Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 7–11

Büschel in äquiaffinen Räumen

SIEGFRIED KLOTH

Für die äquiaffinen Räume, die etwa durch die Hilbertschen Inzidenzaxiome einschließlich des Parallelenaxioms in seiner schärferen Fassung (vgl. [3]), das Fano-Axiom und den affinen Satz von PAPPOS-PASCAL charakterisiert sind, wurde in [4] eine gruppentheoretische Charakterisierung durchgeführt. Man geht dabei von einer erzeugten Gruppe $[\mathfrak{G}, \mathfrak{S}]$ aus, wobei $\mathfrak{S}$ ein aus involutorischen Elementen bestehendes invariantes Erzeugendensystem der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Als Standardmodell dient für $\mathfrak{S}$ die Menge der Spiegelungen an Ebenen in der Richtung von Geraden und für $\mathfrak{G}$ die Gruppe der äquiaffinen Abbildungen des Raumes. Mit Hilfe einiger zusätzlicher Axiome für $[\mathfrak{G}, \mathfrak{S}]$ kann man die oben genannten Axiome für Punkte, Geraden, Ebenen und die Inzidenz und Parallelität herleiten, wobei diese Begriffe bzw. Relationen gruppentheoretisch eingeführt werden.

Ziel unserer Untersuchungen ist es, Teilmengen M von $\mathfrak{S}$ so zu bestimmen, daß in ihnen der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt, d. h., daß

$$\alpha, \beta, \gamma \in M \Rightarrow \alpha\beta\gamma \in M$$

gilt (vgl. [10]). Bezüglich der verwendeten Begriffe, Relationen und Bezeichnungen halten wir uns an [4].

Analog zu [9] betrachten wir für beliebige Elemente $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ die Mengen $M(\mathfrak{a}) = \{\xi\colon \xi \in \mathfrak{S}, \mathfrak{a}\xi \in \mathfrak{S}\}$ sowie die von ihnen erzeugten Untergruppen $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{G}$. Nach [9] gilt

(1) **Satz.** *Es gilt* $M(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ *genau dann, wenn es Erzeugende* α, β *mit* $\mathfrak{a} = \alpha\beta$ *gibt.*

Zusatz. Es gilt stets $\alpha, \beta \in M(\alpha\beta)$.

Folgerung. *Es gilt für* $\mathfrak{a} = \alpha\beta$ *stets* $M(\mathfrak{a}) = M(\mathfrak{a}^{-1})$.

(2) **Definition.** $M(\mathfrak{a})$ heißt *Büschel von Erzeugenden,* und wir bezeichnen $M(\mathfrak{a})$ mit $B(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn

a) $M(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$,

b) $\zeta, \eta, \vartheta \in M(\mathfrak{a}) \Rightarrow \zeta\eta\vartheta \in M(\mathfrak{a})$

gelten.

Nach [9] gelten die folgenden Sätze:

(3) **Satz.** *In* $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ *ist* $\mathfrak{d}(\mathfrak{a}) = \{\alpha\beta\colon \alpha, \beta \in B(\mathfrak{a})\}$ *kommutativer Normalteiler.*

(4) **Satz.** *Gilt* $\alpha\beta \in B(\mathfrak{a})$, $B(\mathfrak{b})$ *und ist* $M(\alpha\beta)$ *ein Büschel, dann gilt* $B(\mathfrak{a}) = B(\alpha\beta) = B(\mathfrak{b})$.

Von großem Interesse ist nun die Frage, welche $M(\alpha\beta)$ Büschel darstellen, d. h., welche Produkte $\alpha\beta$ Büschel erzeugen. Dabei sind die bereits in [4] erfolgreich verwendeten erzeugten Gruppen $[\mathfrak{G}(\varepsilon), \mathfrak{S}(\varepsilon)]$ sehr nützlich. $\mathfrak{S}(\varepsilon)$ ist die folgende Teilmenge von $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}(\varepsilon) = \{\alpha : \alpha\mathfrak{S}, \alpha \mid \varepsilon\}$.
$\mathfrak{G}(\varepsilon)$ ist die von $\mathfrak{S}(\varepsilon)$ erzeugte Gruppe.

(5) Satz. *Es sei Φ die folgende Abbildung: Jeder Erzeugenden $\alpha \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ ordnen wir die Schrägspiegelung an der Geraden $(\alpha) \cap (\varepsilon)$ in der Richtung der Geraden $h \subset (\varepsilon)$ zu, wobei h in der Richtung $[\alpha]$ der Ebenenspiegelung α liegt. Dann ist Φ ein Isomorphismus von $[\mathfrak{G}(\varepsilon), \mathfrak{S}(\varepsilon)]$ auf die von der Menge Γ_ε der Spiegelungen an Geraden in (ε) in Richtung von Geraden in (ε) erzeugten Gruppe $[G_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon]$. Insbesondere bleibt die Relation $\mid$ erhalten, d. h., für beliebige $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ mit $\alpha \mid \beta$ gilt $\Phi(\alpha) \mid \Phi(\beta)$.*

Folgerung. *Die Gruppen $[\mathfrak{G}(\varepsilon), \mathfrak{S}(\varepsilon)]$ sind isomorph zu Abbildungsgruppen äquiaffiner Ebenen.*

Beweis. Offenbar gibt es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ genau ein Bild in Γ_ε. Die Abbildung Φ ist auch umkehrbar, da zu einer Schrägspiegelung $\mathfrak{S}_g^h \in \Gamma_\varepsilon$ genau eine Ebenenspiegelung α mit der Spiegelungsebene (α) durch $g \parallel (\alpha)$ und $(\alpha) \in [\varepsilon]$ sowie $h \in [\alpha]$, also $\alpha \mid \varepsilon$, existiert. Offenbar ist $\Phi(\alpha)$ die auf (ε) eingeschränkte Abbildung $\alpha|_{(\varepsilon)}$. Damit gilt für $\mathfrak{a} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ und $\mathfrak{b} = \beta_1 \cdots \beta_m$ noch

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= \Phi(\alpha_1 \cdots \alpha_n\beta_1 \cdots \beta_m) = \Phi(\alpha_1) \cdots \Phi(\alpha_n)\,\Phi(\beta_1) \cdots \Phi(\beta_m)\\ &= \Phi(\alpha_1 \cdots \alpha_n)\,\Phi(\beta_1 \cdots \beta_m) = \Phi(\mathfrak{a})\,\Phi(\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

Schließlich folgt für $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ mit $\alpha = \mathfrak{S}^r_{(\alpha)}$, $\beta = \mathfrak{S}^s_{(\beta)}$ und deren Bilder $\Phi(\alpha) = \mathfrak{S}^h_g$, $\Phi(\beta) = \mathfrak{S}^j_i$ aus $\alpha \mid \beta$ noch $r \parallel (\beta)$, (ε) und $s \parallel (\alpha)$, (ε), d. h. $r \parallel (\beta) \cap (\varepsilon) = i$ und $s \parallel (\alpha) \cap (\varepsilon) = g$ sowie $r \parallel h$ und $i \parallel j$, woraus wir $\mathfrak{S}^h_g \mid \mathfrak{S}^j_i$, also $\Phi(\alpha) \mid \Phi(\beta)$ erhalten.

Zum Beweis der Folgerung bemerken wir, daß die Gruppe $[G_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon]$ Abbildungsgruppe der äquiaffinen Ebene mit dem Träger (ε) ist. ∎

Nach (10.23) in [4] sind die Gruppen $[\mathfrak{G}(\varepsilon), \mathfrak{S}(\varepsilon)]$ Abbildungsgruppen äquiaffiner Ebenen. Die äquiaffinen Ebenen wurden von Klotzek in [8] gruppentheoretisch charakterisiert. Wir können also sämtliche Ergebnisse, die in [8] und auch in [9] für die Abbildungsgruppen $[G, \Gamma]$ äquiaffiner Ebenen erzielt wurden, für die Gruppen $[\mathfrak{G}(\varepsilon), \mathfrak{S}(\varepsilon)]$ verwenden.
Nach (5) werden wir uns für solche Mengen $M(\alpha\beta)$ interessieren, für die es zu α, β ein ε mit $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ gibt, und für solche, für die es zu α, β kein ε mit $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ gibt. Wir betrachten zunächst solche $M(\alpha\beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}(\varepsilon)$ und stützen uns auf die Ergebnisse von [9].

(6) Definition. Es sei $B(\mathfrak{a})$ ein Büschel von $\mathfrak{G}(\varepsilon)$. Die Ebene (ε) und die zu ihr parallelen Ebenen sind Fixebenen von $\mathfrak{a}$. Diese schließen wir bei unseren folgenden Betrachtungen aus. Wir führen mit p als Anzahl der Geraden, die punktweise fest bleiben, und q als Anzahl der Fixebenen von $\mathfrak{a}$, die nicht zu (ε) parallel sind, folgende Bezeichnungen ein (vgl. [9]):

p	q	Bezeichnung des Büschels
1	0	*elliptisches Büschel*
1	1	*parabolisches Büschel 1. Art*
1	2	*hyperbolisches Büschel*
0	0	*parabolisches Büschel 2. Art*
0	$\geqq 3$	*parabolisches Büschel 3. Art*

(7) Satz. *Die obige Definition stellt eine erschöpfende Klassifikation der Büschel von* $\mathfrak{G}(\varepsilon)$ *dar.*

Beweis. Der Satz folgt nach (5) unmittelbar aus (1.14) in [9]. ∎

Wir untersuchen nun den Fall, daß es zu α, β kein ε mit $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ gibt.

(8) Hilfssatz. *Zu* α, β *gibt es genau dann kein* ε *mit* $\alpha, \beta \mid \varepsilon$, *wenn* (α) *nicht parallel zu* (β) *ist,* $[\alpha] \neq [\beta]$ *gilt und eine Ebene* (ϑ) *mit* $(\alpha) \cap (\beta) \subset (\vartheta)$ *existiert, die Geraden aus* $[\alpha]$ *und aus* $[\beta]$ *enthält.*

Zusatz. a) $\alpha\beta$ induziert in (ϑ) eine Scherung.

b) $\alpha\beta$ induziert in jeder Ebene $(\vartheta') \parallel (\vartheta)$ mit $(\vartheta') \neq (\vartheta)$ ein Produkt von zwei Schrägspiegelungen an Geraden, das ein parabolisches Büschel 2. Art im Sinne von [9] erzeugt.

Beweis. 1. Zu α, β gebe es kein ε mit $\alpha, \beta \mid \varepsilon$. Dann kann weder $(\alpha) \parallel (\beta)$ noch $[\alpha] = [\beta]$ gelten, da man in beiden Fällen eine gemeinsame Konjugierte von α, β angeben kann. Für eine gemeinsame Konjugierte ε von α, β müßten einerseits Geraden von $[\alpha], [\beta]$ in (ε) liegen, andererseits folgte aus $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ noch $(\alpha) \cap (\beta) \in [\varepsilon]$. Wegen $[\alpha] \neq [\beta]$ ist (ε) bis auf Parallelität eindeutig bestimmt. Es gehe (ε) durch einen Punkt von $(\alpha) \cap (\beta)$. Dann kann $(\alpha) \cap (\beta) \notin [\varepsilon]$ nur bei $(\alpha) \cap (\beta) \subset (\varepsilon)$ für ein (ε), das Geraden aus $[\alpha], [\beta]$ enthält, erfüllt sein.

2. Es gelte weder $(\alpha) = (\beta)$ noch $[\alpha] = [\beta]$. Ferner gebe es eine Ebene (ϑ), die Geraden aus $[\alpha], [\beta]$ enthält. Für eine gemeinsame Konjugierte ε von α, β müßte $(\vartheta) = (\varepsilon)$ gelten. Außerdem müßte (ε) Geraden von $[\alpha]$ und $[\beta]$ enthalten. Beide Bedingungen führen zum Widerspruch.

Zum Beweis des Zusatzes bemerken wir, daß α, β in (ϑ) Geradenspiegelungen mit gemeinsamer Achse und verschiedenen Spiegelungsrichtungen induzieren, $\alpha\beta$ also Scherung ist. In jeder Ebene (ϑ') mit $(\vartheta') \parallel (\vartheta) \neq (\vartheta')$ induzieren α, β Geradenspiegelungen mit punktfremden Achsen und verschiedenen Spiegelungsrichtungen, $\alpha\beta$ erzeugt also in (ϑ') ein parabolisches Büschel 2. Art (vgl. (1.9) in [9]). ∎

(9) Satz. *Es seien* α, β *Erzeugende mit* $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ *für kein* ε *und* (ϑ) *eine Ebene mit* $(\alpha) \cap (\beta) \subset (\vartheta)$, *die Geraden von* $[\alpha]$ *und* $[\beta]$ *enthält. Ferner sei ein Koordinatensystem so gewählt, daß die x,y-Ebene mit der Ebene* (ϑ), *die x,z-Ebene mit der Ebene* (α) *zusammenfällt und bezüglich des Koordinatenkörpers K*

$$\alpha : x \to x', y \to y' = -y$$

gilt sowie eine Erzeugende ξ *Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung* $vy + wz = 0$ $(v \neq 0)$ *in der Richtung von* $(-v', u', 0, 0)$ *ist. Dann bestimmt* $\alpha\beta$ *eindeutig eine bilineare Form mit* $k \neq 0$ *derart, daß*

$$\alpha\beta\xi \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow wu' + kvv' = 0$$

gilt.

Zusatz. Ist β Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung $-y + bz = 0$ in der Richtung von $(1, s, 0, 0)$, dann gilt $k = -bs$.

Folgerung. *Ist* γ *Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung* $-y + cz = 0$ *in der Richtung von* $(1, t, 0, 0)$ *mit* $-ct = k$, *dann gilt* $M(\alpha\beta) = M(\alpha\gamma)$; *unter den Voraussetzungen* $\gamma, \delta \in M(\alpha\beta)$ *und* $\gamma \neq \delta$ *gilt sogar* $M(\alpha\beta) = M(\gamma\delta)$. *Die zu* (ϑ) *parallelen Ebenen sind die einzigen Fixebenen.* $M(\alpha\beta)$ *ist Büschel.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen über das Koordinatensystem liegt die z-Achse in der Ebene (α). Wir untersuchen die von α, β, ξ in der zur Ebene (ϑ) parallelen Ebene (ϑ') mit der Gleichung $z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$ induzierten Geradenspiegelungen. In (ϑ') wählen wir als $\bar{x}$-Achse die Gerade $(\alpha) \cap (\vartheta')$ und als $\bar{y}$-Achse eine Parallele zur y-Achse. Die von β in (ϑ') induzierte Abbildung ist dann die Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $-\bar{y} + bz_0 = 0$ in der Richtung der Geraden mit der Gleichung $s\bar{x} - \bar{y} = 0$. Die von ξ in (ϑ') induzierte Abbildung ist Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $v\bar{y} + wz = 0$ in Richtung der Geraden mit der Gleichung $u'\bar{x} + v'\bar{y} = 0$. Nach (1.9) in [9] muß für u', v' die Beziehung

$$wz_0u' + kvv' = 0 \quad \text{mit} \quad k = -bz_0s$$

erfüllt sein, falls das Produkt der von α, β, ξ in (ϑ') induzierten Geradenspiegelungen wieder eine Geradenspiegelung von (ϑ') sein soll. Durch Einsetzen von k erhalten wir

$$wz_0u' - bz_0svv' = 0,$$

woraus wegen $z_0 \neq 0$ noch

$$wu' - bsvv' = 0$$

folgt. Die Spiegelungsrichtung von ξ ist also von z_0 und damit von der speziellen Wahl der Parallelebene (ϑ') zu (ϑ) unabhängig.
In der Ebene (ϑ) werden durch α, β, ξ Geradenspiegelungen mit gleicher Achse induziert, solche Produkte von drei Schrägspiegelungen an Geraden sind nach (7.3) in [8] stets Geradenspiegelungen. Die weiteren Behauptungen folgen aus (1.9) in [9]. ▮

(10) **Satz.** *Es seien α, β Erzeugende mit $\alpha, \beta \mid \varepsilon$ für kein ε und (ϑ) die Ebene durch $(\alpha) \cap (\beta)$, die Geraden von $[\alpha]$ und $[\beta]$ enthält. Dann gibt es keine Erzeugende ξ mit $(\xi) = (\vartheta)$ derart, daß $\alpha\beta\xi$ eine Erzeugende ist.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\xi \in \mathfrak{S}$ derart, daß $\alpha\beta\xi = \zeta \in \mathfrak{S}$ gilt. Dann ist (ϑ) bei $\alpha\beta\xi$ eine Fixebene, also auch bei ζ.

Fall 1: $(\vartheta) = (\zeta)$. Dann bleibt (ϑ) bei ζ punktweise fest. Das ist jedoch bei $\alpha\beta\xi$ nicht der Fall im Widerspruch zu $\alpha\beta\xi = \zeta$.

Fall 2: (ϑ) enthält ein Element von $[\zeta]$. Dann gilt nicht $(\vartheta) \parallel (\zeta)$. Ferner gilt $(\alpha) \cap (\beta) \subset (\zeta)$. Aus $\alpha\beta\xi = \zeta$ folgt $\zeta\alpha\beta = \xi$. $\zeta\alpha\beta$ ist aber Element des Büschels nach (9) und (1). Nach (9) ist aber $\zeta\alpha\beta$ wegen $(\zeta), (\alpha), (\beta) \nparallel (\vartheta)$ keine Spiegelung an einer Ebene, die parallel zu (ϑ) ist. ▮

(11) **Bemerkung.** Für die in (9) untersuchten Büschel $M(\alpha\beta)$, die von Erzeugenden α, β bestimmt werden, zu denen es keine gemeinsame Konjugierte ε gibt, spielen die Ebenen (ϑ) und deren Parallelen eine ähnliche Rolle wie die Ebenen (ε) und deren Parallelebenen (ε') für die Büschel aus $\mathfrak{G}(\varepsilon)$. Sie sind Fixebenen von $\alpha\beta$, und in ihnen werden durch die Büschel von Ebenenspiegelungen Büschel von Geradenspiegelungen induziert. Sie sind demnach ebenso „ebene Büschel" wie die Büschel aus $\mathfrak{G}(\varepsilon)$ in dem Sinne, daß sie sich auf die Büschel in äquiaffinen Ebenen zurückführen lassen.

(12) **Hauptsatz.** *$M(\alpha\beta)$ ist für beliebige Erzeugende $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$ genau dann ein Büschel, wenn $\alpha\beta$ weder Geradenspiegelung noch Scherung ist.*

Beweis. Der Satz ist eine Folge von (8) und (9). ▮

(13) Definition. Es sei $B(\mathfrak{a}) = B(\alpha\beta)$ ein Büschel. Weiter sei p die Anzahl der punktweise fest bleibenden Geraden und q die Anzahl der Fixebenen (φ) derart, daß es kein (φ') mit $(\varphi) = (\varphi')$ und $\varphi' \mid \alpha, \beta$ gibt. Mit p und q führen wir folgende Bezeichnungen ein:

p	q	Bezeichnung von $B(\mathfrak{a})$
1	0	*elliptisches Büschel*
1	1	*parabolisches Büschel 1. Art*
1	2	*hyperbolisches Büschel*
1	$\geqq 3$	*parabolisches Büschel 4. Art*
0	0	*parabolisches Büschel 2. Art*
0	$\geqq 3$	*parabolisches Büschel 3. Art*

(14) Satz. *Die obige Definition stellt eine erschöpfende Klassifikation der Büschel dar.*

Beweis. Der Satz folgt aus (7), (8) und (9). ∎

LITERATUR

[1] Ahrens, J.: Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Z. *71* (1959), 154–185.

[2] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1973.

[3] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 12. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1977.

[4] Kloth, S.: Räumliche äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Math. Nachr. *57* (1973), 87–126.

[5] Kloth, S.: Über involutorische Produkte dreier Involutorischer. Wiss. Z. PH Potsdam *16*, H. 1 (1972), 219–225.

[6] Klotzek, B.: Äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Dissertation, Potsdam 1965.

[7] Klotzek, B.: Die affinen Räume einer Dimension $\geqq 3$ mit Fano-Axiom im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Nachr. *50* (1971), 245–303.

[8] Klotzek, B.: Ebene affine Spiegelungsgeometrie. Math. Nachr. *55* (1973), 89–131.

[9] Klotzek, B., und E. Quaisser: Büschel, Unterstrukturen und Orthogonalitätsrelationen in äquiaffinen Ebenen. Math. Nachr. *58* (1973), 337–371.

[10] Lingenberg, R.: Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt I–IV. Math. Ann. *137* (1959), 26–41; *142* (1961), 184–224; *158* (1965), 297–325.

Manuskripteingang: 10. 10. 1977

VERFASSER:

Siegfried Kloth, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Köthen