Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 13–26

Immersionen in Räume konstanter Schnittkrümmung

JÜRGEN REICHERT

Jede Immersion $\iota\colon \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}^m$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}^n$ von konstanter Schnittkrümmung C induziert unter einer natürlichen Regularitätsvoraussetzung — der Stabilität — eine Serie von gewissen metrischen Fundamentaltensoren auf den Vektorbündeln $\overset{i}{\circ}\, T$, wobei $\overset{i}{\circ}\, T$ das i-te symmetrische Produkt des Tangentialbündels T von $\mathfrak{Y}^m$ bedeutet. 1935 zeigte MAYER, daß diese Tensoren ein vollständiges Invariantensystem bilden. Er gab jedoch kein System von Integrabilitätsbedingungen an, das auch die lokale Existenz der Immersion gewährleistet. 1967 gab BOČEK [6] erstmals ein allerdings recht kompliziertes derartiges System an. In Fortführung dieser Arbeit zeigte KOWALSKI [7], daß man unter der Voraussetzung der Maximalität der Schmiegräume dieses System durch ein einziges System geometrischer Bedingungen, die verallgemeinerten Gaußschen Gleichungen, ersetzen kann. Kernstück der Arbeit ist ein Fortsetzungssatz, der zu einer gegebenen Sequenz von metrischen Fundamentaltensoren die Existenz und Eindeutigkeit eines „kanonischen" Zusammenhangs auf $T \oplus \overset{2}{\circ}\, T \oplus \cdots \oplus \overset{i}{\circ}\, T$ liefert. Der Idee KOWALSKIS folgend, beweisen wir einen Fortsetzungssatz für den allgemeinen Fall, also ohne die einschränkende Voraussetzung der Maximalität. Dieser Satz liefert dann das Immersionstheorem für stabile Immersionen.

1. Stabile Immersionen

Es sei $\iota\colon \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n$ eine Immersion der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}^m$ in die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}^n$. Mit $T(\mathfrak{X}^n)$, $T(\mathfrak{Y}^m)$, $P(\mathfrak{X}^n)$ bezeichnen wir das Tangentialbündel bzw. das Bündel der Orthorepers von $\mathfrak{X}^n$ bzw. $\mathfrak{Y}^m$. Weiterhin seien

$$p\colon E = \iota^* T(\mathfrak{X}^n) \to \mathfrak{Y}^m, \quad \pi\colon B(E) = \iota^* P(\mathfrak{X}^n) \to \mathfrak{Y}^m$$

die induzierten Bündel. Im folgenden Abschnitt geben wir das Verfahren an, wie man E in die Summe seiner „Schmiegräume" aufspaltet. Diese Aufspaltung findet man schon bei BLASCHKE und REICHARDT [5].
Unter einem *metrischen Vektorbündel* E über $\mathfrak{Y}^m$ verstehen wir ein Vektorbündel E über $\mathfrak{Y}^m$, versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ in den Fasern. $\langle\ ,\ \rangle$ ist dabei von der Klasse C^∞, d. h., für je zwei lokale C^∞-Schnitte $s, t\colon \mathfrak{Y}^m \to E$ ist $\langle s, t\rangle$ eine C^∞-Funktion.

Satz 1. *Es sei E ein metrisches Vektorbündel über $\mathfrak{Y}^m$ und τ eine Zusammenhangsform auf dem Bündel $B(E)$ der Orthorepers von E. E sei bereits Summe paarweise orthogonaler Unterräume*

$$E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k \oplus N^k \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

und es sei ein Vektorbündelmorphismus

$$P_{k+1}\colon T(\mathfrak{Y}) \otimes E^k \to N^k \qquad (E^0 = \mathfrak{R},\ N^0 = E)$$

gegeben. Ist P_{k+1} regulär, d. h., gilt $\dim \operatorname{Im} P_{k+1} = \text{const}$ *auf ganz $\mathfrak{Y}^m$, so spaltet E weiter auf in*

$$E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k \oplus E^{k+1} \oplus N^{k+1} \tag{1.1}$$

($E^{k+1} = \operatorname{Im} P_{k+1}$, *$N^{k+1}$ orthogonales Komplement), und τ induziert einen kanonischen Vektorbündelmorphismus*

$$P_{k+2}\colon T \otimes E^{k+1} \to N^{k+1}. \tag{1.2}$$

Beweis. Es sei $B^{k+1}(E)$ das Bündel der angepaßten Repere (bezüglich der Zerlegung $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^{k+1} \oplus N^{k+1}$) und $\chi_{k+1}\colon B^{k+1}(E) \to B(E)$ die kanonische Einbettung. Jedes $z \in B^{k+1}(E)$ definiert einen Isomorphismus

$$[z]\colon \mathfrak{R}^n \to p^{-1}(\pi(z)) \tag{1.3}$$

durch $(a_i) \in \mathfrak{R}^n \to a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$, wobei $z = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist. Die Zerlegung (1.1) liefert eine Projektionsabbildung

$$\mathrm{pr}_{k+1}\colon E \to N^{k+1}. \tag{1.4}$$

Es sei nun $z \in B^{k+1}(E)$, $X \in T_z B^{k+1}(E)$, $s \in E^{k+1} \subset E$. Wir definieren $P_{k+2}\colon I \otimes E^{k+1} \to N^{k+1}$ durch

$$P_{k+2}(\pi(X) \otimes s) = \mathrm{pr}_{k+1}[z]\bigl(\chi_{k+1}^{*}\tau(X)[z]^{-1}(s)\bigr). \tag{1.5}$$

Man überzeugt sich leicht, daß P_{k+2} wohldefiniert ist. Wir bemerken noch, daß P_{k+2} im allgemeinen nicht regulär ist, q.e.d.

Wir betrachten nun wieder den Fall $E = \iota^*(T(\mathfrak{X}^n))$. Auf $P(\mathfrak{X}^n)$ sei τ^c der Levi-Civita-Zusammenhang. Durch $\iota\colon B(E) \to P(\mathfrak{X}^n)$ wird auf $B(E)$ eine Zusammenhangsform $\tau = \iota^* \tau^c$ induziert.
Es sei $j\colon T(\mathfrak{Y}) \to E$ die kanonische Einbettung, und $P_1\colon T(\mathfrak{Y}) \otimes \mathfrak{R} \to E$ sei durch

$$P_1(X \otimes r) = r \cdot j(X)$$

definiert. P_1 ist regulär, da ι eine Immersion ist. Somit spaltet E auf in $E = E^1 \oplus N^1$ ($E^1 = \operatorname{Im} P$, $N^1 = \operatorname{Im} P_1^{\perp}$), und es gibt einen natürlichen Morphismus $P_2\colon T(\mathfrak{Y}) \otimes E^1 \to N^1$. Gilt nun $\dim \operatorname{Im} P_2 = \text{const}$ auf $\mathfrak{Y}^m$, so können wir wieder Satz 1 anwenden und erhalten $E = E^1 \oplus E^2 \oplus N^2$ und einen Morphismus $P_3\colon T(\mathfrak{Y}) \otimes E^2 \to N^2$ usw.

Definition. Eine Immersion $\iota\colon \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n$ heißt *l-stabil* ($l = 1, 2, \ldots$), falls das induzierte Bündel $E = \iota^*(T(\mathfrak{X}^n))$ im Sinne des obigen Verfahrens aufspaltet in $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^l \oplus N^l$, d. h. auf jedem Niveau k, $1 \leq k < l$, jeweils die im Sinne von Satz 1 induzierten Morphismen P_{k+1} regulär sind ($\dim \operatorname{Im} P_{k+1} = \text{const}$ auf $\mathfrak{Y}^m$).
ι heißt *stabil*, falls es ein $l \in \mathfrak{R}$ gibt, so daß ι l-stabil ist und $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^l$ gilt.

2. Stabile Immersionen in Räume konstanter Schnittkrümmung

Es sei $\mathfrak{X}^n(C)$ im weiteren immer eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung C. Es sei τ^c, ϑ^c der Levi-Civita-Zusammenhang bzw. die kanonische Form auf $P(\mathfrak{X}^n)$.
Es gelten die Strukturgleichungen

$$d\vartheta^c + \tau^c \wedge \vartheta^c = 0, \tag{2.1}$$

$$d\tau^c + \tau^c \wedge \tau^c = C \cdot \vartheta^c \wedge \vartheta^{ct} \tag{2.2}$$

(vgl. [3], S. 100).

Es sei $\iota\colon \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n(C)$ eine stabile Immersion und $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k$ die entsprechende Zerlegung für $E = \iota^*(T(\mathfrak{X}))$. Es sei $B^k(E)$ das Bündel angepaßter Orthorepers. Durch

$$\iota \circ \chi\colon B^k(E) \xrightarrow{\chi} B(E) \xrightarrow{\iota} P(\mathfrak{X}^n)$$

werden Formen $\tau_A = (\iota \circ \chi)^* \tau^c$, $\vartheta_A = (\iota \circ \chi)^* \vartheta^c$ auf $B^k(E)$ induziert. Aus formalen Gründen setzen wir noch $d_1 = m$ und

$$\vartheta_A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}d_1 \\ \}n-d_1 \end{matrix}.$$

Nach Konstruktion der Zerlegung folgt, daß τ_A (in Blockmatrixschreibweise) die Gestalt

$$\tau_A = \begin{array}{c} \begin{matrix} d_1 & \quad d_2 & \quad d_3 & \ldots & d_k \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \tau_1 & -\alpha_2^t & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \tau_2 & -\alpha_3^t & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & & \tau_k \end{bmatrix} \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \\ d_k \end{matrix} \end{array}$$

hat. (2.1) und (2.2) liefern, übertragen auf τ_A, ϑ_A, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} d\alpha_1 &= \qquad\qquad -\tau_1 \wedge \alpha_1, \\ d\alpha_2 &= -\alpha_2 \wedge \tau_1 - \tau_2 \wedge \alpha_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\alpha_k &= -\alpha_k \wedge \tau_{k-1} - \tau_k \wedge \alpha_k; \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_2 \wedge \alpha_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_k \wedge \alpha_{k-1} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} d\tau_1 &= -\tau_1 \wedge \tau_1 + \alpha_2^t \wedge \alpha_2 + C \cdot \alpha_1 \wedge \alpha_1^t, \\ d\tau_2 &= -\tau_2 \wedge \tau_2 + \alpha_3^t \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_2^t, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\tau_{k-1} &= -\tau_{k-1} \wedge \tau_{k-1} + \alpha_k^t \wedge \alpha_k + \alpha_{k-1} \wedge \alpha_{k-1}^t, \\ d\tau_k &= -\tau_k \wedge \tau_k \qquad\qquad\quad + \alpha_k \wedge \alpha_k^t. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Satz. *Für die Formen* $\alpha_i \wedge \alpha_i^t$ *und* $\alpha_i^t \wedge \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *gilt eine Bianchi-Identität*

$$D(\alpha_i \wedge \alpha_i^t) = 0, \tag{2.6}$$

$$D(\alpha_i^t \wedge \alpha_i) = 0, \tag{2.7}$$

wobei D *die absolute Differentiation des Zusammenhangs* τ_A *auf* $B^k(E)$ *ist.*

Beweis. $\alpha_i \wedge \alpha_i^t$ ist eine tensorielle 2-Form mit Werten im Vektorraum der Matrizen vom Typ (d_i, d_i) $(d_0 = 1)$. Diese Form ist vom Typ Ad. Es gilt

$$D(\alpha_i \wedge \alpha_i^t) = d(\alpha_i \wedge \alpha_i^t) + Ad_*(\tau_i) \wedge \alpha_i \wedge \alpha_i^t \tag{2.8}$$

mit

$$Ad_*(\tau_i) = \tau_i \wedge \alpha_i \wedge \alpha_i^t - \alpha_i \wedge \alpha_i^t \wedge \tau_i. \tag{2.9}$$

Aus (2.3) und wegen $\tau_i^t = -\tau_i$ folgt nun

$$\begin{aligned} &D(\alpha_i \wedge \alpha_i^t) \\ &= d(\alpha_i \wedge \alpha_i^t) + \tau_i \wedge \alpha_i \wedge \alpha_i^t - \alpha_i \wedge \alpha_i^t \wedge \tau_i \\ &= -\tau_i \wedge \alpha_i \wedge \alpha_i^t - \alpha_i \wedge \tau_{i-1} \wedge \alpha_i^t + \alpha_i \wedge \tau_{i-1} \wedge \alpha_i^t \\ &\quad + \alpha_i \wedge \alpha_i^t \wedge \tau_i + \tau_i \wedge \alpha_i \wedge \alpha_i^t - \alpha_i \wedge \alpha_i^t \wedge \tau_i = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Den Beweis einer (2.8) ähnlichen Gleichung findet man in [2], S. 146. Damit ist (2.6) bewiesen. Analog zeigt man, daß (2.7) gilt.

Wir definieren nun Multilinearformen α^i auf $B^k(E)$ durch

$$\begin{aligned} &\alpha^i = \alpha_i \circ \cdots \circ \alpha_1, \quad X_j \in T_z B^k(E), \\ &\alpha^i(X_i, \ldots, X_1) = \alpha_i(X_i) \circ \cdots \circ \alpha_1(X_1) \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit Werten in $\mathfrak{R}^{d_i}$. Die α^i sind tensoriell. Aus (2.4) folgt, daß α^i symmetrisch in allen Argumenten ist. Wir erhalten die zu α^i korrespondierenden Epimorphismen

$$P^i : \overset{i}{\circ}\, T(\mathfrak{Y}) \to E^i, \tag{2.12}$$

die mit den Abbildungen P_i (vgl. (1.13)) durch

$$P^i(X_1 \circ \cdots \circ X_i) = P_i\big(X_i \otimes P^{i-1}(X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1})\big) \tag{2.13}$$

zusammenhängen $(P^0 = 1)$.
Die Metrik auf E^i induziert durch (2.12) eine positiv-semidefinite Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_i$ auf $\overset{i}{\circ}\, T$, den *i-ten metrischen Tensor*. Es sei $S_i \subset \overset{i}{\circ}\, T$ der Kern von P^i. S_i ist gerade der singuläre Raum von $\langle\ ,\ \rangle_i$.

Der Morphismus

$$\hat{P}^i : \overset{i}{\circ}\, T/S_i \to E^i, \tag{2.14}$$

definiert durch $\hat{P}^i\big(\overline{X_1 \circ \cdots \circ X_i}\big) = P^i(X_1 \circ \cdots \circ X_i)$, ist eine Isometrie $\big(\overline{X_1 \circ \cdots \circ X_i}$ ist die Restklasse bezüglich der Faktorisierung nach $S_i\big)$. Aus (2.13) folgt

$$P_i(s_{i-1} \otimes X) = 0$$

für alle $s_{i-1} \in S_{i-1}$ und alle $X \in T(\mathfrak{Y})$, d. h., es gilt

$$T(\mathfrak{Y}) \circ S_{i-1} \subset S_i. \tag{2.15}$$

Wir haben natürliche Morphismen

$$Q_i\colon T \otimes \overset{i-1}{\circ}\, T/S_{i-1} \to \overset{i}{\circ}\, T/S_i \qquad (i = 2, \ldots, k), \tag{2.16}$$

die durch Vorgabe der S_i mit der Eigenschaft (2.15) in kanonischer Weise gegeben sind. Wir erhalten sie durch

$$Q_i(t \otimes \bar{t}_{i-1}) = \overline{t \circ t_{i-1}}, \quad \bar{t}_{i-1} \in \overset{i-1}{\circ}\, T/S_{i-1}$$

und setzen außerdem $Q_1(X \otimes s) = s \cdot X$.
Die Q_i sind Epimorphismen, und es gilt

$$\begin{aligned} &Q_{i+1}\big(X_1 \otimes Q_i(X_2 \otimes \overline{X_3 \circ \cdots \circ X_{i+1}})\big) \\ &= Q_{i+1}\big(X_i \otimes Q_i(X_{i+1} \otimes \overline{X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1}})\big). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} T \otimes \overset{i-1}{\circ}\, T/S_{i-1} & \xrightarrow{Q_i} & \overset{i}{\circ}\, T/S_i \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes \hat{p}^{i-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \hat{p}^i} \\ T \otimes E^{i-1} & \xrightarrow{P_i} & E^i \end{array} \tag{2.18}$$

denn es ist

$$\begin{aligned} &\hat{p}^i \circ Q_i(X_i \otimes \overline{X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1}}) = \hat{p}^i(\overline{X_1 \circ \cdots \circ X_i}) \\ &= P^i(X_1 \circ \cdots \circ X_i) = P_i\big(X_i \otimes P^{i-1}(X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1})\big) \\ &= P_i\big(X_i \otimes \hat{p}^{i-1}(\overline{X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1}})\big) \\ &= P_i \circ \big(\mathrm{id} \otimes \hat{p}^{i-1}(X_i \otimes \overline{X_1 \circ \cdots \circ X_{i-1}})\big). \end{aligned}$$

Wir betrachten das durch (2.14) induzierte metrische Vektorbündel

$$\bar{p}\colon T \oplus \overset{2}{\circ}\, T/S_2 \oplus \cdots \oplus \overset{k}{\circ}\, T/S_k \to \mathfrak{Y}^m \tag{2.19}$$

über $\mathfrak{Y}^m$ (die $\overset{i}{\circ}\, T/S_i$ sind paarweise orthogonal). Es sei $B(Y)$ das Bündel aller Orthorepers dieses Vektorbündels und $\bar{\pi}\colon B_k(\mathfrak{Y}) \to \mathfrak{Y}^m$ das Bündel der (2.19) angepaßten Orthorepers. (2.16) definiert auf $B_k(\mathfrak{Y})$ tensorielle 1-Formen q_i mit Werten in $\mathfrak{R}^{d_{i-1}} \otimes \mathfrak{R}^{d_i}$, die durch

$$[z] \cdot \big(q_i(X)\, [z]^{-1}(s)\big) = Q_i\big(\bar{\pi}(X) \otimes s\big)$$

eindeutig bestimmt sind, wobei

$$z \in B_k(\mathfrak{Y}),\; X \in T_z B_k(\mathfrak{Y}),\; s \in \overset{i-1}{\circ}\, T/S_{i-1}$$

und $[z]\colon \mathfrak{R}^n \to \bar{p}\big(\bar{\pi}(z)\big)$ wie in (1.3) definiert ist. Es sei

$$\hat{P}\colon B_k(\mathfrak{Y}) \to B^k(E)$$

der durch (2.14) induzierte Isomorphismus. Aus (2.18) folgt, daß $\hat{P}^*\alpha_i = q_i$ gilt. Der Einfachheit halber schreiben wir für $P^*\alpha_i$ und $P^*\tau_i$ ebenfalls α_i bzw. τ_i. Auf $B_k(\mathfrak{Y})$ gelten dann die Gleichungen (2.3), (2.4) und (2.5).

Wir haben bisher gezeigt, daß stabile Immersionen gewisse Hauptfaserbündel induzieren, auf denen ein Zusammenhang und eine kanonische Form definiert werden.

Im folgenden Abschnitt werden wir umgekehrt die Frage behandeln, wann zu einem gegebenen Hauptfaserbündel mit Zusammenhang und kanonischer Form eine Immersion existiert derart, daß das induzierte Bündel in kanonischer Weise dem vorgegebenen Bündel isomorph ist.

Im folgenden verstehen wir unter einem Faserisomorphismus einen Vektorbündelmorphismus, der eingeschränkt auf die Fasern ein Isomorphismus ist.

3. Abstrakte Immersionstheoreme

Theorem 1. *Es sei E ein metrisches Vektorbündel über der m-dimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}^m$. Ferner sei $B(E)$ das Bündel der Orthorepers von E. Auf $B(E)$ seien ein Zusammenhang τ und eine kanonische Form ϑ gegeben derart, daß* (1.1) *und* (1.2) *gelten. Es sei $\mathfrak{X}^n$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung C (n — Faserdimension von E) und τ^c, ϑ^c der Levi-Civita-Zusammenhang bzw. die kanonische Form auf $P(\mathfrak{X}^n)$. Dann gibt es genau einen Faserisomorphismus*

$$\begin{tikzcd} \Psi\colon B(E) \arrow[r] \arrow[d] & P(\mathfrak{X}^n) \arrow[d] \\ \mathfrak{Y}^m \arrow[r] & \mathfrak{X}^n \end{tikzcd}$$

derart, daß

(a) $\Psi(z) = z^c$,

wobei $z \in B(E)$, $z^c \in P(\mathfrak{X}^n)$ beliebig vorgegebene Repere sind, und

(b) $\tau = \Psi^*\tau^c$,

(c) $\vartheta = \Psi^*\vartheta^c$

gelten.

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{tikzcd} & B(E) \\ B(E) \times P(\mathfrak{X}^n) \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & P(\mathfrak{X}^n) \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen mit $O_0(n)$ die Zusammenhangskomponente der 1 der orthogonalen Gruppe $O(n)$.

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ linear unabhängigen Gleichungen

$$p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c = 0, \quad p_1^*\tau - p_2^*\tau^c = 0 \tag{3.1}$$

definieren eine $\left(m + \frac{n(n-1)}{2}\right)$-dimensionale Distribution. Wegen

$$\begin{aligned} d(p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c) &= p_1^* d\vartheta - p_2^* d\vartheta^c \\ &= p_1^*(-\tau \wedge \vartheta) + p_2^*(\tau^c \wedge \vartheta^c) \\ &= -p_1^*\tau \wedge p_1^*\vartheta + p_1^*\tau \wedge p_2^*\vartheta^c \\ &\quad - p_1^*\tau \wedge p_2^*\vartheta^c + p_2^*\tau^c \wedge p_2^*\vartheta^c \\ &= -p_1^*\tau \wedge (p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c) - (p_1^*\tau - p_2^*\tau^c) \wedge p_2^*\vartheta^c \\ &= -p_1^*\tau \wedge (p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c) - (p_2^*\vartheta^c)^t \wedge (p_1^*\tau - p_2^*\tau^c) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(p_1^*\tau - p_2^*\tau^c) &= p_1^* d\tau - p_2^* d\tau^c \\ &= p_1^*(-\tau \wedge \tau + C \cdot \vartheta \wedge \vartheta^t) + p_2^*(\tau^c \wedge \tau^c - C \cdot \vartheta^c \wedge \vartheta^{ct}) \\ &= -p_1^*\tau \wedge p_1^*\tau + p_1^*\tau \wedge p_2^*\tau^c - p_1^*\tau \wedge p_2^*\tau^c + p_2^*\tau^c \wedge p_2^*\tau^c \\ &\quad + C \cdot p_1^*\vartheta \wedge p_1^*\vartheta^t - C \cdot p_2^*\vartheta^c \wedge p_1^*\vartheta^t + C \cdot p_2^*\vartheta^c \wedge p_1^*\vartheta^t \\ &\quad - C \cdot p_2^*\vartheta^c \wedge p_2^*\vartheta^{ct} \\ &= -p_1^*\tau \wedge (p_1^*\tau - p_2^*\tau^c) + p_2^*\tau^c \wedge (p_1^*\tau - p_2^*\tau^c) \\ &\quad + C \cdot p_1^*\vartheta \wedge (p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c)^t + C \cdot p_2^*\vartheta^c \wedge (p_1^*\vartheta - p_2^*\vartheta^c)^t \end{aligned}$$

ist die Distribution involutiv, und es existiert nach dem Satz von Frobenius (vgl. etwa [2]) genau eine maximale Integralmannigfaltigkeit $\tilde{B}$ durch

$$(z, z^c) \in B(E) \times P(\mathfrak{X}^n).$$

Es sei $(z_1, z_1^c) \in \tilde{B}$, für $X \in T_{z_1, z_1^c}(B)$ gilt

$$\vartheta(p_{1*}(X)) = \vartheta^c(p_{2*}(X)), \quad \tau(p_{1*}(X)) = \tau^c(p_{2*}(X)).$$

Aus $p_{1*}(X) = 0$ folgt somit $p_{2*}(X) = 0$, also $X = 0$, d. h., $p_1|_{\tilde{B}}: \tilde{B} \to B(E)$ ist regulär. Analog gilt, daß $p_2|_{\tilde{B}}: \tilde{B} \to P(\mathfrak{X}^n)$ regulär ist.

Auf $\tilde{B}$ wird durch $p_1^*\vartheta \mid \tilde{B} = 0$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Distribution definiert. Wegen

$$dp_1^*\vartheta = -p_1^*\tau \wedge p_1^*\vartheta$$

ist sie involutiv. Die Integralmannigfaltigkeiten sind auch Integralmannigfaltigkeiten der Distribution, die durch

$$p_1^*\vartheta = 0, \quad p_2^*\vartheta^c = 0, \quad p_1^*\tau - p_2^*\tau^c = 0$$

auf $B(E) \times P(\mathfrak{X}^n)$ definiert wird. Das sind aber gerade die Orbits der Transformationsgruppe $[O_0(n), B(E) \times P(\mathfrak{X}^n)]$. Also operiert $O_0(n)$ auf $\tilde{B}$ frei, und $\tilde{B}$ ist Hauptfaserbündel über $\tilde{B}/O_0(n)$ mit der Strukturgruppe $O_0(n)$. $p_1: \tilde{B} \to B(E)$ ist eine Faserisomorphie; denn ein Orbit von $[O_0(n), \tilde{B}]$ ist ein Orbit von $[O_0(n), B(E) \times P(\mathfrak{X}^n)]$, und p_1 bildet diese isomorph auf die Orbits von $[O_0(n), B(E)]$ ab.
p_1 induziert damit eine Abbildung $\pi_1: \tilde{B}/O_0(n) \to \mathfrak{Y}^m$, die regulär ist, da p_1 regulär ist. Da $\mathfrak{Y}^m$ als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde und $\dim \tilde{B}/O_0(n) = m$ gilt, ist π_1 eine Diffeomorphie und p_1 eine Bündelisomorphie.

Analog zeigt man, daß

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} & \xrightarrow{p_2} & P(\mathfrak{X}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{B}/O_0(n) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{X}^n \end{array}$$

ein Faserisomorphismus ist. Wir definieren Ψ durch

$$\begin{array}{ccccc} \Psi\colon B(E) & \xrightarrow{p_1^{-1}} & \bar{B} & \xrightarrow{p_2} & P(\mathfrak{X}^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}^m & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & \bar{B}/O_0(n) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{X}^n \end{array} \tag{3.2}$$

Offensichtlich sind (a), (b) und (c) erfüllt. Die Eindeutigkeit von Ψ folgt daraus, daß die Integralmannigfaltigkeit $\bar{B}$ durch (z, z^c), τ, τ^c, ϑ, ϑ^c eindeutig bestimmt ist und daß für jede Faserisomorphie $B(E) \to P(\mathfrak{X}^n)$, die (a), (b) und (c) erfüllt, notwendig (3.2) gilt.

Theorem 2. *Es sei über der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Y}^m$ ein metrisches Vektorbündel $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k$ zusammen mit Epimorphismen $P_i\colon T(\mathfrak{Y}) \otimes E^{i-1} \to E^i$ $(E^0 = \mathfrak{R})$ gegeben, wobei P_1 außerdem noch injektiv sei. Ferner sei $B_k(E)$ das Bündel der angepaßten Orthorepers von E, und mit α_i bezeichnen wir die den Morphismen P_i entsprechenden tensoriellen 1-Formen auf $B_k(E)$. Es sei weiterhin $\tau_1 + \cdots + \tau_k$ eine Zusammenhangsform auf $B_k(E)$ derart, daß die Gleichungen (2.3), (2.4) und (2.5) erfüllt sind. X^n sei wie in Theorem 1 gegeben.*
Dann gibt es genau einen Faserisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \Psi\colon B(E) & \longrightarrow & P(\mathfrak{X}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}^m & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{X}^n \end{array}$$

derart, daß folgende Bedingungen gelten:
(a) $\Psi(z) = z^c$ *mit* $z \in B(E)$, $z^c \in P(\mathfrak{X}^n)$;
(b) ι *ist stabil, und die kanonische Reduktion ist gerade* $B_k(E)$;
(c) *die durch* ι *induzierten Projektionsoperatoren sind gerade die vorgegebenen Formen* α.

Beweis. Es sei d_i die Faserdimension von E_i. Durch

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & -{}^t\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \tau_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -{}^t\alpha_k \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \tau_k \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

werden auf $B_k(E)$ 1-Formen mit Werten in $\mathfrak{o}(n)$ bzw. $\mathfrak{R}^n$ definiert. Dabei ist die zweite Form tensoriell und vom Typ

$$\mathfrak{o}(d_1) \times \cdots \times \mathfrak{o}(d_k) \to \mathfrak{o}(n) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{R}^n) \quad (d_1 = m).$$

Die erste Form hat das Transformationsverhalten

$$l_g^* = Ad(g), \quad g \in \mathfrak{o}(d_1) \times \cdots \times \mathfrak{o}(d_k). \tag{3.3}$$

Auf $B(E)$ existiert genau eine Zusammenhangsform τ mit

$$\chi_k^* \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & -\alpha_2^t & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \tau_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha_t^k \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \tau_k \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

wobei $\chi_k \colon B_k(E) \to B(E)$ die kanonische Einbettung ist, und genau eine kanonische Form ϑ mit

$$\chi_k^* \vartheta = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Formen τ und ϑ ist leicht einzusehen, denn τ und ϑ sind wegen (3.4) und (3.5) zunächst auf $\operatorname{Im} \chi_{k*} \subset T(B(E))$ definiert. Die Bedingungen $\tau(V) = \overline{V}$ und $\vartheta(V) = 0$ (V vertikaler Vektor; $\overline{V} \in \mathfrak{o}(n)$) determinieren τ und ϑ auf $T(\operatorname{Im} \chi_k)$. Durch

$$l_g^* \tau = Ad(g) \circ \tau, \quad l_g^* \vartheta = g \cdot \vartheta, \qquad g \in O(n),$$

werden τ und ϑ auf ganz $B(E)$ fortgesetzt.

τ und ϑ besitzen die angegebenen Eigenschaften. Sie erfüllen außerdem die Voraussetzungen von Theorem 1, denn aus (2.3) bis (2.5) folgen (1.1) und (1.2). Nach Theorem 1 gibt es genau einen Faserisomorphismus

$$\Psi \colon B(E) \to P(\mathfrak{X}^n)$$

mit $\Psi(z) = z^c$, $\Psi^* \tau^c = \tau$ und $\Psi^* \vartheta^c = \vartheta$. Die Eigenschaften (a), (b) und (c) von Theorem 2 folgen hieraus unmittelbar.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Es sei $\Phi \colon B(E) \to P(\mathfrak{X}^n)$ ein weiterer Faserisomorphismus, der (a), (b), (c) von Theorem 2 erfüllt. Aus (b) und (c) folgt

$$\chi_k^* \Phi^* \vartheta^c = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

und somit $\Psi^*\vartheta^c = \Phi^*\vartheta^c$. Wir zeigen, daß $\Psi^*\tau^c = \Phi^*\tau^c$ gilt; dann folgt aus Theorem 1 $\Phi = \Psi$. Da τ durch die Formen α_i und τ_i auf $B_k(E)$ eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, daß die τ_i durch die Gleichungen (2.3) bis (2.5) und die α_i eindeutig bestimmt sind.
Wir betrachten die symmetrischen Formen α^l auf $B_k(E)$ (vgl. (2.11)). Mit ; bezeichnen wir das Skalarprodukt in $\mathfrak{R}^{d_l}$. Wir setzen noch aus formalen Gründen $\tau_0 = 0$, dann gilt für $X_i, Y_i, Z \in T(B_k(E))$

$$\begin{aligned}
&\alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) ; \tau_l(Z)\, \alpha^l(X_1, \dots, X_l)\\
&= \alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) ; \tau_l(Z)\, \alpha_l(X_1) \cdot \alpha^{l-1}(X_2, \dots, X_l)\\
&= \alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) ; [\tau_l(X_1)\, \alpha_l(Z) - \beta_l(X_1, Z)]\, \alpha^{l-1}(X_2, \dots, X_l)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(wobei $\beta_l = d\alpha_l + \alpha_l \wedge \tau_{l-1}$ gesetzt wird). Setzen wir noch

$$\begin{aligned}
&\gamma_l(Y_1, \dots, Y_l, X_1, \dots, X_l, Z)\\
&= \alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) ; \beta_l(X_1, Z)\, \alpha^{l-1}(X_2, \dots, X_l),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

so ergibt sich aus (3.6)

$$-\alpha^l(X_2, \dots, X_l, Z) ; \tau_l(X_1)\, \alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) - \gamma_l(Y_1, \dots, Y_l, X_1, \dots, X_l, Z).$$

Wenden wir diese Gleichung $(2l + 1)$-mal an, so erhalten wir

$$\alpha^l(Y_1, \dots, Y_l) ; 2\tau_l(Z)\, \alpha^l(X_1, \dots, X_l) = U_l(Y_1, \dots, Y_l, X_1, \dots, X_l, Z), \tag{3.8}$$

wobei

$$\begin{aligned}
U_l(Y_1, \dots, Y_l, X_1, \dots, X_l, Z) = {} & -\gamma_l(Y_1, \dots, Y_l, X_1, \dots, X_l, Z)\\
& + \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(X_{i+1}, \dots, X_l, Z, Y_1, \dots, Y_l, \dots, X_i)\\
& - \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(Y_{i+1}, \dots, Y_l, X_i, \dots, X_l, Z, Y_1, \dots, Y_i)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ist. U_l hängt nur von $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ und τ_{l-1} ab. α^l ist surjektiv und τ_l damit durch $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \tau_{l-1}$ eindeutig bestimmt. Durch Induktion erhält man die Eindeutigkeit der Formen $\tau_1, \dots, \tau_k$, und Theorem 2 ist bewiesen.

4. Ein Fortsetzungssatz

In Kapitel 2 haben wir gesehen, daß jede stabile Immersion $\iota: \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n$ eine Sequenz von metrischen Tensoren $\langle\ ,\ \rangle_i$ auf $\overset{i}{\circ}\, T$ induziert ($i = 1, \dots, k$). Wir haben dann mit $T \oplus \overset{2}{\circ}\, T/S_2 \oplus \dots \oplus \overset{k}{\circ}\, T/S_k$ ein metrisches Vektorraumbündel über $\mathfrak{Y}^m$ erhalten und, da die S_i (der singuläre Raum von $\langle\ ,\ \rangle_i$) die Eigenschaft (2.15) hatten, natürliche Morphismen Q_i (2.16) definiert. Auf dem Bündel $B_k(\mathfrak{Y})$ erhielten wir die zu Q_i korrespondierenden 1-Formen α_i, die (2.4) wegen (2.17) erfüllten. Der durch (2.14) induzierte Isomorphismus

$$\hat{P}: B_k(\mathfrak{Y}) \to B_k(E)$$

sicherte die Existenz eines Zusammenhanges $\tau_1 + \dots + \tau_k$ auf $B_k(\mathfrak{Y})$, der (2.3) und (2.5) erfüllt. Im Beweis von Theorem 2 haben wir gezeigt, daß aus (2.3) und (2.4) die Eindeutigkeit der τ_i bei Vorgabe der α_i folgt.

Wir untersuchen nun die Frage, welche Bedingungen eine Sequenz von metrischen Tensoren $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^k$ erfüllen muß, damit eine Zusammenhangsform $\tau_1 + \cdots + \tau_k$ auf $B_k(\mathfrak{Y})$) existiert, die (2.3) erfüllt.

Definition. Wir nennen eine Sequenz $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^k$ von metrischen Tensoren *zulässig*, wenn

(a) $\dim S_i = \text{const}$ auf $\mathfrak{Y}^m$ ist,

(b) $T \circ S_i \subset S_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, k-1)$ und $S_1 = 0$ gilt,

(c) es auf $B_k(\mathfrak{Y})$ eine Zusammenhangsform $\tau_1 + \cdots + \tau_k$ gibt, die (2.3) erfüllt.

Satz 1. *Es sei eine zulässige Sequenz* $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^{l-1}$ *von metrischen Tensoren gegeben, und* $\langle\ ,\ \rangle_l$ *sei ein metrischer Tensor, für den* $\dim S_l$ *konstant und* $T \circ S_{l-1} \subset S_l$ *gilt. Wir setzen noch voraus, daß* $\alpha_l^t \wedge \alpha_l$ *eine Bianchi-Identität erfüllt, d. h., es soll*

$$D(\alpha_l^t \wedge \alpha_l) = 0$$

gelten. Dann folgt

(a) $U_l(Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z) + U_l(X_l, \ldots, X_1, Y_l, \ldots, Y_1, Z) = 0$;

(b) U_l *ist symmetrisch in* Y_i *und ebenfalls in* X_i;

(c) U_l *ist tensoriell in* Y_i *und* X_i, *wobei* U_l *wie in* (3.9) *definiert ist.*

Den Beweis dieses Satzes findet man in [9].

Wir definieren zu festem $Z \in T_w B_l(\mathfrak{Y})$ eine 0-Form auf $\mathfrak{Y}^m$ mit Werten in $\left(\overset{l}{\otimes} T \otimes \overset{l}{\otimes} T\right)^*$ durch

$$\bar{U}_l(Z)(t_1 \otimes \cdots \otimes t_l \otimes s_1 \otimes \cdots \otimes s_l) = U_l(Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z);$$

dabei ist

$$Z,\ Y_i,\ X_i \in T_w B_l(\mathfrak{Y}),\quad w \in B_l(\mathfrak{Y}),$$

$$\pi(Y_i) = t_i,\quad \pi(X_i) = s_i,\quad t_i, s_i \in T(\mathfrak{Y}^m),\quad Y = \pi(w).$$

$\bar{U}_l$ ist linear in Z. $\bar{U}_l$ definiert durch Einschränkung eine Form W_l mit Werten in $\left(S_l \otimes \overset{l}{\circ} T\right)^*$. U_l ist tensoriell in Z. Denn ist $Z = V$ vertikal, dann ist

$$\begin{aligned} &U_l(Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, V) \\ &= -\alpha^l(Y_1, \ldots, Y_l) ; \beta_l(X_1, V)\, \alpha^{l-1}(X_2, \ldots, X_l) \\ &\quad - \alpha^l(X_1, \ldots, X_l) ; \beta_l(V, Y_l)\, \alpha^{l-1}(Y_1, \ldots, Y_{l-1}) \\ &= 2\alpha^l(Y_1, \ldots, Y_l) ; \bar{V}^l \cdot \alpha^l(X_1, \ldots, X_l), \end{aligned} \tag{4.1}$$

und wegen $P^l(S_l) = 0$ folgt die Behauptung.

Wir können somit jedem metrischen Tensor $\langle\ ,\ \rangle_l$, der die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, eine 1-Form W_l auf $\mathfrak{Y}^m$ mit Werten in $\left(S_l \otimes \overset{l}{\circ} T\right)^*$ zuordnen.

Satz 2 (Fortsetzungssatz). *Gegeben sei eine zulässige Sequenz* $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^{l-1}$ *von metrischen Tensoren, und* $\langle\ ,\ \rangle_l$ *sei ein metrischer Tensor mit*

(a) $\dim S_l$ *konstant auf* $\mathfrak{Y}^m$, $T \circ S_{l-1} \subset S_l$,

(b) $D(\alpha_l^t \wedge \alpha_l) = 0$,

(c) $W_l \equiv 0$.

Dann ist $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^l$ *auch eine zulässige Sequenz von metrischen Tensoren.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß eine Zusammenhangsform $\tau_1 + \cdots + \tau_l$ auf $B_l(\mathfrak{Y})$) existiert, die (2.3) erfüllt.
Wir definieren eine 1-Form τ_l auf $B_l(\mathfrak{Y})$) mit Werten in $\mathfrak{o}(d_l)$ durch

$$\alpha^l(Y_1, \ldots, Y_l)\,;\, \tau_l(Z)\, \alpha^l(X_1, \ldots, X_l)$$
$$= \frac{1}{2}\, U_l(Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z). \tag{4.2}$$

τ_l ist wegen (c) und da α^l surjektiv ist, wohldefiniert. Aus der Eigenschaft (a) von Satz 1 folgt, daß τ_l Werte in $\mathfrak{o}(d_l)$ hat. Aus der Definitionsgleichung (4.2) ersieht man, daß τ_l vom Typ Ad_l ist. Wegen (4.1) gilt

$$\tau_l(V) = \overline{V}^l \quad (V \text{ vertikal}).$$

$\tau_1 + \cdots + \tau_{l-1} + \tau_l$ ist somit eine Zusammenhangsform auf $B_l(\mathfrak{Y})$). (Wir haben hier wie schon an früherer Stelle die Formen $p_l^*\tau_1, \ldots, p_l^*\tau_{l-1}$, wobei $p_l\colon B_l(\mathfrak{Y})) \to B_{l-1}(\mathfrak{Y}))$ die kanonische Projektion ist, ebenfalls mit $\tau_1, \ldots, \tau_{l-1}$ bezeichnet.)
Es bleibt noch zu zeigen, daß

$$d\alpha_l + \alpha_l \wedge \tau_{l-1} + \tau_l \wedge \alpha_l = 0$$

gilt. Wegen $U_l(Y_1, \ldots, Y_l, Z, X_2, \ldots, X_l, X_1) = -U_l(X_2, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_l, X_1)$ gilt

$$\alpha^l(Y_1, \ldots, Y_l)\,;\,(d\alpha_l + \alpha_l \wedge \tau_l)\,(X_1, Z)\,\alpha^{l-1}(X_2, \ldots, X_l)$$
$$\begin{aligned}
&= \gamma_l(Y_1, \ldots, Z) + \frac{1}{2}\Bigg[-\gamma_l(Y_1, \ldots, Z) + \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(X_{i+1}, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_i) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(Y_{i+1}, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_i)\Bigg] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Bigg[-\gamma_l(X_2, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_l, X_1) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(Y_{i+1}, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_i) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{l} \gamma_l(X_{i+1}, \ldots, X_l, Z, Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_i) \\
&\qquad - \gamma_l(Y_1, \ldots, Y_l, X_1, \ldots, X_l, Z)\Bigg] = 0.
\end{aligned}$$

Da α^{l-1}, α^l surjektiv sind, ist der Satz bewiesen.

Theorem 3. *Es sei $\mathfrak{Y}^m$ eine m-dimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Es seien positiv semidefinite symmetrische Bilinearformen* $\langle\ ,\ \rangle_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *auf den Bündeln* $\overset{i}{\circ}\, T$ *mit folgenden Eigenschaften gegeben:*
(a) dim S_i *konstant auf* $\mathfrak{Y}^m$; $S_1 \equiv 0$; $T \circ S_i \subset S_{i+1}$;
(b) *auf* $B_l(\mathfrak{Y})$) *gelten sukzessiv die verallgemeinerten Gaußschen Gleichungen* (2.5);
(c) *für die* $\left(S_l \otimes \overset{l}{\circ}\, T\right)^*$*-wertigen* 1-*Formen* W_l *gilt sukzessiv* $W_l \equiv 0$.
Wir setzen $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$ (d_i Rang $\langle\ ,\ \rangle_i$), *und es sei* $\mathfrak{X}^n$ *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung* C.

Dann gibt es genau einen Faserisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \Psi: B(\mathfrak{Y}) & \longrightarrow & P(\mathfrak{X}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}^m & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{X}^n \end{array}$$

derart, daß

(a) $\Psi(z) = z^c$ *ist, wobei* $z \in B(\mathfrak{Y})$, $z^c \in P(\mathfrak{X}^n)$ *zwei beliebig vorgegebene Repere sind,*

(b) $\iota: \mathfrak{Y}^m \to \mathfrak{X}^n$ *stabil ist und die durch* ι *induzierten i-ten metrischen Tensoren gerade die vorgegebenen Tensoren* $\langle\ ,\ \rangle_i$ *sind.*

Insbesondere folgt, daß für verschiedene Paare (z_1, z_1^c), (z_2, z_2^c) *die Immersionen* ι_1, ι_2 *kongruent sind.*

Beweis. Aus der Voraussetzung (b)

$$d\tau_i = -\tau_i \wedge \tau_i + \alpha_{i+1}^t \wedge \alpha_{i+1} + \alpha_i \wedge \alpha_i^t$$

folgt nach einer kurzen Rechnung

$$d(\alpha_{i+1}^t \wedge \alpha_{i+1}) = (\alpha_{i+1}^t \wedge \alpha_{i+1}) \wedge \tau_i - \tau_i \wedge (\alpha_{i+1}^t \wedge \alpha_{i+1}).$$

Aus Kap. 4, Satz 2, und den Voraussetzungen (a) und (c) folgt mit dieser Gleichung durch Induktion, daß $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^k$ eine zulässige Sequenz ist. Für die Formen α_i und τ_i auf $B_k(\mathfrak{Y})$ sind damit die Voraussetzungen von Theorem 2 (Kap. 3) erfüllt, und es existiert ein Faserisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \Psi: B(\mathfrak{Y}) & \longrightarrow & P(\mathfrak{X}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{Y}^m & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{X}^n \end{array}$$

mit $\Psi(z) = z^c$, und $B_k(\mathfrak{Y})$ ist die kanonische Reduktion von $\big(B(\mathfrak{Y}), \Psi^*(\tau^c), \Psi^*(\vartheta^c)\big)$. Da die α_i gerade die Projektionsoperatoren sind, folgt, daß die durch ι induzierten i-ten metrischen Tensoren gerade die $\langle\ ,\ \rangle_i$ sind. Die Formen α_i auf $B_k(\mathfrak{Y})$ sind durch $\{\langle\ ,\ \rangle_i\}_1^k$ eindeutig determiniert, und die Eindeutigkeit von Ψ folgt aus Theorem 2 (Kap. 3).

Es seien ι_1, ι_2 die zu den Paaren (z_1, z_1^c), (z_2, z_2^c) gehörigen Immersionen. Wir wählen ein Element g aus der Isometriegruppe von $\mathfrak{X}^n$ so, daß $z_2^c = g \cdot \Psi_1(z_2)$ ist. Die Immersion $g \cdot \Psi_1$ induziert die gleichen i-ten metrischen Tensoren wie Ψ_1. Somit gilt $\Psi_2 = g \cdot \Psi_1$, und das Theorem ist bewiesen.

LITERATUR

[1] Kobayashi, S., and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol. I, II. Interscience Publishers, New York—London—Sydney 1963, 1968.

[2] Sulanke, R., und P. Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Birkhäuser Verlag, Basel—Stuttgart 1972.

[3] Bishop, R., and J. Crittenden: Geometry of Manifolds. Academic Press, New York 1964.

[4] Helgason, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York 1962.

[5] Blaschke, W., und H. Reichardt: Einführung in die Differentialgeometrie. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1960.

[6] BočEK, L.: Globaldifferentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten in E_n und S_n. Czechoslovak. Math. J. *17* (1967), 36–44.
[7] Kowalski, O.: Immersions of Riemannian manifolds with a given normal bundle structure. Czechoslovak. Math. J. *19* (1969), 676–696.
[8] Schouten, J. A., und D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Groningen—Batevia 1938.
[9] Reichert, J.: Immersionen in Räume konstanter Schnittkrümmung. Dissertation, Berlin 1976.

Manuskripteingang: 18. 10. 1977

VERFASSER:

Jürgen Reichert, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin