen entsprechen dabei zwei Zyklen, die

— bei ungeradem $d$ einander in $Q$ homolog sind; damit sind die Äquivalenzklassen $\{\mathfrak{z}_d\}$ und die $d$-Homologieklassen von $Q$ bijektiv aufeinander bezogen und wegen IV.1.4. auch additionstreu, also gilt

$$H_d(Q) \approx \mathfrak{Z}_d. \qquad (17)$$

— bei geradem $d$ in einer und derselben Restklasse von $H_d(Q)$ nach der von $S_{d/2} \subset W$ erzeugten (freien zyklischen) Untergruppe liegen, also

$$H_d(Q) \approx \mathfrak{Z}_d \oplus \mathbb{Z}. \qquad (18)$$

## IV.3. Die Berechnung der $\mathfrak{Z}_d$

IV.3.1. Jedem $\{K_d^l\}$ ist eindeutig die Homologieklasse von $\partial K_d^l \subset W \cup W'$ zugeordnet, vgl. IV.1.4. Aber nicht jede $d$-Homologieklasse von $W \cup W'$ — z. B. nicht die durch $U$ repräsentierbare — enthält den Rand einer Kette $K_d^l$. Wir brauchen also ein Kriterium dafür, wann zu einer $d$-Homologieklasse von $W \cup W'$ eine Äquivalenzklasse $\{K_d^l\}$ gehört. Dabei benutzen wir, daß $W$ Deformationsretrakt von $Q^l$ ist. Die (stetige) retrahierende Abbildung

$$R^l\colon Q^l \to W$$

sei definiert durch

$$R^l(F^l_\tau(Y)) = Y \in W.$$

Die zu $R^l$ gehörende Abbildung des Kettenkomplexes von $Q^l$ sei $R^{\bullet l}$.
Es sei nun $K^l$ eine beliebige $d$-Kette in $Q^l$. Wegen der Randtreue simplizialer Abbildungen — vgl. [1] — gilt $R^{\bullet l}(\partial K^l) = \partial(R^{\bullet l} K^l)$, also

$$R^{\bullet l}(\partial K^l) \underset{W}{\sim} 0. \tag{19}$$

Setzen wir aus Gründen der Zweckmäßigkeit $\partial K^l =: k'^l - k^l$ mit $(d-1)$-Ketten $k'^l \subset W'$ und $k^l \subset W$ und $\partial k'^l = \partial k^l \subset U$, so können wir statt (19)

$$R^{\bullet l}(k'^l) - k^l \underset{W}{\sim} 0 \tag{20}$$

schreiben.
Es seien nun umgekehrt $k^l \subset W$ und $k'^l \subset W'$ zwei $(d-1)$-Ketten mit den Eigenschaften $\partial k^l = \partial k'^l \subset U$ und (20). Dann gibt es zunächst eine $d$-Kette $E^l \subset W$ mit $\partial E^l = R^{\bullet l}(k'^l) - k^l$ und weiter eine $d$-Kette $K^l \subset Q^l$, $K^l := F^{\bullet l}(R^{\bullet l}(k'^l) \times I) + E^l$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\partial K^l &= F_0^{\bullet l}(R^{\bullet l}(k'^l)) - F_1^{\bullet l}(R^{\bullet l}(k'^l)) + R^{\bullet l}(k'^l) - k^l,\\
&= \qquad k'^l \qquad - \qquad R^{\bullet l}(k'^l) \;\; + R^{\bullet l}(k'^l) - k^l,\\
&= \qquad k'^l \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - k^l.
\end{aligned}$$

Durch (20) sind also genau die $(d-1)$-Homologieklassen von $W \cup W'$ charakterisiert, zu denen Äquivalenzklassen $\{K^l_d\}$ gehören. Wir bemerken noch, daß aus (20)

$$R^{\bullet l}(k'^l) \underset{W,U}{\sim} k^l \tag{21}$$

folgt. Damit ist die relative Homologieklasse von $k'^l$ in $W'$, $U$ schon durch die von $k^l$ in $W$, $U$ bestimmt. Repräsentieren nämlich $k_1'^l$ und $k_2'^l$ zwei verschiedene relative Homologieklassen in $W'$, $U$, so auch $R^{\bullet l}(k_1'^l)$ und $R^{\bullet l}(k_2'^l)$ in $W$, $U$; denn $R^l$ ist ein Homöomorphismus von $W'$ auf $W$ und die Identität auf $U$.

IV.3.2. Aus der Relation (12), durch die $\mathfrak{Z}_d$ charakterisiert ist, folgt

$$\sum k^l \underset{W,U}{\sim} 0 \quad \text{und} \quad \sum k'^l \underset{W',U}{\sim} 0, \tag{22}$$

wobei $k^l$ und $k'^l$ durch (20) verknüpft sind. Wir werden statt (12) für die Berechnung von $\mathfrak{Z}_d$ bequemer (20) und (22) benutzen. Dies ist nur scheinbar schwächer. Zwar folgt aus (22) statt (12) nur

$$\sum k'^l - \sum k^l \underset{W \cup W'}{\sim} z, \tag{23}$$

worin $z$ irgendeine $(d-1)$-Homologieklasse von $U$ repräsentiert. Diese ist für ungerades $d-1$ trivial. Für gerades $d-1$ ist $z \underset{U}{\sim} mS_{(d-1)/2}$, vgl. III.1.1., und da $S$ als algebraischer Zyklus nicht berandet, $z$ aber wegen (23) ein Rand ist, folgt $m = 0$. Damit ist (12) erfüllt.

IV.3.3. Wir berechnen $\mathfrak{Z}_d$ zuerst für die Fälle mit $d \in \{n+1, \ldots, 2n-2\}$. Für diese ist $H_{d-1}(W, U) \approx H_{d-1}(W', U) \approx 0$, vgl. (2). Daher gelten für den Rand jeder $d$-Kette $k^l$ die Relationen

$$k^l \underset{W,U}{\sim} 0 \quad \text{und} \quad k'^l \underset{W',U}{\sim} 0,$$

und (12) ist trivialerweise für jedes $\mathfrak{k}_d$ erfüllt. Jedes $\mathfrak{k}_d$ ist also ein $\mathfrak{z}_d$, und wir erhalten nur eine einzige Äquivalenzklasse von $d$-Kettensystemen:

$$\mathfrak{K}_d \approx \mathfrak{Z}_d \approx 0. \tag{24}$$

IV.3.4. Nun berechnen wir $\mathfrak{Z}_n$. Es sei $K_n^l$ eine beliebige $n$-Kette in $Q^l$ und $\partial K_n^l = k'^l - k^l$ ihr Rand in $W \cup W'$. Für die Randkette $k^l$ gilt, vgl. III.1.5., eine Relation

$$k^l \underset{W,U}{\simeq} \beta^l \mathfrak{b} \tag{25}$$

mit einem Koeffizientensystem $\beta^l$, das durch $k^l$ eindeutig bestimmt ist. Dies induziert

$$k'^l \underset{W',U}{\simeq} \beta^l \mathfrak{b}^l, \tag{26}$$

denn aus den Definitionen von $\mathfrak{b}^l$ und $R^l$ folgt $R^{\bullet l}(\mathfrak{b}^l) = \mathfrak{b}$ für jedes $l \in L$, und mit einem von $\beta^l$ verschiedenen Koeffizientensystem $\beta'^l$ in (26) wäre (20) nicht erfüllt. Mit (25) und (26) geht (22) über in

$$0 \underset{W,U}{\simeq} (\Sigma\, \beta^l)\, \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad 0 \underset{W',U}{\simeq} \Sigma\, \beta^l \mathfrak{b}^l$$

und weiter mit (8)

$$0 \underset{W,U}{\simeq} (\Sigma\, \beta^l)\, \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad 0 \underset{W',U}{\simeq} (\Sigma\, \beta^l \mathfrak{T}^l)\, \mathfrak{b}^0. \tag{27}$$

Aus (27) erhalten wir zur Bestimmung der unbekannten Koeffizientensysteme $\beta^0, \ldots, \beta^{r-1}$ das Gleichungssystem

$$\overbrace{(0, \ldots, 0)}^{b_{n-1}+b_{n-2}-1} = \sum_{l \in L} \beta^l, \tag{28.1}$$

$$(0, \ldots, 0) = \sum_{l \in L} \beta^l \mathfrak{T}^l. \tag{28.2}$$

Durch Subtraktion folgt daraus

$$(0, \ldots, 0) = \sum_{l \in L} \beta^l (\mathfrak{T}^l - \mathfrak{E}). \tag{29}$$

Wir benutzen (9), erinnern an die Definition von $b'$ und $b''$ in III.1.5. und erhalten aus (29)

$$\overbrace{(0, \ldots, 0)}^{b_{n-1}-b'} = \sum_{l \in L'} \big(\alpha^l(\mathfrak{M}^l - \mathfrak{E}) + \gamma^l \mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1})\big). \tag{29.1}$$

Das Gleichungssystem (29.1) hat

— $(r - 1)\,(b_{n-1} + b_{n-2} - 1)$ Unbekannte; denn jedes Koeffizientensystem $\alpha^l$ enthält $b_{n-1} - b'$ unbekannte Koeffizienten und jedes $\gamma^l$ deren $b_{n-2} - b''$, und $l$ läuft von 1 bis $r - 1$.

— den Rang $b_{n-1} - b'$, denn (z. B.) die Matrix $\mathfrak{M} - \mathfrak{E}$ hat eine Inverse

$$(\mathfrak{M} - \mathfrak{E})^{-1} = -\frac{1}{r}\big((r - 1)\,\mathfrak{E} + (r - 2)\,\mathfrak{M} + \cdots + 2\mathfrak{M}^{r-3} + \mathfrak{M}^{r-2}\big), \tag{30}$$

was man unter Beachtung von $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}^r = \mathfrak{E}$ leicht sieht, wenn man (30) mit $\mathfrak{M} - \mathfrak{E}$ multipliziert.

— folglich einen Lösungsmodul vom Rang

$$b_{n-2} - b'' + (r-2)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1);$$

der Untermodul der ganzzahligen Lösungen heiße $\mathfrak{G}$, er hat denselben Rang, denn (29.1) ist homogen.

Da die Elemente von $\mathfrak{G}$ eineindeutig und additionstreu den Elementen von $\mathfrak{Z}_n$ zugeordnet sind, ist $\mathfrak{Z}_n \approx \mathfrak{G}$, also

$$\mathfrak{Z}_n \approx \bigoplus_{b_{n-2}-b''+(r-2)(b_{n-1}+b_{n-2}-1)} \mathbb{Z}. \tag{31}$$

## IV.4. Die Gruppen $H_d(V)$

IV.4.1. Die Gruppen $H_{2n}(V) \approx \mathbb{Z}$ und $H_{2n-1}(V) \approx 0$ sind aus I.3.3. bekannt.

IV.4.2. Für $d \in \{n+1, \ldots, 2n-2\}$ ist $\mathfrak{Z}_d \approx 0$, vgl. (24), und folglich mit (1), (17) und (18)

$$H_d(V) \approx \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } d, \\ \mathbb{Z} & \text{für gerades } d. \end{cases}$$

IV.4.3. Für $d = n$ ist mit (1), (17), (18) und (31)

$$H_n(V) \approx \bigoplus_{b_{n-1}+(r-2)(b_{n-1}+b_{n-2}-1)} \mathbb{Z}.$$

IV.4.4. Für $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ folgen die $H_d(V)$ aus dem Poincaréschen Dualitätssatz:

$$H_d(V) \approx \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } d, \\ \mathbb{Z} & \text{für gerades } d. \end{cases}$$

Damit ist der Satz (*) aus I. bewiesen.

Als $d$-Repräsentanten von $V$ in den geraden Dimensionen $d \in \{0, \ldots, n-1, n+1, \ldots, 2n\}$ können

lineare Räume $P_{d/2}$ dienen, wenn $d < n$ ist, oder
ebene Schnitte $S_{d/2} := V \cap P_{1+d/2}$, wenn $d > n$ ist, vgl. [9].

# V. Beschreibung eines Systems von $n$-Repräsentanten auf $V$

## V.1. Der allgemeine Fall: $n \geqq 2$, $r \geqq 3$

V.1.1. Ist $n$ gerade, so ist ein ebener Schnitt $S_n \subset W$ ein $n$-Repräsentant von $V$, vgl. (18). Alle anderen $n$-Repräsentanten, $n$ sei gerade oder ungerade, gewinnen wir aus solchen Äquivalenzklassen $\{\mathfrak{Z}_n\}$, die den Elementen einer fest gewählten Basis von $\mathfrak{G}$ entsprechen.

V.1.2. Für die Beschreibung einer Basis von $\mathfrak{G}$ ist es praktisch, die Koeffizienten $\gamma^l$, $l \in L'$, einer unimodularen Transformation zu unterwerfen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & r-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \\ \vdots \\ \gamma^{r-1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^1 \\ \mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}^3 \\ \vdots \\ \mathfrak{p}^{r-1} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Die Matrix der inversen Transformation ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32.1}$$

Damit folgt aus (29.1)

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) = \sum_{l \in L'} \alpha^l (\mathfrak{M}^l - \mathfrak{E}) + \mathfrak{p}^1 \mathfrak{N} \\ + \sum_{l \in L''} \mathfrak{p}^l \mathfrak{N} (\mathfrak{M}^{l-1} - \mathfrak{E}) \end{aligned} \tag{33}$$

oder, nach Multiplikation von rechts mit $(\mathfrak{M} - \mathfrak{E})^{-1}$,

$$\begin{aligned} -\alpha^1 = \alpha^2 (\mathfrak{E} + \mathfrak{M}) + \dots + \alpha^{r-1} (\mathfrak{E} + \dots + \mathfrak{M}^{r-2}) \\ + \mathfrak{p}^1 \mathfrak{N} (\mathfrak{M} - \mathfrak{E})^{-1} \\ + \mathfrak{p}^2 \mathfrak{N} + \dots + \mathfrak{p}^{r-1} \mathfrak{N} (\mathfrak{E} + \dots + \mathfrak{M}^{r-3}). \end{aligned} \tag{34}$$

Als Basis für $\mathfrak{G}$ wählen wir nun alle jene Koeffizientenmatrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha^0 & \gamma^0 \\ \alpha^1 & \mathfrak{p}^1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha^{r-1} & \mathfrak{p}^{r-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \gamma_1^0 & \dots \\ \alpha_1^1 & \dots & \mathfrak{p}_1^1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{r-1} & \dots & \mathfrak{p}_1^{r-1} & \dots \end{pmatrix},$$

in denen genau einer der auf der rechten Seite von (34) vorkommenden Koeffizienten von Null verschieden ist. Ist dieser einzige Koeffizient ein $\alpha_i^l$ oder ein $\mathfrak{p}_j^l$ mit $l \in L''$, so sei er gleich 1; ist er ein $\mathfrak{p}_j^1$, so sei er gleich $r$.[1])
Aus jedem der so gewonnenen Basiselemente von $\mathfrak{G}$ werden wir nun in den folgenden Abschnitten

— ein Zyklussystem $\mathfrak{Z}_n$ (als Repräsentanten seiner Äquivalenzklasse $\{\mathfrak{z}_n\}$) und daraus
— einen Zyklus $Z_n$ (als Repräsentanten seiner Homologieklasse)

konstruieren.
Dabei ist es praktisch, noch einige Abkürzungen zu verabreden: wir setzen (vgl. IV.3.1.)

$$R^{\bullet 0}(a_i^l) =: {}''a_i^l \quad \text{und} \quad R^{\bullet 0}(c_j^l) =: {}''c_j^l \text{ mit } l \in L'$$

(und erinnern, daß nach Konstruktion

$$R^{\bullet 0}(a_i^0) = a_i \quad \text{und} \quad R^{\bullet 0}(c_j^0) = c_j$$

gilt), entsprechend auch mit (3)

$$R^{\bullet 0}(\mathfrak{b}^l) =: {}''\mathfrak{b}^l, \quad R^{\bullet 0}(\mathfrak{a}^l) =: {}''\mathfrak{a}^l, \quad R^{\bullet 0}(\mathfrak{c}^l) =: {}''\mathfrak{c}^l,$$

[1]) Daß für kein $j$ der Koeffizient $\gamma_j^1$ ein echter Teiler von $r$ sein kann, ließe sich hier nur zeigen, wenn die Elemente $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bekannt wären. Wir werden es in V.1.5. auf andere Weise einsehen.

und schließlich (vgl. I., letzter Abschnitt)

$$a_i \times I =: A_i, \quad c_j \times I =: C_j, \quad ''a_i^l \times I =: ''A_i^l, \quad ''c_j^l \times I =: ''C_j^l.$$

V.1.3. Der einzige von Null verschiedene Koeffizient auf der rechten Seite von (34) sei

$$\alpha_i^l = 1 \tag{35}$$

für ein beliebiges, aber fest gewähltes Indexpaar $(i, l)$ mit $i \in \{1, \ldots, b_{n-1} - b'\}$ und $l \in L''$. Dann ist zunächst

$$\alpha^l \mathfrak{a} = a_i. \tag{36}$$

Setzen wir (35) in (34) ein, so folgt

$$-\alpha^1 = \alpha^l(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1})$$

und daraus

$$\begin{aligned}
-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} {} & \alpha^l(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1})\, \mathfrak{a} \\
&= \alpha^l(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1})\, R^{\bullet 0}(\mathfrak{a}^0) \\
&= \alpha^l R^{\bullet 0}\big((\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-1})\, \mathfrak{a}^0\big),
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} {} & \alpha^l R^{\bullet 0}(\mathfrak{a}^0 + \mathfrak{a}^1 + \cdots + \mathfrak{a}^{l-1}) \quad \text{(vgl. (8), (9))} \\
&= \alpha^l(\mathfrak{a} + ''\mathfrak{a}^1 + \cdots + ''\mathfrak{a}^{l-1}) \\
&= a_i + ''a_i^1 + \cdots + ''a_i^{l-1}.
\end{aligned} \tag{37.1}$$

Aus (28.1) folgt weiter

$$\alpha^0 = -(\alpha^1 + \alpha^l),$$

also

$$\alpha^0 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} -(\alpha^1 + \alpha^l)\, \mathfrak{a}$$

oder mit (36) und (37.1)

$$\alpha^0 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} ''a_i^1 + \cdots + ''a_i^{l-1}. \tag{38}$$

Aus (36), (37.1) und (38) konstruieren wir nun das Zyklussystem

$$\mathfrak{z}_n = \big(F^{\bullet 0}(''A_i^1 + \cdots + ''A_i^{l-1}), -F^{\bullet 1}(A_i + ''A_i^1 + \cdots + ''A_i^{l-1}), 0, \ldots \\ \ldots, 0, F^{\bullet l}(A_i), 0, \ldots, 0\big)$$

und bemerken, daß die Summe seiner drei nicht-trivialen Komponenten schon ein $n$-Zyklus ist.
Es gibt für die zugelassenen Koeffizienten $\alpha_i^l$ insgesamt $(r - 2)(b_{n-1} - b')$ verschiedene Indexpaare, wir erhalten also auf die beschriebene Weise ebenso viele $n$-Zyklen als $n$-Repräsentanten von $V$.

V.1.4. Der einzige von Null verschiedene Koeffizient auf der rechten Seite von (34) sei jetzt

$$\mathfrak{p}_j^l = 1 \tag{39}$$

für ein beliebiges, aber fest gewähltes Indexpaar $(j, l)$ mit $j \in \{1, \ldots, b_{n-2} - b''\}$ und $l \in L''$.
Wir müssen die Fälle $l > 2$ und $l = 2$ unterscheiden.

V.1.4.1. Es sei zunächst $l > 2$. Aus (39) erhalten wir mit (32.1)

$$\gamma_j^1 = \gamma_j^{l-1} = -1, \quad \gamma_j^l = 1. \tag{40}$$

Wir setzen (39) in (34) ein und erhalten

$$-\alpha^1 = \mathfrak{p}^l \mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-2})$$

und daraus

$$\begin{aligned}
-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} &\ \mathfrak{p}^l \mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-2})\, \mathfrak{a} \\
&= \mathfrak{p}^l \mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-2})\, R^{\bullet 0}(\mathfrak{a}^0) \\
&= \mathfrak{p}^l R^{\bullet 0}\big(\mathfrak{N}(\mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \cdots + \mathfrak{M}^{l-2})\, \mathfrak{a}^0\big),
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} &\ \mathfrak{p}^l R^{\bullet 0}(\mathfrak{c}^{l-1} - \mathfrak{c}^0) \quad (\text{vgl. } (8), (9)) \\
&= \mathfrak{p}^l(''\mathfrak{c}^{l-1} - \mathfrak{c}) \\
&= ''\mathfrak{c}_j^{l-1} - \mathfrak{c}_j.
\end{aligned} \tag{41.1}$$

Aus (28.1) folgt weiter

$$\alpha^0 = -\alpha^1 \quad \text{und} \quad \gamma^0 = -(\gamma^1 + \gamma^{l-1} + \gamma^l),$$

also

$$\alpha^0 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} -\alpha^1 \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \gamma^0 \mathfrak{c} \underset{W,U}{\simeq} -(\gamma^1 + \gamma^{l-1} + \gamma^l)\, \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_j. \tag{42}$$

Aus (40), (41.1) und (42) konstruieren wir nun das Zyklussystem

$$\mathfrak{z}_n = \big(F^{\bullet 0}(''C_j^{l-1}), -F^{\bullet 1}(''C_j^{l-1}), 0, \ldots, 0, -F^{\bullet l-1}(C_j), F^{\bullet l}(C_j), 0, \ldots, 0\big).$$

Die Summe seiner vier nicht-trivialen Komponenten ist wieder ein $n$-Zyklus.
Es gibt für diesen Fall $(r-3)\,(b_{n-2} - b'')$ Indexpaare $(j, l)$, also ebenso viele korrespondierende $n$-Repräsentanten von $V$.

V.1.4.2. Es sei nun $l = 2$. Aus (39) erhalten wir mit (32.1)

$$\gamma_j^1 = -2, \quad \gamma_j^2 = 1. \tag{43}$$

Wir setzen (39) — mit $l = 2$ — in (34) ein und erhalten

$$-\alpha^1 = \mathfrak{p}^2 \mathfrak{N}$$

und daraus

$$-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} \mathfrak{p}^2 \mathfrak{N} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^2 \mathfrak{N} R^{\bullet 0}(\mathfrak{a}^0) = \mathfrak{p}^2 R^{\bullet 0}(\mathfrak{N} \mathfrak{a}^0),$$

$$-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} \mathfrak{p}^2 R^{\bullet 0}(\mathfrak{c}^1 - \mathfrak{c}^0) \quad (\text{vgl. } (8), (9)),$$

$$-\alpha^1 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} ''\mathfrak{c}_j^1 - \mathfrak{c}_j. \tag{44}$$

Aus (28.1) folgt wieder

$$\alpha^0 = -\alpha^1 \quad \text{und} \quad \gamma^0 = -(\gamma^1 + \gamma^2),$$

also

$$\alpha^0 \mathfrak{a} \underset{W,U}{\simeq} -\alpha^1 \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \gamma^0 \mathfrak{c} \underset{W,U}{\simeq} -(\gamma^1 + \gamma^2)\, \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_j. \tag{45}$$

Aus (43), (44) und (45) konstruieren wir das Zyklussystem

$$\mathfrak{z}_n = \left(F^{\bullet 0}({}''C_j^1), -F^{\bullet 1}(C_j + {}''C_j^1), F^{\bullet 2}(C_j), 0, \ldots, 0\right)$$

und bemerken, daß auch hier die Summe der nicht-trivialen Komponenten ein $n$-Zyklus ist.
Es gibt in diesem Fall $b_{n-2} - b''$ Indexpaare $(j, 2)$ und ebenso viele korrespondierende $n$-Repräsentanten von $V$.

V.1.5. Der einzige von Null verschiedene Koeffizient auf der rechten Seite von (34) sei schließlich

$$\mathfrak{p}_j^1 = r \tag{46}$$

für ein beliebiges, aber fest gewähltes $j \in \{1, \ldots, b_{n-2} - b''\}$. Dann ist zunächst

$$\mathfrak{p}^1\mathfrak{c} = \gamma^1\mathfrak{c} = r \cdot c_j. \tag{47}$$

Wir setzen (46) in (34) ein und erhalten

$$-\alpha^1 = \mathfrak{p}^1\mathfrak{N}(\mathfrak{M} - \mathfrak{E})^{-1}$$

und daraus

$$-\alpha^1\mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} \mathfrak{p}^1\mathfrak{N}(\mathfrak{M} - \mathfrak{E})^{-1}\,\mathfrak{a}$$

oder mit (30)

$$\begin{aligned}
\alpha^1\mathfrak{a} &\underset{W,U}{\sim} \frac{1}{r}\,\mathfrak{p}^1\mathfrak{N}\left((r-1)\,\mathfrak{E} + \cdots + \mathfrak{M}^{r-2}\right)\mathfrak{a}\\
&= \frac{1}{r}\,\mathfrak{p}^1\mathfrak{N}\left(\mathfrak{a} + (\mathfrak{E} + \mathfrak{M})\,\mathfrak{a} + \cdots + (\mathfrak{E} + \cdots + \mathfrak{M}^{r-2})\,\mathfrak{a}\right)\\
&= \frac{1}{r}\,\mathfrak{p}^1 R^{\bullet 0}\left(\mathfrak{N}(\mathfrak{a}^0 + \cdots + (\mathfrak{E} + \cdots + \mathfrak{M}^{r-2})\,\mathfrak{a}^0)\right)\\
\alpha^1\mathfrak{a} &\underset{W,U}{\sim} \frac{1}{r}\,\mathfrak{p}^1 R^{\bullet 0}\left((\mathfrak{c}^1 - \mathfrak{c}^0) + \cdots + (\mathfrak{c}^{r-1} - \mathfrak{c}^0)\right)\\
&= \frac{1}{r}\,\mathfrak{p}^1\left(({}''\mathfrak{c}^1 - \mathfrak{c}) + \cdots + ({}''\mathfrak{c}^{r-1}) - \mathfrak{c})\right)\\
&= ({}''c_j^1 - c_j) + \cdots + ({}''c_j^{r-1} - c_j).^{1)}
\end{aligned} \tag{48}$$

Aus (28.1) ergibt sich schließlich

$$\alpha^0 = -\alpha^1 \quad \text{und} \quad \gamma^0 = -\gamma^1,$$

also

$$\alpha^0\mathfrak{a} \underset{W,U}{\sim} -\alpha^1\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \gamma^0\mathfrak{c} \underset{W,U}{\sim} -\gamma^1\mathfrak{c}. \tag{49}$$

Mit (47), (48) und (49) bilden wir nun das Zyklussystem

$$\mathfrak{z}_n = \left(-F^{\bullet 0}(C_j + {}''C_j^1 + \cdots + {}''C_j^{r-1}), F^{\bullet 1}(C_j + \cdots + {}''C_j^{r-1}), 0, \ldots, 0\right).$$

Wiederum ist die Summe der nicht-trivialen Komponenten ein $n$-Zyklus.
Wir erhalten hier $b_{n-2} - b''$ solcher $n$-Zyklen, nämlich einen für jeden zugelassenen Index $j$.

---

1) Wir erinnern an die Fußnote auf S. 45. Wäre $\mathfrak{p}_j^1$ ein echter Teiler von $r$, so ergäben sich auf der rechten Seite von (48) keine ganzzahligen Koeffizienten.

Wir erhalten hier $b_{n-2} - b''$ solcher $n$-Zyklen, nämlich einen für jeden zugelassenen Index $j$.
Damit haben wir in V.1.1. und V.1.3. bis V.1.5. insgesamt

$$b_{n-2} + (r-2)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1)$$

Zyklen angegeben, die ein vollständiges System von $n$-Repräsentanten auf $V$ bilden.
Dessen Anschaubarkeit ist freilich „induktiv". Sie setzt voraus, daß man eine Vorstellung von $(n-1)$-Repräsentanten auf $W$ und von $(n-2)$-Repräsentanten auf $U$ hat.
Eine solche Vorstellung haben wir nun wenigstens für $n = 2$ und — dank [5] — für $n = r = 3$.

### V.2. Der Fall $n = 2$

Es ist jetzt

— $W$ die Kurve $x_0^r + x_1^r + x_2^r = 0$, $x_3 = 0$, die wir uns als eine 2-Sphäre mit $(r-1)(r-2)/2$ angesetzten Henkeln denken, und

— $U$ das Punkte-$r$-Tupel $x_0^r + x_1^r = 0$, $x_2 = x_3 = 0$.

V.2.1. Da $n$ gerade ist, repräsentiert ein „ebener $n$-dimensionaler Schnitt von $W$", das ist hier also $W$ selbst, eine erzeugende Klasse von $H_2(V)$; vgl. V.1.1.

V.2.2. Als Teilsystem $\mathfrak{a}$ von 1-Repräsentanten auf $W$, $U$ wählen wir eine Menge von $(r-1)(r-2)$ orientierten topologischen Kreisen auf $W$, die von jedem Henkel einen „Meridian" und einen „Breitenkreis" enthält. Keiner dieser Kreise soll durch $U$ gehen.
Es sei $a_i$ ein beliebiger Kreis aus $\mathfrak{a}$. Er beschreibt bei jeder Konstruktion nach V.1.3. einen Schlauch.

V.2.3. Als Teilsystem $\mathfrak{c}$ von 1-Repräsentanten auf $W$, $U$ wählen wir auf $W$ genau $r-1$ orientierte Wege $c_1, \ldots, c_{r-1}$, indem wir einen beliebigen Punkt von $U$ mit jedem der $r-1$ anderen Punkte von $U$ verbinden. Dies geschehe so, daß jedes $c_j$ homöomorph zu $I$ ist und mit $U$ nur Anfangs- und Endpunkt gemeinsam hat und daß weiter für jedes $j$ die $c_j, {}''c_j^1, \ldots, {}''c_j^{r-1}$ in $W - U$ paarweise disjunkt sind.
Jedes $c_j$ beschreibt dann bei jeder Konstruktion nach V.1.4. eine Folge topologischer „Kugelzweiecke", die sich zu einer 2-Sphäre zusammenfügen mit zwei Punkten von $U$ als Polen.

### V.3. Der Fall $n = r = 3$

Es ist jetzt

— $W$ die kubische Fläche $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, $x_4 = 0$,

— $U$ die elliptische Kurve $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$.

V.3.1. Ein Teilsystem $\mathfrak{a}$ von 2-Repräsentanten auf $W$, $U$ enthält genau sechs Elemente; vgl. III.1.4. Als solche können wir die (wie in [5] bezeichneten) Geraden

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, c_{12} \tag{50}$$

auf $W$ wählen. (Daß diese Geraden zusammen mit $U$ eine 2-Homologiebasis von $W$ repräsentieren, sieht man an der Matrix ihrer Schnittzahlen: Sie hat die Determinante 1.) Eine beliebige Gerade $a_i$ aus $\mathfrak{a}$ beschreibt bei der in V.1.3. angegebenen Konstruktion (für $l$ ist hier nur der Wert 2 möglich) einen 3-Kegel mit $a_i$ als erzeugender Mantel-

linie. Denn der Schnittpunkt $a_i \cap U$ bleibt bei allen Abbildungen $F^l(a_i)$ fest. Der 3-Kegel liegt in der Tangentialhyperebene, die $V$ in $a_i \cap U$ berührt. Der Schnitt dieser Tangentialhyperebene mit $V$ muß ein elliptischer Kegel (dritter Ordnung) sein: ein Kegel, weil durch $a_i \cap U$ unendlich viele Geraden gehen, und elliptisch, weil der Schnitt keine singuläre Gerade enthält.
Wir erhalten so sechs 3-Kegel.
V.3.2. Ein Teilsystem $\mathfrak{c}$ von 2-Repräsentanten auf $W$, $U$ enthält genau zwei Elemente; vgl. III.1.4. Wir denken sie als topologische Kreisscheiben $c_1$ und $c_2$, deren Ränder $z_j := \partial c_j$ in $U$ eine 1-Homologiebasis repräsentieren.
Bei der in V.1.4.2. angegebenen Konstruktion (V.1.4.1. läßt sich ersichtlich nicht für $r = 3$ durchführen) beschreibt jedes $c_j$ eine Folge von topologischen 3-Vollkugeln. Diese setzen sich zu einer 3-Sphäre zusammen, wenn für jedes $j \in \{1, 2\}$ die $c_j$, $''c_1^j$, $''c_j^2$ in $W - U$ paarweise disjunkt sind; das läßt sich leicht erreichen.
Wir erhalten also zwei 3-Sphären.
Durch die in V.1.5. angegebene Konstruktion erhalten wir aus den soeben benutzten $c_1$, $c_2$ und auf analoge Weise noch einmal zwei 3-Sphären.

## LITERATUR


[1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF: Topologie. Springer, Berlin 1935.
[2] DRECHSLER, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Math. Nachr. *46* (1970), 107–136.
[3] FÁRY, I.: Cohomologie des variétés algébriques. Ann. Math. *65* (1957), 21–73.
[4] HIRZEBRUCH, F.: Der Satz von Riemann-Roch in Faisceau-theoretischer Formulierung, einige Anwendungen und offene Fragen. Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam, III, (1954), 457–472.
[5] KELLER, O.-H.: Die Homologiegruppen der Flächen 3. Ordnung. Sitzungsber. Sächs. Akad. der Wissensch. Leipzig. Math.-nat. Klasse, Bd. 107 (1965), 1–15.
[6] KELLER, O.-H.: Über eine Definition von S. Lefschetz in der topologischen Schnittheorie. Sitzungsber. Sächs. Akad. der Wissensch. Leipzig, Bd. 108 (1969), 1–29.
[7] KELLER, O.-H.: Vorlesungen über algebraische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1974.
[8] SCHIEMANN, G.: Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *4* (1975), 65–70.
[9] SCHIEMANN, G.: Die Homologiegruppen der Umgebungsränder gewisser Kegelspitzen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *6* (1977), 7–11.
[10] SCHIEMANN, G.: Die Homologiegruppen singularitätenfreier algebraischer Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *8* (1979), 91–97.
[11] SCHUBERT, H.: Topologie. 4. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1975.
[12] SEIFERT, H., und W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. B. G. Teubner, Leipzig 1934 (Nachdruck Chelsea Publ. Comp., New York, N. Y., 1945).
[13] SPANIER, E. H.: Algebraic Topology. McGraw Hill, New York 1966.
[14] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1929), 337–362.
[15] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie, IV: Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen in der Liniengeometrie. Math. Ann. *109* (1933), 7–12.


**Manuskripteingang: 13. 12. 1977**

VERFASSER:

**GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg**