Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 141–143

Ein gruppentheoretisches Kriterium für die Lösbarkeit der Funktionalgleichung $f(x + y) = F(f(x), f(y))$

WOLFGANG SCHULZ

Es sei A eine gegebene Menge und $F\colon A \times A \to A$ eine gegebene Funktion. Wir betrachten die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = F\bigl(f(x), f(y)\bigr). \tag{1}$$

Gesucht werden Funktionen $f\colon R \to A$ (R sei die Menge der reellen Zahlen), die die Gleichung (1) lösen. J. ACZÉL gibt in [1] alle stetigen Lösungen f von (1) für den Fall an, daß A eine Menge reeller Zahlen ist, die ein (offenes oder halboffenes) Intervall enthält. In der vorliegenden Arbeit soll nun (1) ohne Regularitätsvoraussetzungen (wie z. B. Stetigkeit) für f untersucht werden.
Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (1) *ist, daß A eine nichtleere Teilmenge B enthält, so daß B mit der durch F definierten Operation $*$ eine dividierbare abelsche Gruppe ist.* M. NEAGU gibt in [3] einen Beweis dafür, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Sein Beweis bezieht sich jedoch nur auf den Fall, daß die Gruppe B torsionsfrei ist. In diesem Fall kann man, ausgehend von einer Basis von R über dem Körper Q der rationalen Zahlen, durch lineare Fortsetzung leicht Lösungen der Gleichung (1) angeben.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Gleichung (1) auch Lösungen besitzen kann, wenn B nicht torsionsfrei ist. *Es sei $A = B = R/Z$ die Faktorgruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen nach der Gruppe Z der ganzen Zahlen, und es sei F die Gruppenoperation von R/Z. Dann ist der kanonische Homomorphismus $f\colon R \to R/Z$ eine Lösung von* (1). Bei diesem Beispiel versagt der in [3] beschrittene Weg.
Unser Ziel ist nun, die obengenannte Bedingung in jedem Fall (also auch für nicht torsionsfreies B) als hinreichend zu erweisen, d. h. insgesamt folgenden Satz zu zeigen:

Satz 1. *Zu der Funktionalgleichung* (1) *existiert genau dann eine Lösung f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, wenn die Menge A eine nichtleere Menge B enthält, die bezüglich der durch F gegebenen Operation $*$ eine dividierbare abelsche Gruppe bildet.*

Beweis. Es sei $B \subseteq A$ eine nichtleere Menge, die bezüglich F eine dividierbare abelsche Gruppe bildet; anstelle von $F(a, b)$ schreiben wir $a * b$. Wir untersuchen $\mathrm{Hom}\bigl((R, +), (B, *)\bigr)$. Dazu betrachten wir zunächst die Struktur von B genauer. Es gilt (vgl. z. B. [2], S. 62ff.):

Lemma 1. *Jede dividierbare abelsche Gruppe $(B, *)$ ist direkte Summe von einer torsionsfreien, dividierbaren abelschen Gruppe $(D, *)$ und von quasizyklischen Gruppen* *der Form* $Z(p^\infty)$ *mit*

$$Z(p^\infty) = \{e^{(2\pi i k)/p^n} : n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots, p^n - 1\}.$$

Somit ist $\mathrm{Hom}\big((R, +), (B, *)\big)$ direkte Summe von $\mathrm{Hom}\big((R, +), (D, *)\big)$ und von Gruppen der Form $\mathrm{Hom}\big((R, +), Z(p^\infty)\big)$. Es genügt wegen des oben erwähnten Zitats [3], $\mathrm{Hom}\big((R, +), Z(p^\infty)\big)$ für eine feste Primzahl p zu untersuchen. Zu diesem Zweck stellen wir einige bekannte Tatsachen bereit. Zunächst bestimmen wir, wie viele der l-ten Wurzeln eines Elementes $e^{(2\pi i k)/p^n} \in Z(p^\infty)$, deren Anzahl ja l ist, zu $Z(p^\infty)$ gehören. Jede dieser Wurzeln ist von einer der Formen

$$e^{((2\pi i k)/p^n + 2\pi i r)/l} = e^{(2\pi i (k + r p^n))/l p^n}$$

mit einem $r = 0, 1, \ldots, l - 1$.
Ist dabei $(l, p) = 1$, so existieren ganze Zahlen a, b mit $al + bp^n = 1$, also $kal + kbp^n = k$. Wir zeigen in diesem Fall: Für das Bestehen von $e^{(2\pi i(k+rp^n))/lp^n} \in Z(p^\infty)$ ist die Bedingung $l \mid k + rp^n$ notwendig und hinreichend. Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist klar. Umgekehrt sei $e^{(2\pi i(k+rp^n))/lp^n} \in Z(p^\infty)$ vorausgesetzt. Dann existieren Zahlen q und k', wobei k' eine der Zahlen $0, 1, \ldots, p^q - 1$ ist, derart, daß $\dfrac{k + rp^n}{lp^n} = \dfrac{k'}{p^q}$, also $p^q(k + rp^n) = k'lp^n$ und somit $l \mid p^q(k + rp^n)$ gilt, woraus wegen $(l, p) = 1$, wie behauptet, $l \mid k + rp^n$ folgt. Wegen

$$k + rp^n = kal + kbp^n + rp^n = kal + (kb + r)\, p^n$$

ist dies gleichwertig mit $l \mid kb + r$. Nun ist von den l aufeinanderfolgenden Zahlen $kb, kb + 1, \ldots, kb + l - 1$ genau eine durch l teilbar. Wir erhalten als Ergebnis: Wenn $(l, p) = 1$ gilt, dann ist genau eine der l-ten Wurzeln aus $e^{(2\pi i k)/p^n}$ ein Element von $Z(p^\infty)$.
Nun sei $l = l'p^q$ und $(l', p) = 1$. Dann hat jede der zu betrachtenden Wurzeln die Form $e^{(2\pi i(k+rp^n))/l'p^{n+q}}$. Durch einen entsprechenden Schluß für l' wie oben für l ergibt sich, daß $e^{(2\pi i(k+rp^n))/l'p^{n+q}} \in Z(p^\infty)$ genau dann gilt, wenn $l' \mid kb + r$ ist. Von den l aufeinanderfolgenden Zahlen $kb, kb + 1, \ldots, kb + l - 1$ sind wegen $l = l'p^q$ genau p^q durch l' teilbar. Also liegen genau p^q unter den genannten l-ten Wurzeln in $Z(p^\infty)$.
Es wird nun für jede natürliche Zahl l $(l > 1)$ eine Funktion $g_l\colon Z(p^\infty) \to Z(p^\infty)$ definiert, für die folgendes gilt:

(a) $\big(g_l(a)\big)^l = a$ für jedes $a \in Z(p^\infty)$,

(b) $\big(g_{uv}(a)\big)^{us} = \big(g_v(a)\big)^s$ für alle natürlichen Zahlen u, v, s und jedes $a \in Z(p^\infty)$.

Die Funktionen g_l wählen also aus den vorhandenen Möglichkeiten für jedes Element aus $Z(p^\infty)$ eine l-te Wurzel aus, die wieder in $Z(p^\infty)$ liegt. Dies erreichen wir durch folgende Definitionen:
Für alle natürlichen Zahlen l mit $(l, p) = 1$ ist $g_l(e^{(2\pi i k)/p^n})$ eindeutig bestimmt, da nur eine l-te Wurzel existiert, die zu $Z(p^\infty)$ gehört. Zur Festlegung von $g_p(e^{(2\pi i k)/p^n})$ bestehen p Möglichkeiten. Wir entscheiden uns für $g_p(e^{(2\pi i k)/p^n}) = e^{(2\pi i k)/p^{n+1}}$. Ist $l = mp$ mit $m = 2, 3, \ldots, p - 1$, so wählen wir von den p Möglichkeiten die eine, für die $\big(g_l(e^{(2\pi i k)/p^n})\big)^m = g_p(e^{(2\pi i k)/p^n})$ gilt. Ferner sei $l = p^r$. Dann bestehen für $g_l(e^{(2\pi i k)/p^n})$ genau p^r Möglichkeiten. Wir entscheiden uns für $g_l(e^{(2\pi i k)/p^n}) = e^{(2\pi i k)/p^{n+r}}$.
Ist $l = mp^r$ mit $m = 2, 3, \ldots, p - 1$, so verfahren wir entsprechend wie für $l = mp$. Auf diese Weise sind die Funktionen g_l unter Berücksichtigung von (a) und (b) definiert.
Nun können wir Lösungen f der Gleichung (1) mit einer Basis H von R über Q für den Fall $A = Z(p^\infty)$ definieren. Es seien x und y zwei reelle Zahlen mit den Dar-

stellungen

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{q_i} b_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i'}{q_i'} b_i$$

$(b_i \in H;\ p_i, p_i'$ ganzzahlig; $q_i, q_i' > 0$ natürlich;

$(p_i, q_i) = 1$ für $p_i \neq 0$; $(p_i', q_i') = 1$ für $p_i' \neq 0)$.

Dann ist

$$x + y = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i q_i' + p_i' q_i}{q_i q_i'} b_i .$$

Für $a_1 * a_2 * \cdots * a_m$ mit $a_i \in B$ schreiben wir $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} a_i$. Wir definieren nun eine Funktion f durch

$$f(x) = \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i}(f(b_i))\big)^{p_i},$$

wobei als Werte $f(b_i)$ ohne Einschränkung beliebige Elemente aus $Z(p^\infty)$ genommen werden können. Dann gilt wegen der Definition von f unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $*$ Gruppenoperation ist, und wegen (b)

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i q_i'}(f(b_i))\big)^{p_i q_i' + p_i' q_i} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i q_i'}(f(b_i))\big)^{p_i q_i'} * \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i q_i'}(f(b_i))\big)^{p_i' q_i} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i}(f(b_i))\big)^{p_i} * \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \big(g_{q_i'}(f(b_i))\big)^{p_i'} \\ &= f(x) * f(y). \end{aligned}$$

Für jede Wahl der $f(b_i)$ erhalten wir also im vorliegenden Falle $A = Z(p^\infty)$ eine Lösung f von (1).
Insgesamt ergeben sich bei beliebigem A, das die Bedingung aus Satz 1 erfüllt, nach Lemma 1 als Lösungen f der Gleichung (1) Funktionen der Form $f = f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \oplus f_j \oplus \cdots$, wobei $f_0 \in \operatorname{Hom}\big((R, +), (D, *)\big)$ und $f_j \in \operatorname{Hom}\big((R, +), Z(p_j^\infty)\big)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sind. Damit ist Satz 1 bewiesen.

LITERATUR

[1] Aczél, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961, S. 52ff.

[2] Fuchs, L.: Abelian groups. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1958.

[3] Neagu, M.: Soluţia cea mai generală a ecuaţiilor funcţionale de tipul teoremelor de adiţiune, Bul. Sti. şi Tehn. Inst. Politehn. Timişoara. Ser. Mat.-Fiz.-Mec. Teor. şi Apl. *17* (1972). 123–129.

Manuskripteingang: 23. 3. 1978

VERFASSER:

Wolfgang Schulz, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin