Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 27–32

Vervollständigung von Kegelschnittmengen

KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ

Zur Untersuchung von Kegelschnittmannigfaltigkeiten gehört die Betrachtung von Untermengen, die durch an die Kegelschnitte gestellte Bedingungen gegeben werden. Neben den besonders einfachen Bedingungen, durch gegebene Punkte zu gehen, sind *Berührungsbedingungen* häufig untersucht worden [4, 5]. Unter den dadurch beschriebenen Untermannigfaltigkeiten finden sich solche, die ein *besonderes Verhalten* zu Untervarietäten *ausgearteter* Kegelschnitte zeigen, die nämlich diese *nicht eigentlich*, sondern in *zu hoher* Dimension schneiden. Dies kann man durch eine passende Erweiterung des Kegelschnittbegriffs zu beseitigen versuchen.
So führt die Bedingung an p-Kegelschnitte[1]), eine Kurve zu berühren, zur Konstruktion der p-l-Kegelschnitte[2]), die Bedingung an p-l-Kegelschnitte, eine Kurve zu *superoskulieren*, zur Konstruktion der p-l-s-Kegelschnitte[3]) [2]. Wir wollen zeigen, daß in [2] mit der Konstruktion der p-l-s-Kegelschnitte ein Abschluß gefunden wurde. Dies bedarf einer Präzisierung.

1. Kegelschnittmannigfaltigkeiten

Die Menge der p-Kegelschnitte einer projektiven Ebene X über dem Körper k der komplexen Zahlen erfüllt einen projektiven 5-Raum P_5 mit Koordinaten $(p_1, \ldots, p_6) = (p)$. Es gibt in P_5 zwei Varietäten von *Ausartungen*: die Varietät $(P_5 \mid P_{(2)})$ der zerfallenden Kegelschnitte, für die der Rang der *Koeffizientenmatrix* $\big((p)\big)$ gleich 2 ist, und die Varietät $(P_5 \mid P_{(1)})$ der Doppelgeraden, für die der Rang der Koeffizientenmatrix $\big((p)\big)$ gleich 1 ist.
Es sei Q eine Varietät eines Produktraums $P_5 \times \cdots$ von P_5 mit weiteren projektiven Räumen über k.

Definition 1.1. Q heiße eine *Kegelschnittmannigfaltigkeit*, wenn die Abbildung

$$\chi: Q \to P_5 \quad \text{mit} \quad \chi(p, \ldots) = (p) \tag{1.1}$$

birational ist und die Menge der Fundamentalpunkte von χ^{-1} eine Teilmenge von $(P_5 \mid P_{(1)})$ ist.

Beispiele dafür sind die Menge M_5 der p-l-Kegelschnitte und die Menge N_5 der p-l-s-Kegelschnitte [5, 2].

---

[1]) Punktkegelschnitte.
[2]) Punkt-Linien- oder vollständige Kegelschnitte.
[3]) Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte.

Definition 1.2 (*Ausartungsvarietäten auf* Q).

1. Die irreduziblen Komponenten von $\chi^{-1}(P_5 \mid A)$ mit $A = P_{(1)}$ und $A = P_{(2)}$ sind Ausartungsvarietäten auf Q.

2. Sind $(Q \mid A')$ und $(Q \mid A'')$ zwei Ausartungsvarietäten auf Q, so sind auch die irreduziblen Komponenten des Schnitts $(Q \mid A'A'')$ von $(Q \mid A')$ mit $(Q \mid A'')$ Ausartungsvarietäten auf Q.

2. Berührungsvollständige Kegelschnittmannigfaltigkeiten

Es sei c eine irreduzible Kurve der projektiven Ebene X und (x_c) ein *allgemeiner Punkt* von c. Mit $\big(Q \mid B(c, r)\big)$ bezeichnen wir die Varietät der Kegelschnitte aus Q, die c in (x_c) von r-ter Ordnung berühren ($r = 0, 1, \ldots$; ord $c > 1$ für $r > 1$). Dies ist so zu verstehen: Es sei $\big(P_5 \mid B(c, r)\big)$ für $r = 0, 1, 2, 3, 4$ die über $k(x_c) = K$ lineare $(4 - r)$-dimensionale Varietät der p-Kegelschnitte, die c in (x_c) mindestens $(r + 1)$-fach schneiden. Für $r > 4$ sei $\big(P_5 \mid B(c, r)\big)$ leer. Ein allgemeiner Punkt $\pi(c, r)$ der Varietät $\big(P_5 \mid B(c, r)\big)$ ist ein *nicht ausgearteter* Kegelschnitt und bestimmt daher eindeutig einen Kegelschnitt von Q. Dieser definiert als allgemeiner Punkt über K die Varietät $\big(Q \mid B(c, r)\big)$, die $(4 - r)$-dimensional für $r = 0, 1, 2, 3, 4$ ist. Für $r > 4$ ist $\big(Q \mid B(c, r)\big)$ für alle irreduziblen c leer.

Definition 2.1. Eine Kegelschnittmannigfaltigkeit Q heißt *r-berührungsvollständig*, wenn für alle irreduziblen $c \subset X$ und alle Ausartungsvarietäten $(Q \mid A)$ von Q, die mit $\big(Q \mid B(c, r)\big)$ einen nicht leeren Schnitt haben,

$$\dim_K \big(Q \mid AB(c, r)\big)^{1)} \leqq \dim_K (Q \mid A) + \dim_K \big(Q \mid B(c, r)\big) - \dim_K Q \qquad (2.1)$$

ist.

Satz 2.2. *Jede Kegelschnittmannigfaltigkeit Q ist r-berührungsvollständig für $r = 0$.*

Beweis. Die Varietäten $(Q \mid A)$ sind über k definiert. Zu den Gleichungen von $\big(Q \mid B(c, 0)\big)$ gehört eine lineare Gleichung in (p), deren Koeffizienten nicht alle in k liegen. Also ist

$$\dim_K \big(Q \mid AB(c, 0)\big) \leqq \dim_K (Q \mid A) - 1.$$

Satz 2.3. *Jede Kegelschnittmannigfaltigkeit Q ist r-berührungsvollständig für $r \geqq 4$.*

Beweis. Für $r \geqq 4$ ist $\big(Q \mid B(c, r)\big)$ leer oder besteht aus einem einzigen Punkt q von Q derart, daß χq ein nicht ausgearteter p-Kegelschnitt ist.

3. Unvollständigkeit von P_5

Satz 3.1. *Die Kegelschnittmannigfaltigkeit $Q = P_5$ ist für $r = 1, 2, 3$ nicht r-berührungsvollständig.*

Beweis. Im Schnitt $\big(P_5 \mid AB(c, r)\big)$, $r = 1, 2, 3$, liegen diejenigen Ausartungen aus $(P_5 \mid A)$, die c in (x_c) $(r + 1)$-fach schneiden, also die entsprechenden $r + 1$ linearen Gleichungen erfüllen. Damit ergibt sich folgende Tabelle für $\dim_K \big(P_5 \mid AB(c, r)\big)$:

---

1) $\big(Q \mid AB(c, r)\big)$ ist der Schnitt von A und $B(c, r)$ auf Q.

A	r / $\dim(P_5 \mid B(c, r)) \rightarrow$ / $\dim(P_5 \mid A) \downarrow$	1	2	3
		3	2	1
$P_{(2)}$	4	2	1	0
$P_{(1)}$	2	1	0	0

Somit ist (2.1) zwar erfüllt für $A = P_{(2)}$, aber nicht für $A = P_{(1)}$ bei $r = 1, 2, 3$.

4. Unvollständigkeit von M_5

Die Kegelschnittmannigfaltigkeit M_5 der *p-l-Kegelschnitte* ist eine Varietät des Produktraums $P_5 \times L_5$ mit dem *allgemeinen Punkt* $(p, l) = (p_i, l_i)$, wobei p_i $(i = 1, \ldots, 6)$ *unbestimmt* und l_i $(i = 1, \ldots, 6)$ durch die zweireihigen Adjunkten der Koeffizientenmatrix $\big((p)\big)$ des p-Kegelschnitts (p) gegeben sind.
Die l_i bilden die Koeffizientenmatrix $\big((l)\big)$ des zugehörigen *Linienkegelschnittes* in den Linienkoordinaten (w_1, w_2, w_3), die als Koordinaten einer projektiven Ebene W aufgefaßt werden können. Durch den allgemeinen Punkt ist eine *birationale Abbildung*

$$\chi\colon M_5 \to P_5 \tag{4.1}$$

gegeben. Ausartungsvarietäten auf M_5 sind nach Definition 1.2 demzufolge

$(M_5 \mid P_{(1)})$ — die Varietät der *p-Ausartungen* auf M_5 $\big(\text{Rang } ((p)) = 1\big)$,
$(M_5 \mid L_{(1)})$ — die Varietät der *l-Ausartungen* auf M_5 $\big(\text{Rang } ((l)) = 1\big)$,
$(M_5 \mid P_{(1)}L_{(1)})$ — die Varietät der *p-l-Ausartungen* auf M_5 $\big(\text{Rang } ((p)) = \text{Rang } ((l)) = 1\big)$.

Auch zu der irreduziblen Kurve $c \subset X$ gibt es eine zugehörige Kurve c' in W und eine Kurve $\bar{c} \subset X \times W$ mit dem allgemeinen Punkt $\big(x_c, w(x_c)\big)$, wobei $w(x_c)$ die Tangente im Punkt (x_c) an c bedeutet. Jeder p-l-Kegelschnitt aus $\big(M_5 \mid B(c, r)\big)$ hat mit $\bar{c}$ den Punkt (x_c) und die Tangente $w(x_c)$ als $(r + 1)$-fache Schnittelemente — geschnitten in X bzw. W — gemeinsam $(r = 1, 2, 3)$. Die entsprechenden linearen Gleichungen

$$L_i(p), \quad L_j(l) \tag{4.2}$$

müssen von den Ausartungen aus $(M_5 \mid A)$ erfüllt werden, die in $\big(M_5 \mid AB(c, r)\big)$, $r = 1, 2, 3$, liegen.
Damit ergibt sich, daß die Elemente t_{Ar} der folgenden Tabelle eine Abschätzung

$$\dim_K \big(M_5 \mid AB(c, r)\big) \leqq t_{Ar} \tag{4.3}$$

liefern, wenn $\big(M_5 \mid AB(c, r)\big) \neq \emptyset$ ist.

A	r / $\dim(M_5 \mid B(c, r)) \rightarrow$ / $\dim(M_5 \mid A) \downarrow$	1	2	3
		3	2	1
$P_{(1)}$	4	2	1	0
$L_{(1)}$	4	2	1	0
$P_{(1)}L_{(1)}$	3	1	0	0

(4.4)

Daraus folgt mit Definition 1.2 der

Satz 4.1. *Die Kegelschnittmannigfaltigkeit M_5 ist r-berührungsvollständig für* $r = 1, 2$.

Satz 4.2. *Die Kegelschnittmannigfaltigkeit M_5 ist nicht 3-berührungsvollständig.*

Beweis. Wir zeigen dazu, daß

$$\left(M_5 \mid P_{(1)}L_{(1)}B(c, 3)\right) \neq \emptyset \tag{4.5}$$

ist. Es sei (π, λ) der allgemeine Punkt von $\left(M_5 \mid B(c, 3)\right)$. Wegen $\left(P_5 \mid P_{(1)}B(c, 3)\right) \neq \emptyset$ gibt es eine Spezialisierung $(\pi) \to (\pi')$ zu der Doppelgeraden π', die c in (x_c) vierfach schneidet. Es gibt dazu eine Fortsetzung $(\pi, \lambda) \to (\pi', \lambda')$ mit $(\pi', \lambda') \in \left(M_5 \mid P_{(1)}B(c, 3)\right)$. Der p-l-Kegelschnitt (π', λ') ist eine p-Ausartung und liegt in $\left(M_5 \mid B(c, 3)\right)$. Die Gleichungen (4.2) für $r = 3$ ergeben, daß (π', λ') auch eine l-Ausartung ist.

5. Vollständigkeit von N_5

Die eindimensionale lineare Varietät $\left(P_5 \mid B(c, 3)\right)$ ist eine *Büschelschar* von p-Kegelschnitten, die durch die Form des p-Kegelschnitts $\left(P_5 \mid B(c, 4)\right)$ und durch das Quadrat der Linearform der Tangente $w(x_c)$ erzeugt wird.
Die Gerade $\left(P_5 \mid B(c, 3)\right)$ betrachten wir als Punkt $g(x_c)$ im Graßmannraum G_{14} über K.
Zu c' in W findet man entsprechend eine Büschelschar von l-Kegelschnitten, die man durch einen Punkt $h\left(w(x_c)\right)$ in einem Graßmannraum H_{14} über K darstellen kann. Damit erhalten wir zu c eine Kurve $\bar{c} \in X \times W \times G \times H$ mit dem allgemeinen Punkt

$$\left(x_c, w(x_c), g(x_c), h(w(x_c))\right) \tag{5.1}$$

über k.

Definition 5.1. Die Punkte $g(x_c)$ bzw. $h\left(w(x_c)\right)$ heißen die p- bzw. *l-Superoskulanten* von $\bar{c}$ in x_c. Ebenso heißen alle Spezialisierungen $g(\xi_c)$ bzw. $h\left(w(\xi_c)\right)$, die durch Fortsetzung

$$\left(x_c, w(x_c), g(x_c), h(w(x_c))\right) \xrightarrow{k} \left(\xi_c, w(\xi_c), g(\xi_c), h(w(\xi_c))\right)$$

einer Spezialisierung $(x_c) \xrightarrow{k} (\xi_c)$ entstehen, p- bzw. l-Superoskulanten von $\bar{c}$.

Wählen wir nun für c einen allgemeinen p-Kegelschnitt, so ist

$$\left(P_5 \mid B(c, 4)\right) = \left(P_5 \mid B(p, 4)\right) = p. \tag{5.2}$$

Der allgemeine Punkt $g(x_p)$ bzw. $h\left(w(x_p)\right)$ beschreibt eine Kurve $\bar{s}^P$ in G_{14} bzw. $\bar{s}^L$ in H_{14} über k. Die Koeffizienten $\bar{s}_j^P$ bzw. $\bar{s}_j^L$ der *zugeordneten Form* [1] $\bar{F}^P$ bzw. $\bar{F}^L$ dieser Kurve sind *rationale Funktionen* von p_i [2].
In [2] und [3] hatten wir definiert: Die Kegelschnittmannigfaltigkeit N_5 der *p-l-s-Kegelschnitte* ist die Varietät eines vierfachen Produktraumes mit dem *allgemeinen Punkt*

$$(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L) \quad \text{über } k. \tag{5.3}$$

Durch den allgemeinen Punkt (5.3) ist eine *birationale Abbildung*

$$\chi\colon N_5 \to P_5 \tag{5.4}$$

gegeben.

Die algebraische Menge $\chi^{-1}(P_5 \mid P_{(2)})$ zerfällt in die vierdimensionalen irreduziblen Komponenten [2], 8.,

$$(N_5 \mid P^T_{(1)}), \quad (N_5 \mid P_{(1)}L_{(1)}), \quad (N_5 \mid L^T_{(1)}). \tag{5.5}$$

Die ersten zwei bzw. letzten zwei schneiden sich in der dreidimensionalen Varietät

$$(N_5 \mid P^T_{(1)}L_{(1)}) \quad \text{bzw.} \quad (N_5 \mid P_{(1)}L^T_{(1)}). \tag{5.6}$$

Die algebraische Menge $\chi^{-1}(P_5 \mid P_{(1)})$ zerfällt in $(N_5 \mid P^T_{(1)})$ und $(N_5 \mid P_{(1)}L_{(1)})$. Andere nicht leere Schnitte der Varietäten (5.5) und (5.6) treten nicht auf. Also sind diese die *Ausartungsvarietäten* auf N_5.

Satz 5.2. *Die Kegelschnittmannigfaltigkeit N_5 ist r-berührungsvollständig für alle $r = 0, 1, 2, \ldots$*

Beweis. Auf Grund der Sätze 2.2 und 2.3 genügt es zu zeigen, daß die t_{Ar} der folgenden Tabelle für $(N_5 \mid AB(c, r)) \neq \emptyset$ eine Abschätzung

$$\dim_K (N_5 \mid AB(c, r)) \leqq t_{Ar} \tag{5.7}$$

ergeben und daß $(N_5 \mid P^T_{(1)}L_{(1)}B(c, 3))$ und $(N_5 \mid P_{(1)}L^T_{(1)}B(c, 3))$ leer sind.

(5.8)

	r	1	2	3
	$\dim(N_5 \mid B(c, r)) \rightarrow$	3	2	1
A	$\dim(N_5 \mid A) \downarrow$			
$P^T_{(1)}$	4	2	1	0
$L^T_{(1)}$	4	2	1	0
$P_{(1)}L_{(1)}$	4	2	1	0
$P^T_{(1)}L_{(1)}$	3	1	0	
$P_{(1)}L^T_{(1)}$	3	1	0	

Durch den allgemeinen Punkt (5.3) ist auch eine birationale Abbildung

$$\psi\colon N_5 \rightarrow M_5 \tag{5.9}$$

gegeben. Diese ist zwischen $(N_5 \mid P^T_{(1)})$ und $\psi(N_5 \mid P^T_{(1)}) = (M_5 \mid P_{(1)})$ und zwischen $(N_5 \mid L^T_{(1)})$ und $\psi(N_5 \mid L^T_{(1)}) = (M_5 \mid L_{(1)})$ eineindeutig [2], 8.1. Außerdem ist

$$\psi(N_5 \mid P^T_{(1)}L_{(1)}) = (M_5 \mid P_{(1)}L_{(1)}) = \psi(N_5 \mid P_{(1)}L^T_{(1)}).$$

Zu den Gleichungen für $(N_5 \mid B(c, r))$ gehören auch die von $(M_5 \mid B(c, r))$.
Dies zusammen ergibt: Ist $(N_5 \mid P^T_{(1)}B(c, r)) \neq \emptyset$, dann ist auch $(M_5 \mid P_{(1)}B(c, r)) \neq \emptyset$ und

$$\dim_K (N_5 \mid P^T_{(1)}B(c, r)) \leqq \dim_K (M_5 \mid P_{(1)}B(c, r)) \tag{5.10}$$

für $r = 1, 2, 3$. Entsprechendes gilt für $(N_5 \mid AB(c, r))$ bei $A = L^T_{(1)}, P^T_{(1)}L_{(1)}$ und $P_{(1)}L^T_{(1)}$.
Zu jedem Punkt von $(M_5 \mid P_{(1)}L_{(1)})$ gehört bei ψ^{-1} eine eindimensionale Teilmenge von $(N_5 \mid P_{(1)}L_{(1)})$, also ist

$$\dim_K (N_5 \mid P_{(1)}L_{(1)}B(c, r)) \leqq \dim_K (M_5 \mid P_{(1)}L_{(1)}B(c, r)) + 1.$$

Daher ergibt sich die Tabelle (5.8) fast aus (4.4). Zu beschreiben sind noch die Schnitte $(N_5 \mid AB(c, 3))$ für $A = P_{(1)}L_{(1)}, P^T_{(1)}L_{(1)}$ und $P_{(1)}L^T_{(1)}$.

Der allgemeine Punkt von $\left(N_5 \mid B(c, 3)\right)$ ist ein p-l-s-Kegelschnitt mit folgenden Eigenschaften:
Er hat mit c den Punkt (x_c) und mit c' die Tangente $w(x_c)$ als vierfache Schnittelemente — geschnitten in X bzw. W — gemeinsam. Seine Kurve $\bar{s}^p$ der p-Superoskulanten in G_{1s} hat mit der Kurve der p-Superoskulanten von $\bar{c}$ einen Punkt, nämlich $g(x_c)$, gemeinsam. Diese Forderungen werden von einer einzigen p-l-Ausartung erfüllt.
Die $g(x_c)$ entsprechende Büschelschar $\left(P_5 \mid B(c, 3)\right)$ enthält nichtausgeartete Kegelschnitte, während die den p-Superoskulanten von p^T-l-Ausartungen bzw. p-l^T-Ausartungen entsprechende Schar nur zerfallende p-Kegelschnitte enthält [2], 7. Damit gilt

$$\dim_K \left(N_5 \mid P_{(1)} L_{(1)} B(c, 3)\right) = 0,$$

$$\left(N_5 \mid P^T_{(1)} L_{(1)} B(c, 3)\right) = \emptyset \quad \text{und} \quad \left(N_5 \mid P_{(1)} L^T_{(1)} B(c, 3)\right) \neq \emptyset .$$

LITERATUR

[1] Chow, W.-L., und B. L. van der Waerden: Zur algebraischen Geometrie, IX. Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. *113* (1937), 692—704.

[2] Drechsler, K., und U. Sterz: Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *6* (1977), 37—54.

[3] Drechsler, K., und U. Sterz: Charakteristiken und Schnittzahlformeln für p-l-s-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *8* (1979), 7—31.

[4] Severi, F.: I fondamenti della geometria numerativa. Ann. Mat. pura ed appl., ser. IV, *19* (1940), 153—242.
(Übers.: Gröbner, W.: Grundlagen der abzählenden Geometrie. Math. Forsch. I, 2, Wolfenbüttel 1948.)

[5] Van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie, XV. Lösung des Charakteristikenproblems für Kegelschnitte. Math. Ann. *115* (1938), 645—655.

Manuskripteingang: 6. 12. 1977

VERFASSER:

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg