

## Werk

**Titel:** Totale Absolutkrümmung von Hyperflächen

**Autor:** WINTGEN, P.

**Jahr:** 1980

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0010|log12](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0010|log12)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Totale Absolutkrümmung von Hyperflächen

PETER WINTGEN

Für die totale absolute Gaußsche Krümmung einer geschlossenen Fläche  $F$  vom Geschlecht  $p$  im dreidimensionalen Raum gilt bekanntlich die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_F |K| \, dF \geq 2(1 + p).$$

Diese Ungleichung läßt sich noch verbessern, wenn  $F$  *verknötet* ist. Dann gilt nämlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_F |K| \, dF \geq 2(1 + p) + 4$$

(H. MORTON [9]; vorher lagen bereits Teilresultate von R. LANGEVIN und H. ROSENBERG [8] vor). Wir untersuchen hier, wie sich diese Ungleichung verbessern läßt, wenn geeignete Annahmen über die Art der Verknötung von  $F$  gemacht werden. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_F |K| \, dF \geq 2(1 + p) + 4 \max(\sigma(G), \sigma(G')).$$

Hier bezeichnen  $G$  und  $G'$  die beiden Komponenten des Komplementes von  $F$ , und die topologische Invariante  $\sigma(X)$  sei folgendermaßen definiert: Ist  $\pi$  eine endlich erzeugte Gruppe,  $\pi'$  die Kommutatorgruppe von  $\pi$ , so bezeichnen wir mit  $\sigma(\pi) = \varrho\pi - \varrho\pi/\pi'$  die Differenz der minimalen Erzeugendenzahlen von  $\pi$  und  $\pi/\pi'$ . Dann ist  $\sigma(X)$  definiert durch  $\sigma(X) = \sigma(\pi_1(X))$ .

Ist  $F$  eine  $m$ -fach zusammenhängende kompakte Fläche mit Rand, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_F |K| \, dF + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial F} k \, ds \geq m + 2\sigma(E^3 - F)$$

(hier bezeichnet  $k$  die Krümmung der Randkurve). Von R. LANGEVIN und H. ROSENBERG [8] wurde bereits festgestellt, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_F |K| \, dF + \frac{1}{\pi} \int_{\partial F} k \, ds \geq m + 2$$

gilt, wenn  $F$  von einem Knoten  $K$  berandet wird. Aus unseren Resultaten ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int |K| dF + \frac{1}{\pi} \int k ds \geq m + 1 + 2\sigma(E^3 - F) + \sigma(E - K).$$

Diese Ungleichungen und ihre Verallgemeinerungen auf Hyperflächen (Sätze 3, 4, 6, 7) zeigen wir, indem wir die totale Absolutkrümmung als mittlere Anzahl von kritischen Punkten gewisser Morse-Funktionen auf dem (geeignet kompaktifizierten) Komplement deuten. Diese Morse-Funktionen, welche durch Höhenfunktionen induziert werden, induzieren einen bestimmten Zellaufbau des Komplementes und gestatten daher Schlüsse auf seinen Homotopietyp, die sich unschwer in den Verknotungsinvarianten  $\sigma$  ausdrücken lassen.

### 1. Morse-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

Es sei  $W$  eine kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial W$ . Wir betrachten auf  $W$  eine reelle Funktion  $f$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Alle kritischen Punkte von  $f$  sind nicht ausgeartet und liegen im Inneren von  $W$ .
2. Die Einschränkung von  $f$  auf den Rand  $\partial W$  ist eine Morse-Funktion des Randes.

Eine solche Funktion  $f$  wird *m-Funktion* von  $W$  genannt (vgl. A. JANKOWSKI und R. RUBINSZTEIN [6], TH. FRIEDRICH [4]). Sie induziert eine Homotopieäquivalenz zu einem  $CW$ -Komplex, dessen Zellenanzahl sich aus der Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  ergibt. Und zwar ist die Anzahl  $A_i$  der  $i$ -dimensionalen Zellen

$$A_i = C_i(f) + C_i^-(f| \partial W). \quad (1)$$

Hier bezeichnet  $C_i(f)$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  vom Index  $i$  und  $C_i^-(f)$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $f| \partial W$  vom Index  $i$ , in denen  $f$  nach außen fallend ist.

**Bemerkung.** Man kann noch etwas mehr zeigen.  $W$  besitzt einen Henkelaufbau, wobei die Anzahl  $A_i$  der Henkel vom Index  $i$  durch (1) gegeben wird, vgl. [4]. Hiervon machen wir beim Beweis von Satz 5 Gebrauch.

Für jede kompakte Mannigfaltigkeit  $W$  mit nicht leerem Rand definieren wir die differentialtopologische Invariante

$$\mu(W) = \min_{f \text{ m-Funktion von } W \text{ mit } C(f)=0} C(f| \partial W)/2;$$

dabei bezeichnet  $C(f)$  (bzw.  $C(f| \partial W)$ ) die totale Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  (bzw.  $f| \partial W$ ).

$\mu(W)$  ist eine wohldefinierte ganze Zahl. Um dies einzusehen, zeigen wir zunächst, daß es auf  $W$  eine  $m$ -Funktion ohne kritische Punkte gibt. Es sei  $h$  eine  $m$ -Funktion (deren Existenz ergibt sich leicht durch Benutzung von Höhenfunktionen, wenn man  $W$  in einen euklidischen Raum einbettet).

$h$  hat endlich viele kritische Punkte. Wir wählen einen Diffeomorphismus von  $W$  in sich, so daß die kritischen Punkte außerhalb des Bildes dieses Diffeomorphismus  $\varphi$  liegen.  $h \circ \varphi$  hat dann keine kritischen Punkte mehr. Durch eine kleine Störung von  $h$  können wir erreichen, daß  $h \circ \varphi$  eine Morse-Funktion des Randes wird. Um einzusehen, daß  $\mu(W)$  ganzzahlig ist, brauchen wir nur zu berücksichtigen, daß die Eulersche Charakteristik einer berandenden Mannigfaltigkeit gerade ist. Aus der Morse-

Gleichung

$$\chi(\partial W) = \sum (-1)^i C_i(f| \partial W)$$

folgt dann

$$C(f| \partial W) \equiv \chi(\partial W) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Wir betrachten außerdem noch die Invariante

$$\bar{\mu}(W) = \min_{f \text{ m-Funktion von } W \text{ mit } C(f)=0} C^-(f|M) \quad (M = \partial W).$$

Wegen  $C(f|M) = C^-(f|M) + C^-(-f|M) \geq 2\bar{\mu}(W)$  gilt  $\mu(W) \geq \bar{\mu}(W)$ . Aus (1) folgt

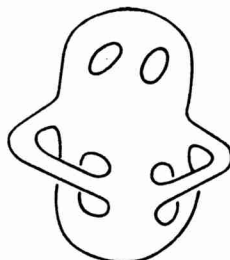
$$\bar{\mu}(W) \geq \beta(W). \quad (2)$$

Hier und im folgenden bezeichnet  $\beta = \sum \beta_i(W)$  die Summe über alle Bettischen Zahlen bezüglich eines (fest gewählten) Koeffizientenkörpers. Im allgemeinen gilt in (2) nicht die Gleichheit. Für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gilt jedoch

**Satz 1.** *Es sei  $W$  eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit nicht leerem Rand. Dann gilt*

$$\mu(W) = \beta(W).$$

**Beweis.** Der Einfachheit halber sei  $W$  zusammenhängend. Wir setzen zunächst  $W$  als orientierbar voraus. Bekanntlich kann man  $W$  als zusammenhängende Summe von  $p$  Tori, aus der  $q$  2-Zellen entfernt werden, auffassen (Sphäre mit  $p$  Henkeln und



( $p=2, q=3$ )

Abb. 1



a) ( $p=2, q=2$ )

Abb. 2



b)

$q$  Löchern). Es gilt dann  $\beta_1 = 2p + q - 1$ . Wir können  $W$  so in die Ebene immergieren, daß es eine Höhenfunktion  $h$  mit  $C_0^-(h) = C_0^-(-h) = 1$  ( $= \beta_0$ ) und  $C_1^-(h) = C_1^-(-h) = 2p + q - 1 = \beta_1$  gibt (Abb. 1). Im nichtorientierbaren Fall können wir  $W$  als zusammenhängende Summe der projektiven Ebene oder der Kleinschen Flasche mit  $p$  Tori aus der  $q$  2-Zellen entfernt werden, auffassen. Durch eine geeignete Abänderung der obigen Immersion erhalten wir eine Einbettung in den euklidischen Raum  $E^3$ , für welche eine Höhenfunktion  $h$  mit  $C_0^-(h) = C_0^-(-h) = 1$  und  $C_1^-(h) = C_1^-(h) = \beta_1$  existiert (vgl. Abb. 2a) und b)). In beiden Fällen haben wir eine Funktion  $h$  ohne kritische Punkte auf  $W$  gefunden, für die  $C(h| \partial W) = 2\beta(W)$  gilt. Wegen (2) folgt daraus  $\mu(W) = \bar{\mu}(W) = \beta(W)$ .

Die Abschätzung (2) kann man verbessern, indem man die Zellenanzahl des zu  $W$  homotopen  $CW$ -Komplex durch feinere topologische Invarianten als die Homologie-

gruppen abschätzt (vgl. P. WINTGEN [13]). Wir begnügen uns hier damit, die Fundamentalgruppe zu berücksichtigen. Es sei  $\pi$  eine beliebige endlich erzeugte Gruppe. Mit  $\varrho\pi$  bezeichnen wir die minimale Anzahl von Elementen von  $\pi$ , welche die Gruppe  $\pi$  erzeugen können. (Nach Vereinbarung setzen wir  $\varrho = 0$  für die triviale Gruppe.) Ist  $\pi'$  die Kommutatorgruppe von  $\pi$ , so setzen wir per definitionem  $\sigma\pi = \varrho\pi - \varrho\pi/\pi'$ . Ist  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum mit der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$ , so definieren wir die topologische Invariante  $\sigma(X)$  durch  $\sigma(X) = \sigma\pi_1(X)$ .

**Satz 2.** *Es sei  $W$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Für jede  $m$ -Funktion  $f$  auf  $W$  gilt*

$$C(f) + C^-(f) \geq \beta(W) + 2\sigma(W).$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem folgenden

**Hilfssatz 1.** *Es sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex. Für die Anzahl  $A$  seiner Zellen gilt  $A \geq \beta(W) + 2\sigma(X)$ .*

**Beweis.** Es sei  $A_i$  die Anzahl der  $i$ -Zellen von  $X$ . Ein Teil der 1-Zellen von  $X$  entspricht einem Erzeugendensystem von  $\pi_1(X)$ . (Die Fundamentalgruppe von  $X$  erhält man aus der Fundamentalgruppe des 1-Skelettes von  $X$ , wobei nach den von den

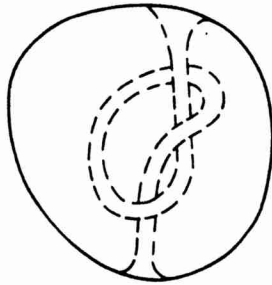


Abb. 3

2-Zellen induzierten Relationen faktorisiert wird. Entfernen wir aus dem 1-Skelett einen maximalen Baum, so liefern die restlichen Zellen ein Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe). Aus der Subadditivität der Bettischen Zahlen und ihrer alternierenden Summen folgt  $A_2 - A_1 + A_0 \geq \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$ , wofür wir auch

$$A_0 + A_1 + A_2 \geq \beta_0 + (A_1 - \beta_1) + A_1 + \beta_2$$

schreiben können. Außerdem gilt (universelle Koeffizienten)  $H_1(X; K) = H_1(X) \otimes K$  und  $H_1(X) = \pi_1 X / (\pi_1 X)'$ , also  $\varrho\pi_1(X) \geq \beta_1(X) + \sigma(X)$ . Aus diesen Ungleichungen zusammen erhalten wir

$$A_0 + A_1 + A_2 \geq \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + 2\sigma(X),$$

woraus die Behauptung folgt.

Es sei  $K \subset S^3$  ein (differenzierbarer) Knoten und  $W$  das Komplement einer offenen Tube von  $K$ . Es gilt  $H_1(W) = \mathbb{Z}$  (Alexander-Dualität), aber  $\pi_1(W) \neq \mathbb{Z}$  (Dehnsches Lemma). Daraus folgt  $\sigma(W) > 0$ . Ist beispielsweise  $K$  die Kleeblattschlinge, so findet man mit Hilfe einer geeigneten Einbettung von  $W$  in  $E^3$ , daß es eine  $m$ -Funktion  $h$  auf  $W$  mit  $C(h) = 0$  und  $C(h|_{\partial W}) = 8$  gibt (Abb. 3). (Man kann  $W$  auch erhalten, indem man die Vollkugel  $D^3$  auf geeignete Weise durchbohrt.) Nach Satz 2 gilt  $\mu(W) \geq 4$ . Für den Außenraum der Kleeblattschlinge gilt also  $\mu(W) = 4$ . Ist  $W$  der Außenraum der  $k$ -fachen zusammenhängenden Summe der Kleeblattschlinge, so

gilt  $\varrho\pi_1 W = 1 + k$  (R. Fox [3]), was gleichbedeutend mit  $\sigma(W) = k$  ist. Mit Hilfe einer geeigneten Einbettung in  $E^3$  findet man  $\mu(W) = 2(k + 1)$ .

Es sei  $W$  wieder eine kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Zum späteren Gebrauch geben wir einen anderen Ausdruck für  $\beta(W)$  an. Besitzt  $W$  eine Einbettung in  $E^n$ , so gilt (L. RODRIGUEZ [10])

$$\beta(W) = \frac{1}{2} \beta(\partial W). \quad (3)$$

Zum Beweis denken wir uns  $W$  in den euklidischen Raum  $E^n$  eingebettet und wenden zweimal den Alexanderschen Dualitätssatz (auf  $W$  und auf  $\partial W$ ) an. Es folgt

$$\begin{aligned} H^i(\partial W) &= \tilde{H}_{n-i-1}(E^n - \partial W) = H_{n-i-1}(W) \oplus \tilde{H}_{n-i-1}(E^n - W) \\ &= H_{n-i-1}(W) \oplus H^i(W). \end{aligned} \quad (4)$$

Da wir die Bettischen Zahlen auf Homologiegruppen mit Koeffizienten in einem Körper beziehen, ergibt sich

$$\beta_i(\partial W) = \beta_i(W) + \beta_{n-i-1}(W).$$

## 2. Totale Absolutkrümmung

Es sei  $H$  eine geschlossene Hyperfläche im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E^n$  ohne Selbstdurchdringungen. Die totale Absolutkrümmung von  $H$  ist durch

$$\tau(H) = \frac{2}{c_{n-1}} \int_H |K| dH \quad (5)$$

definiert, wobei  $K$  die Gaußsche Krümmung und  $c_{n-1}$  das Volumen der Einheitshypersphäre  $S^{n-1}$  bezeichnet. Wenn wir beachten, daß  $K dH = s^* dS^{n-1}$  das geliftete Volumenelement von  $S^{n-1}$  bezüglich der sphärischen Abbildung ist (wir können die sphärische Abbildung etwa dadurch definieren, daß wir jedem Punkt  $x$  der Fläche den in die unbeschränkte Komponente von  $E^n - H$  zeigenden Normaleneinheitsvektor  $s(x)$  zuordnen), dann können wir für  $\tau(H)$  auch (vgl. R. SULANKE und P. WINTGEN [11], Folgerung III.2.1):

$$\tau(H) = \frac{2}{c_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{card } s^{-1}(e) dS^{n-1}$$

schreiben. Das letzte Integral können wir in der Form

$$\tau(H) = \frac{1}{c_{n-1}} \int \{\text{card } s^{-1}(e) + \text{card } s^{-1}(-e)\} dS^{n-1}$$

schreiben und beachten, daß der Integrand gerade die Anzahl der kritischen Punkte der Höhenfunktion  $h_e = \langle \cdot, e \rangle$  auf  $H$  ist (welche für fast alle  $e$  eine Morse-Funktion ist). So bekommen wir  $\tau(H)$  in der bekannten Gestalt

$$\tau(H) = \frac{1}{c_{n-1}} \int C(h_e | H) dS^{n-1}. \quad (6)$$

Es sei  $G$  die beschränkte Komponente des Komplementes von  $H$ . (Der Einfachheit halber setzen wir  $H$  als zusammenhängend voraus.) Die Abschließung  $W = G \cup H$

ist eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand  $H$ . Aus (6) folgt unmittelbar

$$\tau(H) \geq 2\mu(W). \quad (7)$$

Aus Satz 2 und (3) ergibt sich daher

**Satz 3.** *Es sei  $H$  eine geschlossene zusammenhängende Hyperfläche in  $E^n$ , welche das beschränkte Gebiet  $G$  berande. Für die totale Absolutkrümmung von  $H$  gilt die Ungleichung*

$$\tau(H) \geq \beta(H) + 4\sigma(G).$$

Insbesondere erhalten wir für eine geschlossene Fläche vom Geschlecht  $p$  im dreidimensionalen Raum

$$\frac{1}{2\pi} \int |K| dH \geq 2(1 + p) + 4\sigma(G).$$

In Abb. 3 ist der Rand von  $W$  ein verknöteter Torus mit  $\sigma(G) = 1$ . Das Beispiel zeigt, daß die oben angegebene Schranke für die totale Absolutkrümmung im allgemeinen nicht vergrößert werden kann. (Dehnt man  $H$  in  $e$ -Richtung, dann strebt  $\tau(H)$  gegen  $C(h_e | H)$ , vgl. D. FERUS [2], Lemma 3.16.)

**Bemerkung.** Das obige Resultat kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, daß  $H$  nur stückweise glatt vorausgesetzt wird, wenn die Außenwinkel von konvexem Typ sind. Die Definition der totalen Absolutkrümmung ist hier geeignet zu modifizieren, indem man das Integral von  $|s^* dS^{n-1}|$  über die Außenwinkel hinzunimmt. Der Beweis kann auf den glatten Fall zurückgeführt werden, indem man die äußere Parallelfäche von  $H$  benutzt oder die von D. BRAESS [1] entwickelte Morse-Theorie von konvex berandeten Mannigfaltigkeiten anwendet.

Es sei nun  $G'$  die andere (unbeschränkte) Komponente des Komplementes von  $H$ . Wir betrachten  $H$  auch als Untermannigfaltigkeit von  $S^n = E^n \cup \{\infty\}$ .  $H$  berandet die kompakte Mannigfaltigkeit  $W' = H \cup G'\{\infty\}$ . Wir wollen zeigen, daß analog zu (7) auch

$$\tau(H) \geq 2\mu(W') \quad (8)$$

gilt. Zum Beweis betrachten wir eine Höhenfunktion  $h_e$  von  $E^n$ , welche eine Morse Funktion auf  $H$  induziert. Wir schränken  $h_e$  auf eine Kugel  $D$  ein, welche  $H$  im Innern enthält. Wir fassen  $D$  nun als eine Halbsphäre von  $S^{n-1}$  auf (von einem Meridian berandet) und setzen die Einschränkung von  $h_e$  zu einer Funktion mit nur zwei (nicht degenerierten) kritischen Punkten auf  $S^n$  fort. Nehmen wir das Innengebiet  $G$  aus  $S^n$  heraus, dann erhalten wir eine zu  $W'$  diffeomorphe Mannigfaltigkeit und eine  $m$ -Funktion auf ihr mit zwei kritischen Punkten, deren Einschränkung auf den Rand mit  $h_e$  übereinstimmt. Durch eine geeignete Prozedur (vgl. TH. FRIEDRICH [4], Hilfsatz 3) kann man die Funktion so abändern, daß die beiden kritischen Punkte verschwinden, ohne dabei die Anzahl der kritischen Punkte der Einschränkung auf den Rand zu ändern. Es gilt daher  $C(h_e | H) \geq \mu(W')$ , woraus die Ungleichung (8) unmittelbar folgt. Wie oben ergibt sich daraus

**Satz 4.** *Es sei  $H$  eine geschlossene zusammenhängende Hyperfläche in  $E^n$ , welche das unbeschränkte Gebiet  $G'$  berande. Für die totale Absolutkrümmung von  $H$  gilt die Ungleichung*

$$\tau(H) \geq \beta(H) + 4\sigma(G').$$

Insbesondere erhalten wir für eine geschlossene Fläche vom Geschlecht  $p$  in  $E^3$

$$\frac{1}{2\pi} \int |K| dH \geq 2(1 + p) + 4\sigma(G').$$

Für die Fläche in Abb. 3 gilt  $\pi_1 G' = Z$  und daher  $\sigma G' = 0$ . Ein Beispiel für einen verknoteten Torus mit  $\sigma G' \neq 0$  erhält man durch Aufblasen eines Knotens (Abb. 4).

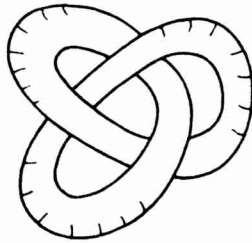


Abb. 4

Wir wissen nicht, ob es verknotete Flächen gibt, für die  $\sigma(G) = 0$  und  $\sigma(G') = 0$  gilt. Zumindest gilt aber

**Satz 5** (H. MORTON [9]). *Es sei  $H$  eine geschlossene Fläche in  $E^3$ . Wenn es eine Höhenfunktion  $h_e$  gibt, die auf  $H$  eine Morse-Funktion mit weniger als  $2(1 + p) + 4$  kritischen Punkten induziert, dann ist  $H$  unverknotet.*

**Beweis.**  $H$  zerlegt wie oben  $S^3$  in zwei Mannigfaltigkeiten  $W$  und  $W'$  mit gemeinsamem Rand  $H$ . Nach F. WALDHAUSEN [12] ist  $H$  unverknotet, wenn  $W$  und  $W'$  „Brezeln“ sind, d. h. aus der Vollkugel durch Anbringen von Henkeln vom Index 1 entstehen. (Deren Anzahl ist dann aus homologischen Gründen gleich  $p$ .) Es genügt daher zu zeigen, daß  $\bar{\mu}(W) = \bar{\mu}(W') = 1 + p$  gilt. Zunächst gilt nach (2)

$$C(h_e | W) \geq 2\bar{\mu}(W) \geq 2(1 + p).$$

Daher sind nur die beiden Fälle  $\bar{\mu}(W) = 1 + p$  und  $\bar{\mu}(W) = 2 + p$  möglich. Der zweite Fall kommt jedoch nicht in Frage, da  $\bar{\mu}(W) \equiv \chi(W) \pmod{2}$  gilt. (Dies folgt leicht aus der Tatsache, daß die Zellenanzahl eines  $CW$ -Komplex kongruent mod 2 zur Eulerschen Charakteristik des Komplex ist.) Analog wird  $\bar{\mu}(W') = 1 + p$  gezeigt.

(Dies ist, von technischen Feinheiten abgesehen, im wesentlichen der Beweis von H. MORTON.)

**Folgerung.** *Ist  $H$  eine verknotete Fläche vom Geschlecht  $p$  in  $E^3$ , so gilt für die totale absolute Gaußsche Krümmung*

$$\frac{1}{2\pi} \int |K| dH \geq 2(1 + p) + 4.$$

Es sei nun  $W$  eine kompakte Untermannigfaltigkeit des  $E^n$  mit möglicherweise nicht-leerem Rand  $\partial W$ . Die totale Absolutkrümmung  $\tau(W)$  definieren wir auf folgende Weise. Zu  $\varepsilon > 0$  betrachten wir den Parallelkörper  $W_\varepsilon$  von  $W$ , der aus allen Punkten des  $E^n$  besteht, deren Abstand zu  $W$  den Wert  $\varepsilon$  nicht übersteigt. Den Rand von  $W_\varepsilon$  bezeichnen wir mit  $M_\varepsilon$ . Wir definieren dann

$$\tau(W) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{c_{n-1}} \int_{M_\varepsilon} |K| dM_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \tau(M_\varepsilon).$$



Offenbar gilt für eine Hyperfläche  $W$

$$\tau(W) = \frac{2}{c_n} \int |K| dW + \frac{1}{2} \tau(\partial W). \quad (9)$$

Die totale Absolutkrümmung  $\tau(W)$  wurde bereits von verschiedenen Autoren für Mannigfaltigkeiten definiert und untersucht (vgl. N. GROSSMAN [5], TH. FRIEDRICH [4], W. KUHNEL [7]). Wir erwähnen hier nur die bekannte Ungleichung

$$\tau(W) \geq \beta(W),$$

welche leicht aus der Chern-Lashof-Ungleichung  $\tau(M_i) \geq \beta(M_i)$  folgt. Wir wollen diese Ungleichung verbessern, indem wir den Homotopietyp von  $E^n - W$  berücksichtigen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß  $W$  eine berandete Hyperfläche ist. (Bei höherer Kodimension ist  $E^n - W$  einfach zusammenhängend, wenn  $W$  zusammenhängend ist und einen nicht leeren Rand hat. Für geschlossene Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 2 siehe P. WINTGEN [13].) Wenden wir Satz 4 auf  $M_i$  an, dann erhalten wir  $\tau(W) \geq \mu(S^n - \text{Int } W_i)$  und somit nach (3)

$$\begin{aligned} \tau(W) &\geq \frac{1}{2} \beta(M_i) + 2\sigma(S^n - \text{Int } W_i) = \beta(W_i) + 2(E^n - W_i) \\ &= \beta(W) + 2\sigma(E^n - W). \end{aligned}$$

(Wir bemerken, daß  $M_i$  gewisse Singularitäten über  $\partial W$  besitzt und daher nur eine  $C_1$ -Mannigfaltigkeit ist. Diese Singularitäten sind jedoch schwach genug, um nicht berücksichtigt werden zu müssen.) Damit erhalten wir

**Satz 6.** *Es sei  $W$  eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche mit Rand in  $E^n$ . Für die totale Absolutkrümmung  $\tau(W)$  gilt*

$$\tau(W) \geq \beta(W) + 2\sigma(E^n - W).$$

Insbesondere erhalten wir für eine berandete Fläche  $W$  in  $E^3$

$$\frac{1}{2\pi} \int |K| dW + \frac{1}{2\pi} \int k ds \geq \beta(W) + 2\sigma(E^3 - W).$$

R. LANGEVIN und H. ROSENBERG [8] betrachteten für berandete Hyperflächen eine Integralkrümmung, welche wir mit unseren Bezeichnungen als

$$\tau'(W) = \tau(W) + \frac{1}{2} \tau(\partial W)$$

schreiben können. Wir schätzen beide Summanden einzeln ab. Den ersten schätzen wir mit Hilfe von Satz 6 ab. Für den zweiten beachten wir, daß für die totale Absolutkrümmung  $\tau(N)$  einer geschlossenen Untermannigfaltigkeit  $N$  der Kodimension 2 in  $E^n$  ( $n \geq 4$ )

$$\tau(N) \geq \mu(N) + 4\sigma(E^n - N) \quad (10)$$

gilt (P. WINTGEN [13]), wobei  $\mu(N)$  die Morse-Zahl von  $N$  bezeichnet. Daraus ergibt sich

**Satz 7.** *Für eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche  $W$  mit Rand in  $E^n$ ,  $n \geq 4$ , gilt*

$$\tau'(W) \geq \beta(W) + \frac{1}{2} \beta(\partial W) + 2\sigma(E^n - W) + 2\sigma(E^n - \partial W).$$

Für Kurven in  $E^3$  gilt statt (10) nur die schwächere Ungleichung  $\tau(N)/2 \geq 1 + \sigma(E^3 - N)$  (vgl. R. Fox [3]).

Für eine Fläche mit  $q$  Löchern (d. h., der Rand zerfällt in  $q$  einfach geschlossene Kurven  $C_1, \dots, C_q$ ) erhalten wir, indem wir die totale Krümmung der einzelnen Randkomponenten für sich abschätzen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_W |K| dW + \frac{1}{\pi} \int_{\partial W} k ds \\ & \geq \beta(W) + q + 2\sigma(E^3 - W) + \sum_{i=1}^q \sigma(E^3 - C_i). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir für  $q = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_W |K| dW + \frac{1}{\pi} \int_{\partial W} k ds \\ & \geq 1 + \beta(W) + 2\sigma(E^3 - W) + \sigma(E^3 - \partial W). \end{aligned}$$

Diese Formel sei illustriert durch ein Möbiusband  $M$  in  $E^3$  mit  $\sigma(E^3 - M) = 0$  und  $\sigma(E^3 - \partial M) = 1$  und einen einfach gelochten Torus  $T$  in  $E^3$  mit  $\sigma(E^3 - T) = 1$  und  $\sigma(E^3 - \partial T) = 0$  (Abb. 5 und Abb. 6).

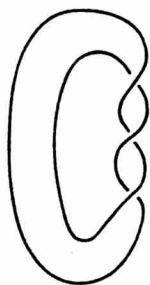


Abb. 5



Abb. 6

#### Zusatz bei der Korrektur

Satz 5 wurde unabhängig von MORION auch von W. MEEKS bewiesen. Die meisten unserer Ungleichungen für die Krümmungsintegrale wurden ebenfalls von SUSANA FORNARI gefunden. Lediglich in den höheren Dimensionen fallen ihre Ergebnisse etwas schwächer aus.

W. MEEKS, Escola de geometria diferencial, Juli 78.

S. FORNARI, Preprint IMPA Rio de Janeiro u. private Mitteilung.

**Berichtigung** zu meiner Arbeit „Über die totale Absolutkrümmung verknöteter Sphären“, diese Beiträge, Heft 9

In Bemerkung 10 haben wir behauptet, daß  $\tau(X) \geq 6$  für eine verknötete 2-Sphäre  $X$  in  $E^4$  gilt. Dies stützt sich auf ein Ergebnis von F. HOSOKAWA. Herr BOTHE machte mich darauf aufmerksam, daß der Beweis von HOSOKAWA eine Lücke hat. Es wird jedoch vermutet, daß der Satz von HOSOKAWA richtig ist (vgl. S. SUZUKI, conjecture 10.19).

Hilfssatz 1 und Folgerung 1 wurden ebenfalls von FULVIO LAZZERI gefunden, der auch bereits die Möglichkeit von knotentheoretischen Anwendungen erkannte.

F. LAZZERI, Ann. Univ. Ferrara (1978).

S. SUZUKI, Seminar Notes, Kobe University 1976.

#### LITERATUR

- [1] BRAESS, D.: Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 208 (1974), 133–148.
- [2] FERUS, D.: Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie. Lect. Notes in Math. 66, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1968.
- [3] FOX, R.: On the totale curvature of some tame knots. Ann. Math. 52 (1950), 258–261.
- [4] FRIEDRICH, TH.:  $m$ -Funktionen und ihre Anwendung auf die totale Absolutkrümmung. Math. Nachr. 67 (1975), 281–301.
- [5] GROSSMAN, N.: Relative Chern-Lashof theorems, J. Diff. Geom. 7 (1972), 607–614.
- [6] JANKOWSKI, A., and R. RUBINSZTEIN: Functions with nondegenerate critical points on manifolds with boundary. Comm. Math. 16 (1972), 99–112.
- [7] KÜHNEL, W.: Total curvature of manifolds with boundary in  $E^n$ . J. London Math. Soc. (2) 15 (1977), 173–182.
- [8] LANGEVIN, R., and H. ROSENBERG: On curvature integrals and knots. Topology 15 (1976), 405–416.
- [9] MORTON, H.: A criterion for an embedded surface in  $R^3$  to be unknotted (preprint).
- [10] RODRIGUEZ, L.: Convexity and tightness of manifolds with boundary (preprint).
- [11] SULANKE, R., und P. WINTGEN: Differentialgeometrie und Faserbündel, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Birkhäuser-Verlag, Basel–Stuttgart 1972.
- [12] WALDHAUSEN, F.: Heegardzerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7 (1968), 195–203.
- [13] WINTGEN, P.: Über die totale Absolutkrümmung verknöteter Sphären. Beiträge zur Algebra und Geometrie 9 (1979), 131–147.

Manuskripteingang: 27. 1. 1978

#### VERFASSEN:

PETER WINTGEN, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR