Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 145–148

Zur Rolle von Subtraktionssatz und Divisionssatz in Zerlegungsstrukturen

Eike Hertel und Hans E. Debrunner

In der Arbeit [1] wurde gezeigt, daß die Gleichwertigkeit von Ergänzungs- und Zerlegungsgleichheit euklidischer Polyeder durch Abbildungen in beliebige abelsche Gruppen charakterisiert werden kann. Diese Charakterisierung soll hier modifiziert werden durch ausschließliche Inanspruchnahme rationalwertiger Funktionale. Da die Methode weitgehend algebraisch-formal ist, kann sie auch auf Zerlegungsgleichheit wesentlich allgemeinerer Mengen als euklidisch-polyedrischer angewandt werden; zur Grundlage wird deshalb der Begriff der Zerlegungsstruktur genommen (vgl. [2]).
Dieser Begriff wird eingeführt mit folgender

Definition 1. $(P, +, \sim)$ heißt *Zerlegungsstruktur*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(I) P ist nichtleere Menge mit der partiellen binären Operation $+$.

(II) $\sim$ ist Äquivalenzrelation in P.

(III) Zu $a, b \in P$ existiert stets ein $b' \in P$ mit $b \sim b'$, so daß $a + b'$ erklärt ist.

In „geometrischen" Zerlegungsstrukturen ist P ein System von Teilmengen eines Raumes R, die Operation $+$ ist die Vereinigung disjunkter (oder kerndisjunkter) Mengen aus P, und die Relation $\sim$ ist „Kongruenz" bezüglich einer auf R wirkenden Transformationsgruppe. Ist dabei die Forderung (III) nicht von vornherein erfüllt, so läßt sie sich nach einem von W. Nef ([3], S. 223) angegebenen Verfahren doch nach geeigneter formaler Erweiterung des Systems erzwingen. Im allgemeinen bleibt jedoch die Relation $\sim$ mit der Operation $+$ unverträglich, so daß sie zu einer Zerlegungsgleichheitsrelation abgeschwächt werden muß, die erklärt wird durch folgende

Definition 2.

i) Zwei Elemente a und b aus P heißen *allgemein-zerlegungsgleich* $\left(a \overset{a}{-} b\right)$, wenn es Darstellungen $a = [a_1 + \cdots + a_n]$ und $b = [b_1 + \cdots + b_n]$ und eine geeignete Permutation π der Zahlen $1, \ldots, n$ gibt, so daß $a_i \sim b_{\pi(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

ii) a und b heißen *zerlegungsgleich* $\left(a \overset{z}{-} b\right)$, wenn es eine endliche Folge $c_1, \ldots, c_k$ von Elementen aus P gibt mit

$$a \overset{a}{-} c_1, \quad c_1 \overset{a}{-} c_2, \ldots, c_{k-1} \overset{a}{-} c_k \quad \text{und} \quad c_k \overset{a}{-} b.$$

Die symbolische Anschrift $[a_1 + \cdots + a_n]$ bedeutet, daß sich die Summenbildung auf irgendeine Klammerung bezieht, die für die entsprechenden Darstellungen von a und b auch jeweils verschieden sein können. In den speziell interessierenden geometrischen Zerlegungsstrukturen ist die Operation $+$ zusätzlich assoziativ und kommutativ und die Relation $\overset{a}{-}$ transitiv, so daß dann beide Zerlegungsrelationen der Definition 2 zusammenfallen. Von dem hier eingenommenen abstrakten Standpunkt aus besitzt jedoch lediglich die Zerlegungsgleichheit $\overset{z}{-}$ die gewünschten formalen Eigenschaften, die zusammengefaßt werden in

Aussage 1. *Die Zerlegungsgleichheit* $\overset{z}{-}$ *ist eine Äquivalenzrelation in* P, *und es gilt der Additionssatz:*

Wenn $a_1 + a_2$ *und* $b_1 + b_2$ *erklärt sind, folgt aus* $a_1 \overset{z}{-} b_1$ *und* $a_2 \overset{z}{-} b_2$ *auch* $a_1 + a_2 \overset{z}{-} b_1 + b_2$.

Dies wurde in [2] bewiesen, wo die Relation $\overset{z}{-}$ *Mehrfachzerlegungsgleichheit* heißt.

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $a \in P$ bezüglich $\overset{z}{-}$ mit $\bar{a}$ und bilden mit diesen Klassen als Elementen die Quotientenstruktur $(\bar{P}, +)$ mit $\bar{P} = P/\overset{z}{-}$; für sie ergibt sich (vgl. [2], Hilfssatz 3)

Aussage 2. $(\bar{P}, +)$ *ist eine kommutative Halbgruppe.*

Gilt nun, wie in vielen geometrischen Zerlegungsstrukturen, in P der *Subtraktionssatz*

$$a_1 + a_2 \overset{z}{-} b_1 + b_2 \;\&\; a_2 \overset{z}{-} b_2 \Rightarrow a_1 \overset{z}{-} b_1, \tag{S}$$

so kann die Halbgruppe $(\bar{P}, +)$ in bekannter Weise in eine abelsche Gruppe $(\mathfrak{P}, +)$ eingebettet werden: Man bildet in $\bar{P} \times \bar{P}$ die Relation

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \simeq (\bar{a}_2, \bar{b}_2) :\Leftrightarrow \bar{a}_1 + \bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \bar{b}_1 \text{ in } \bar{P},$$

die sich als Kongruenzrelation erweist; die Faktorstruktur $(\mathfrak{P}, +)$ mit den Klassen $(\bar{a}, \bar{b})^{\simeq}$ bezüglich $\simeq$ als Elementen, $\mathfrak{P} = \bar{P} \times \bar{P}/\simeq$, wird eine abelsche Gruppe (vgl. [1], S. 85) mit $(\bar{c}, \bar{c})^{\simeq}$ als (von der Wahl von $c \in P$ unabhängigem) Neutralelement und mit $(\bar{b}, \bar{a})^{\simeq}$ als Inversem zu $(\bar{a}, \bar{b})^{\simeq}$. Insbesondere liefert

$$\bar{a} \overset{\varepsilon}{\mapsto} (\bar{a} + \bar{b}, \bar{b})^{\simeq}$$

die von der Wahl von $b \in P$ unabhängige Einbettung ε von $(\bar{P}, +)$ in $(\mathfrak{P}, +)$.
Für die Zerlegungsstruktur $(P, +, \sim)$ nennen wir eine Abbildung Φ von P in eine abelsche Gruppe $(A, +)$ ein A-wertiges *invariantes, additives Funktional,* wenn

(i) $\quad a \sim b \Rightarrow \Phi(a) = \Phi(b)$

und

(ii) $\quad \Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$

gilt.
Gerade die durch die Einbettung $\varepsilon\colon \bar{P} \to \mathfrak{P}$ bestimmte Abbildung

$$a \mapsto \bar{a} \overset{\varepsilon}{\mapsto} (\bar{a} + \bar{b}, \bar{b})^{\simeq}$$

von P in die abelsche Gruppe $\mathfrak{P}$ hat in [1] den Schlüssel dafür geliefert, daß die Gültigkeit des Subtraktionssatzes (S) gleichwertig ist mit der Aussage, Zerlegungsgleichheit in P sei gleichwertig mit Wertegleichheit für alle gruppenwertigen invarianten, additiven Funktionale auf P.

Zur Verschärfung dieser Aussage wird zunächst in P eine Vervielfachung mit natürlichen Zahlen erklärt:

$$1 \cdot a := a; \quad k \cdot a := (k-1) \cdot a + a' \quad \text{für} \quad k > 1$$

mit $a' \sim a$ derart, daß $(k-1) \cdot a + a'$ erklärt ist. Diese Vervielfachung ist für $k > 1$ nicht eindeutig, ist aber wohldefiniert und eindeutig beim Übergang in die Halbgruppe $(\bar{P}, +)$ der Klassen bezüglich $\overset{z}{-}$:

$$k \cdot \bar{a} := \overline{k \cdot a} = \underbrace{\bar{a} + \cdots + \bar{a}}_{k\text{-mal}}.$$

In der geometrisch motivierten Zerlegungstheorie ist eng mit dem Subtraktionssatz verknüpft die Frage nach der Gültigkeit von folgendem *Divisionssatz:*

(D) *Für alle natürlichen Zahlen k und alle $a, b \in P$ folgt aus $k \cdot a \overset{z}{-} k \cdot b$ auch $a \overset{z}{-} b$.*

Unser Ziel ist der Nachweis von folgendem

Satz. *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(A) *In $(P, +, \sim)$ gelten der Subtraktionssatz* (S) *und der Divisionssatz* (D).

(B) *Gilt $F(a) = F(b)$ für jedes $\mathbb{Q}$-wertige invariante additive Funktional auf $(P, +, \sim)$, so ist $a \overset{z}{-} b$.*

Der Beweis beruht im wesentlichen auf folgendem

Lemma. *Zu jeder torsionsfreien abelschen Gruppe $(G, +)$ existiert eine Klasse $\mathfrak{F}$ homomorpher Abbildungen f von $(G, +)$ in $(\mathbb{Q}, +)$, so daß für beliebige $x, y \in G$ folgendes gilt:*

Aus $f(x) = f(y)$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ folgt $x = y$.

Beweis. In der abelschen Gruppe $(G, +)$ sei die übliche Multiplikation mit ganzen Zahlen erklärt. In der Menge $\mathbb{Q} \times G$ läßt sich dann folgende Relation einführen:

$$\left(\frac{p}{q}, x\right) \approx \left(\frac{r}{s}, y\right) :\Leftrightarrow (ps) \cdot x = (rq) \cdot y,$$

wobei p, q, r, s ganze Zahlen mit $q \neq 0 \neq s$ sind. Diese Relation erweist sich wegen der Torsionsfreiheit von G als Äquivalenzrelation in $\mathbb{Q} \times G$, so daß jetzt die Menge $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q} \times G)/\approx$ der Äquivalenzklassen ins Auge gefaßt werden kann. Mit dem Symbol $[\varrho, x]$ werde die Klasse aus $\mathfrak{B}$ bezeichnet, die das Paar $(\varrho, x) \in \mathbb{Q} \times G$ enthält. In $\mathfrak{B}$ wird eine Addition erklärt durch

$$\left[\frac{p}{q}, x\right] + \left[\frac{r}{s}, y\right] := \left[\frac{1}{qs}, ps \cdot x + qr \cdot y\right].$$

Diese Definition ist repräsentantenunabhängig, und die erklärte Addition ist assoziativ und kommutativ. Ist z_0 das Nullelement in G und wird die Äquivalenz $(0, x) \approx (\varrho, z_0)$ berücksichtigt, so erweist sich $[0, x] = [\varrho, z_0]$ als Nullelement in $\mathfrak{B}$ für beliebiges $x \in G$ bzw. $\varrho \in \mathbb{Q}$. Mit der Festlegung $-[\varrho, x] := [\varrho, -x]$ wird demnach $(\mathfrak{B}, +)$ eine abelsche Gruppe.

Schließlich wird durch

$$\alpha \cdot [\beta, x] := [\alpha\beta, x]$$

eine Multiplikation der Elemente aus $\mathfrak{B}$ mit rationalen Zahlen erklärt. Diese Operation ist wegen der Torsionsfreiheit von G wiederum repräsentantenunabhängig, und sie erfüllt die Axiome des linearen Raumes, so daß sich also insgesamt $\mathfrak{B}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ darstellt. Dann existiert eine Hamelsche Basis $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_\tau : \tau \in T\} \subseteq \mathfrak{B}$, so daß es zu jedem $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ eine bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutige Darstellung

$$\mathfrak{a} = \sum_{\tau \in T} p_\tau(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}_\tau$$

gibt. Dabei sind die Koeffizienten $p_\tau(\mathfrak{a})$ eindeutig durch $\mathfrak{a}$ bestimmte rationale Zahlen, die aber nur für endlich viele Indizes τ von Null verschieden sind. Mit dem Ansatz

$$f_\tau(x) := p_\tau([1, x])$$

ist jedem Index $\tau \in T$ eine homomorphe Abbildung f_τ von $(G, +)$ in $(\mathbb{Q}, +)$ zugeordnet, und es folgt wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung aus $f_\tau(x) = f_\tau(y)$ für alle $\tau \in T$ auch $[1, x] = [1, y]$ bzw. $x = y$, womit das Lemma bewiesen ist.

Wir beweisen nun den zuvor formulierten Satz. Vorerst ergibt sich aus der Definition der Zerlegungsgleichheit und der Vervielfachung unmittelbar, daß für jedes rationalwertige invariante additive Funktional F aus $a \stackrel{z}{-} b$ auch $F(a) = F(b)$ und $F(k \cdot a) = kF(a)$ folgt. Aus (B) folgt deshalb (A); denn aus $k \cdot a \stackrel{z}{-} k \cdot b$ $(k \in \mathbb{N})$ folgt $kF(a) = F(k \cdot a) = F(k \cdot b) = kF(b)$ und nach Multiplikation mit $\frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ auch $F(a) = F(b)$ für jedes $\mathbb{Q}$-wertige invariante additive Funktional, was unter Voraussetzung von (B) auf $a \stackrel{z}{-} b$ zu schließen gestattet; der Divisionssatz (D) erweist sich also als gültig, und ganz analog zeigt man die Gültigkeit des Subtraktionssatzes (S). Umgekehrt folgt (A) bei Voraussetzung von (B). Denn dann kann auf Grund des Subtraktionssatzes, wie oben gezeigt, die abelsche Gruppe $(\mathfrak{P}, +)$ konstruiert werden, und $a \overset{\Phi_0}{\mapsto} (\bar{a} + \bar{b}, \bar{b})^{\simeq}$ ist ein (von $b \in P$ unabhängiges) $\mathfrak{P}$-wertiges invariantes, additives Funktional Φ_0 auf $(P, +, \sim)$. Auf Grund des Divisionssatzes ist $(\mathfrak{P}, +)$ torsionsfrei, so daß das obige Lemma angewendet werden kann. Durchläuft f die dort angegebene Klasse $\mathfrak{F}$, so durchläuft $F = f \circ \Phi_0$ eine Klasse rationalwertiger invarianter additiver Funktionale auf $(P, +, \sim)$, aus deren Wertegleichheit für $a, a' \in P$ nach dem Lemma zunächst auf $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b})^{\simeq} = (\bar{a}' + \bar{b}, \bar{b})^{\simeq}$ und daraus mit dem Subtraktionssatz auf $a \stackrel{z}{-} b$ geschlossen werden kann.

LITERATUR

[1] HERTEL, E.: Ein Subtraktionssatz der Polyederalgebra. Beiträge zur Algebra und Geometrie *2* (1974), 83–86.

[2] HERTEL, E.: Ein algebraischer Begriff des invarianten Maßes und invariante Integration in abstrakten Räumen. Math. Nachr. 88 (1979), 307–313.

[3] NEF, W.: Zerlegungsäquivalenz von Mengen und invarianter Inhalt. Math. Ann. *128* (1954), 204–227.

Manuskripteingang: 6. 6. 1978

VERFASSER:

EIKE HERTEL, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena
HANS E. DEBRUNNER, Mathematisches Institut der Universität Bern