Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 105–110

Bemerkungen zur axiomatischen Konvexitätstheorie

SIEGFRIED GOTTWALD

Die hier als axiomatische Konvexitätstheorie bezeichneten algebraischen Untersuchungen gehen zurück auf Arbeiten von W. PRENOWITZ (vgl. z. B. [4], oder als neuere Darstellungen [5], [6]), der auf dem Weg über eine Umdeutung der Zwischen-Relation, wie sie etwa von O. VEBLEN [9] beim Aufbau der Geometrie wesentlich benutzt wurde, in eine 2-stellige mengenwertige Operation zu algebraischen Betrachtungen über geometrische Fragen angeregt wurde. Zusätzlich zu diesem Hintergrund wird das Interesse an dieser allgemeinen Konvexitätstheorie heute auch dadurch gefördert, daß der Konvexitätsbegriff in vielen Fragen der Optimierungstheorie eine wichtige Rolle spielt.
Eine Reihe verschiedener Ansätze zu einer axiomatischen Konvexitätstheorie sind von L. TESCHKE/G. HEIDEKRÜGER [8] vergleichend betrachtet worden. Bei einem solchen Vergleich ist es immer günstig, für den weiteren Aufbau der Theorie wichtige elementare Eigenschaften möglichst unter Vermeidung unnötiger Voraussetzungen herzuleiten. Dieser Gesichtspunkt spielte bisher hauptsächlich bei V. W. BRYANT [1] eine Rolle. Wir wollen solche Betrachtungen in dieser Arbeit ein wenig ausbauen. Dies wird schließlich zu einer Modifizierung und Erweiterung des Bryantschen Unabhängigkeitsresultates aus [1] führen.

1. Grundeigenschaften und einfache Folgerungen

Fest vorgegeben seien eine Menge V und eine binäre Operation $\cdot : V \times V \to PV$, d. h. eine *Intervallkonvexität* $\cdot$ auf V in der Terminologie von z. B. [3]. Wir betrachten die Struktur $(V, \cdot)$. Für $a, b \in V$ soll statt $a \cdot b$ auch kurz ab geschrieben werden; kleine lateinische Buchstaben sind Variable für die Elemente von V. Die üblichen Ausdrucksmittel der Prädikatenlogik der 1. Stufe werden ohne Kommentar benutzt. ▌ bedeute Beweisende.
Neben der *Verbindungsoperation* $\cdot$ benötigen wir auch oft die mit ihrer Hilfe erklärte Operation $/ : V \times V \to PV$, die definiert ist durch

$$a/b := \{x \mid a \in bx\}.$$

Feststehende Bezeichnung benutzen wir ebenfalls für die der Verbindungsoperation $\cdot$ zugeordnete *„Zwischen"-Relation* R, die definiert sei durch

$$R(a, b, c) :\Leftrightarrow b \in ac.$$

Dann ist sofort

$$b \in ac \leftrightarrow R(a, b, c) \leftrightarrow c \in b/a .$$

Mithin ist nicht nur die Operation / mittels der Operation $\cdot$ definierbar, sondern auch $\cdot$ mittels /:

$$a \cdot b = \{x \mid b \in x/a\} .$$

Interpretiert man geometrisch $a \cdot b$ als „Verbindungsstrecke" von a und b, so ist der „Strahl" a/b auch interpretierbar als der „b-Schatten", den a relativ zur „Quelle" b hat.

Für später wiederholt zu betrachtende Eigenschaften führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

(KOM)	$\forall a \forall b(a \cdot b = b \cdot a)$,
(KOM*)	$\forall a \forall b(a \cdot b \subseteq b \cdot a)$,
(ASS)	$\forall a \forall b \forall c(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$,
(ASS*)	$\forall a \forall b \forall c(a \cdot (b \cdot c) \subseteq (a \cdot b) \cdot c)$,
(QUOT)	$\forall a \forall b \forall c(a \cdot (b/c) \subseteq (a \cdot b)/c)$,
(EX)	$\forall a \forall b(a/b \neq \emptyset)$,
(NONL)	$\forall a(a \in a \cdot a)$,
(SING·)	$\forall a(a \cdot a \subseteq \{a\})$,
(SING/)	$\forall a(a/a \subseteq \{a\})$.

Wir folgen dem Vorgehen in z. B. [1], [2] und fassen die letzten drei Aussagen in dieser Liste zusammen:

$$\text{(EQU)} \quad \forall a(a \cdot a = a/a = \{a\}).$$

Einige einfache Zusammenhänge sind offensichtlich. Wir erwähnen etwa (vgl. auch [1])

$$\text{(KOM)} \leftrightarrow \text{(KOM*)},$$
$$\text{(ASS)} \rightarrow \text{(ASS*)},$$
$$\text{(KOM)} \rightarrow (\text{(ASS)} \leftrightarrow \text{(ASS*)}).$$

Nennt man, Prodanov [7] folgend (vgl. auch [8]), die Struktur $(V, \cdot)$ einen zweifach assoziativen Raum, falls (KOM), (ASS) und (QUOT) gelten, so hat man unmittelbar

Satz 1. *$(V, \cdot)$ ist genau dann ein zweifach assoziativer Raum, wenn* (KOM*), (ASS*) *und* (QUOT) *gelten.*

Leicht nachzuweisen ist die Beziehung

$$\text{(KOM)} \vdash \text{(ASS)} \leftrightarrow \forall a \forall b \forall c(a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (c \cdot a)).$$

Da bei geometrischer Deutung mittels der „Zwischen"-Relation R ein Produkt der Form $a \cdot (b \cdot c)$ im wesentlichen das „Innere" des „Dreiecks" mit den „Eckpunkten" a, b, c ist, besagt unter Voraussetzung von (KOM) also (ASS) geometrisch die Unabhängigkeit des „Dreiecksinneren" von der Reihenfolge der „Eckpunkte".
Rückgriff auf die „Zwischen"-Relation R gibt sofort auch

$$a \in aa \leftrightarrow R(a, a, a) \leftrightarrow a \in a/a$$

sowie

$$x \in b(a/b) \leftrightarrow \exists\, y\big(R(b, a, y) \wedge R(b, x, y)\big),$$

also speziell

$$\forall\, a \,\forall\, b\big(a \in b(a/b) \leftrightarrow a/b \neq \emptyset\big).$$

Analog kann man zeigen:

$$(\mathrm{KOM}) \vdash \forall\, a \,\forall\, b\big(b \in a/(a/b) \leftrightarrow a/b \neq \emptyset\big).$$

Sofort sieht man auch

$$a \in ab \leftrightarrow b \in a/a.$$

Damit kann man beweisen, daß gilt:

(*) $\quad (\mathrm{SING}/) \vdash \forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c(c \in ab \wedge a \neq b \rightarrow c \neq a)$

und also auch

$$(\mathrm{SING}/), (\mathrm{KOM}) \vdash \forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c(c \in ab \wedge a \neq b \rightarrow a \neq c \neq b).$$

Zur Formulierung weiterer Eigenschaften und Beziehungen erklären wir noch eine binäre Relation $\approx$ in PV durch

$$A \approx B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

für alle $A, B \in PV$. Damit werden noch folgende Eigenschaften eingeführt:

($\triangle$) $\quad \forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c \,\forall\, d(a/b \approx c/d \rightarrow da \approx bc)$,

($\triangle^*$) $\quad \forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c \,\forall\, d(a/b \approx c/d \rightarrow ad \approx bc)$,

(JOIN) $\quad \forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c(ab \approx ac \wedge b \neq c \rightarrow b \in ac \vee c \in ab)$.

Über die Relation R gewinnt man für sie leicht geometrische Deutungen; man vgl. etwa [4].
Es ist interessant, die Assoziativität der Verbindungsoperation $\cdot$ noch etwas genauer zu betrachten.

Satz 2. *Für beliebige a, b, c gilt*

(a) $\quad (\mathrm{KOM}) \vdash a(bc) \subseteq (ab)\, c \leftrightarrow \forall\, d(d/a \approx bc \rightarrow ab \approx d/c)$,

(b) $\quad (\mathrm{KOM}) \vdash a(bc) = (ab)\, c \leftrightarrow \forall\, d(d/a \approx bc \leftrightarrow ab \approx d/c)$.

Beweis. Offenbar genügt es, (a) zu zeigen, da (b) sofort daraus folgt. Es ist aber unter Voraussetzung von (KOM):

$$\begin{aligned} a(bc) \subseteq (ab)\, c &\leftrightarrow \forall\, d\big(d \in a(bc) \rightarrow d \in (ab)\, c\big) \\ &\leftrightarrow \forall\, d\big(\exists\, x(R(b, x, c) \wedge R(a, d, x)) \\ &\qquad \rightarrow \exists\, y(R(a, y, b) \wedge R(y, d, c))\big) \\ &\leftrightarrow \forall\, d\big(\exists\, x(x \in bc \wedge x \in d/a) \rightarrow \exists\, y(y \in ab \wedge y \in d/c)\big) \\ &\leftrightarrow \forall\, d(d/a \approx bc \rightarrow ab \approx d/c). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis legt die Frage nahe, ob ein ähnlicher Zusammenhang auch hinter der unter Voraussetzung von (KOM) geltenden Gleichwertigkeit von (QUOT) und ($\triangle^*$) steckt. Dies ist in der Tat der Fall.

Satz 3. *Es gilt für alle a, b, c*

(a) $a(b/c) \subseteq ab/c \leftrightarrow \forall d(d/a \approx b/c \rightarrow ab \approx cd)$,

(b) $(\mathrm{QUOT}) \leftrightarrow (\triangle)$.

Beweis. (a) ergibt sich analog zum Beweis von Satz 2 bei Rückgriff auf die „Zwischen"-Relation R durch elementare logische Umformungen. (b) ist dann eine einfache Folgerung.

Folgerung.

(a) $\forall a \forall b\big(a(b/a) \subseteq ab/a \rightarrow (ab = \emptyset \rightarrow b/a = \emptyset)\big)$,

(b) $(\triangle) \vdash \forall a \forall b(a/b \neq \emptyset \rightarrow ba \neq \emptyset)$.

Beweis. Durch einfache Umformungen aus Satz 3. ▮

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß man in derselben Weise für beliebige a, b, c zeigen kann:

$$(\mathrm{KOM}) \vdash a/(c/b) \subseteq ab/c \leftrightarrow \forall d(a/d \approx c/b \rightarrow ab \approx cd).$$

Als Spezialfall gewinnt man

$$(\mathrm{KOM}) \vdash \forall a \forall b\big(a/(a/b) \subseteq ab/a \rightarrow (ab = \emptyset \rightarrow b/a = \emptyset)\big).$$

Satz 4.

$$(\triangle) \vdash \forall a \forall b \forall c\big(a(bc) = \emptyset \rightarrow ac = \emptyset \vee bc = \emptyset\big).$$

Beweis. Es gelte $(\triangle)$ und es sei $a(bc) = \emptyset$. Wäre dann $ac \neq \emptyset$ und $bc \neq \emptyset$, so gäbe es Elemente x, y mit $R(a, x, c)$ und $R(b, y, c)$, also wäre $c \in x/a \cap y/b$, mithin $bx \approx ay$ wegen $(\triangle)$, also $ay \neq \emptyset$ bei $y \in bc$, also $a(bc) \neq \emptyset$. Widerspruch. ▮

Folgerung.

$$(\triangle), (\mathrm{ASS}^*) \vdash \forall a \forall b\big(ab = \emptyset \rightarrow \forall c(ac = \emptyset \vee bc = \emptyset)\big).$$

Dies ist in [8] für zweifach assoziative Räume gezeigt worden unter Benutzung der Kommutativität der Verbindungsoperation.

Schließlich wollen wir noch einige Resultate unserer Operationen ·, / als disjunkt nachweisen.

Satz 5.

(a) $(\triangle), (\mathrm{SING}\cdot) \vdash \forall a \forall b(a \neq b \rightarrow a/b \cap b/a = \emptyset)$,

(b) $(\triangle), (\mathrm{SING}\cdot), (\mathrm{KOM}), (\mathrm{SING}/) \vdash \forall a \forall b(a \neq b \rightarrow ab \cap a/b = \emptyset)$.

Beweis. (a) Unter den angegebenen Voraussetzungen sei $a/b \approx b/a$, d. h. $a/b \cap b/a \neq \emptyset$; dann ist $aa \approx bb$ nach $(\triangle)$, also $aa \neq \emptyset \neq bb$ und damit $aa = \{a\}$, $bb = \{b\}$ und $\{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$. Also ist dann $a = b$. Kontraposition führt zur Behauptung.
(b) Es sei wieder unter den jetzt angegebenen Voraussetzungen $ab \approx a/b$, also etwa $x \in ab \cap a/b$. Dann ist wegen (KOM) $b \in a/x \cap x/a$, also $aa \approx xx$ nach $(\triangle)$, also $a = x$ wie eben abzuleiten. Also ist $a \in ab$ und daher $a = b$ wegen (*). Wieder kontraponiere man. ▮

2. Unabhängigkeitsresultate

Bryant [1] nennt $(V, \cdot)$ einen *Konvexitätsraum*, wenn (EX), (KOM), (ASS), $(\triangle^*)$, $\forall\, a \,\forall\, b(ab \neq \emptyset)$ und (EQU) erfüllt sind. Er zeigt in [1], daß es bereits genügt, von $(V, \cdot)$ die Eigenschaften

$(+)$ (EX), (ASS), $(\triangle^*)$, (EQU)

zu zeigen, um zu wissen, daß $(V, \cdot)$ ein Konvexitätsraum ist.
Da offenbar

$$(\text{KOM}) \vdash (\triangle) \leftrightarrow (\triangle^*) \leftrightarrow (\text{QUOT})$$

gilt, ist jeder Konvexitätsraum auch ein zweifach assoziativer Raum. Dies legt die Frage nahe, ob man eine Charakterisierung der Konvexitätsräume finden kann, deren Bedingungen wie in [1] voneinander unabhängig sind, die aber $(\triangle)$, d. h. (QUOT), statt $(\triangle^*)$ benutzt. Allerdings kann man nicht einfach in $(+)$ die Eigenschaft $(\triangle^*)$ gegen $(\triangle)$ austauschen, denn es gilt folgender

Satz 6. (EX), (ASS), $(\triangle)$, (EQU) $\nvdash$ (KOM).

Beweis. Wir wählen $V = \{0, 1\}$ und setzen

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = \{0\}, \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \{1\}.$$

Dann ist $1 \cdot 0 \neq 0 \cdot 1$, also (KOM) nicht erfüllt. Andererseits ist stets $ab = \{b\}$, also $(ab)\,c = \{c\} = a(bc)$. Mithin gilt (ASS). Es ist auch stets $a/b = \{a\}$, also gelten (EX) und (EQU). Für $(\triangle)$ schließlich genügt es, statt allgemein

$$a/b \approx c/d \rightarrow da \approx bc$$

zu zeigen, sich auf den Nachweis von

$(^{**})$ $\quad a/b \approx a/d \rightarrow da \approx ba$

zu beschränken. Es ist aber stets $da \cap ba = \{a\} \cap \{a\} \neq \emptyset$, also $(^{**})$ immer zutreffend. ▮

Satz 7. *Die Aussagenmenge*

$$\{(\text{EX}), (\text{KOM}), (\text{ASS}), (\triangle), (\text{EQU})\}$$

ist ein unabhängiges Axiomensystem für Konvexitätsräume.

Beweis. Wegen (KOM) $\wedge$ $(\triangle) \rightarrow (\triangle^*)$ handelt es sich sicherlich um ein Axiomensystem für Konvexitätsräume. Nach Satz 6 ist (KOM) nicht aus den restlichen Aussagen herleitbar. Die Nichtherleitbarkeit von (EX) bzw. (ASS), $(\triangle)$, (EQU) aus den jeweils restlichen Aussagen zeigen die Beispiele I bzw. III, IV, IIii aus [1]. ▮

Nennen wir noch gemäß [8] die Struktur $(V, \cdot)$ einen *verallgemeinerten Konvexitätsraum*, falls die Eigenschaften

$$(\text{EX}), (\text{KOM}), (\text{ASS}), (\triangle^*), (\text{NONL})$$

erfüllt sind, so haben wir die

Folgerung. *Ein unabhängiges Axiomensystem für verallgemeinerte Konvexitätsräume ist die Aussagenmenge*

$$\{(\text{EX}), (\text{KOM}), (\text{ASS}), (\triangle), (\text{NONL})\}.$$

Beweis. Es ist wegen Satz 7 nur zu zeigen, daß (NONL) nicht aus den restlichen Aussagen folgt. Dies ergibt sich aber aus Beispiel 6 von [8]. ▮

Die Terminologie ist noch nicht einheitlich in diesem Zusammenhang; z. B. fordern V. W. BRYANT/R. J. WEBSTER in [2] noch die Eigenschaft (JOIN) von einem Konvexitätsraum, womit sie W. PRENOWITZ [4] folgen. Das in diesem Fall echt weniger Strukturen $(V, \cdot)$ als Konvexitätsräume bezeichnet werden, zeigt

Satz 8. (EX), (KOM), (ASS), ($\triangle$), (EQU) $\nvdash$ (JOIN).

Beweis. [8], Beispiel 5. ▮

Endlich erhält man auch noch

Satz 9. *Die Aussagenmenge*

$$\{(\mathrm{EX}), (\mathrm{KOM}), (\mathrm{ASS}), (\triangle), (\mathrm{EQU}), (\mathrm{JOIN})\}$$

ist unabhängig.

Beweis. Die Beispiele I, III, IV, IIii aus [1] erfüllen (in dieser Reihenfolge) jeweils gerade (EX), (ASS), ($\triangle$), (EQU) nicht, aber alle anderen Aussagen. Das im Beweis zu Satz 6 konstruierte Beispiel erfüllt nur (KOM) nicht. Schließlich erfüllt Beispiel 5 aus [8] nur (JOIN) nicht. ▮

LITERATUR

[1] BRYANT, V. W.: Independent axioms for convexity. J. of Geometry *5* (1974), 95–99.

[2] BRYANT, V. W., und R. J. WEBSTER: Convexity spaces I. The basic properties. J. Math. Anal. Appl. *37* (1972), 206–213.

[3] HAMMER, R.: Beziehungen zwischen den Sätzen von Radon, Helly und Carathéodory bei axiomatischen Konvexitäten. Abhandl. math. Sem. Univ. Hamburg *46* (1977), 3–24.

[4] PRENOWITZ, W.: Descriptive geometries as multigroups. Trans. Amer. Math. Soc. *59* (1946), 333–380.

[5] PRENOWITZ, W.: A contemporary approach to classical geometry. Amer. Math. Monthly *68* (1961), Appendix, 1–67.

[6] PRENOWITZ, W., und J. JANTOSCIAK: Geometries and join spaces. J. reine angew. Math. *257* (1972), 100–128.

[7] PRODANOV, I.: Zweifach assoziative Räume (Bulg.). Ann. Univ. Sofia Fav. Math. *57* (1962/63), 393–422.

[8] TESCHKE, L., und G. HEIDEKRÜGER: Zweifach assoziative Räume, Verbindungsräume, Konvexitätsräume und verallgemeinerte Konvexitätsräume. Wiss. Z. PH „N. K. Krupskaja" Halle *14* (1976), H. 2, 21–24.

[9] VEBLEN, O.: The foundations of geometry. Monographs on Topics of Modern Math., ed. by J. W. A. YOUNG, New York 1911, pp. 3–51.

Manuskripteingang: 20. 2. 1978

VERFASSER:

SIEGFRIED GOTTWALD, Sektion Philosophie/WK, Bereich Logik, der Karl-Marx-Universität Leipzig