Werk

Titel: Zur Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten eines Kleinschen Raumes

Autor: SVEC, A.; SULANKE, R.

Jahr: 1980

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0010|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 63–85

Zur Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten eines Kleinschen Raumes

Rolf Sulanke und Alois Švec

Einleitung

Die von E. Cartan [4] stammende Methode des „repère mobile" zur Entwicklung der Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten eines Kleinschen Raumes $X^n = G^r/H^{r-n}$ ist seit langem bekannt und wurde in zahlreichen Spezialfällen erfolgreich angewandt, man vergleiche etwa W. Blaschke und H. Reichardt [1] und J. Favard [6]. Wie P. Griffiths [11] bemerkt, ist diese Methode jedoch kaum genügend theoretisch fundiert. In der vorliegenden Arbeit soll nun der Versuch gemacht werden, die E.-Cartansche Theorie in moderner Terminologie und präziser Form herauszuarbeiten. In § 1 werden zuerst das Äquivalenz- und das Kongruenzproblem formuliert; es wird der Begriff einer G-Invariante einer Klasse $\mathfrak{F}$ vom Immersionen eingeführt und gesagt, was wir unter einer Lösung des Kongruenzproblems verstehen wollen. Bekanntes Material über Transformationsgruppen wird in § 2 für die späteren Anwendungen aufbereitet. Der § 3 beginnt mit der Analyse der Struktur, die von einer Immersion $f\colon Y^m \to X^n$ über der Mannigfaltigkeit Y^m induziert wird. Hierdurch werden wir auf den für die Arbeit grundlegenden Begriff einer $\mathfrak{g},H$-Struktur über Y^m geführt, der ein Spezialfall eines von A. Švec [20] definierten Strukturbegriffs ist. Es wird ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen, aus dem folgt, daß die Isomorphieklassen global flacher $\mathfrak{g},H$-Strukturen den Äquivalenzklassen der Immersionen $f\colon Y^m \to X^n$ entsprechen. Wir lassen dabei auch zu, daß Y^m nicht einfach zusammenhängend ist. Es entsteht nun die Aufgabe, die $\mathfrak{g},H$-Strukturen durch geometrische Objekte über Y^m zu charakterisieren. Dazu kann das E.-Cartansche Reduktionsverfahren dienen, das wir in § 4 behandeln. Mit seiner Hilfe gelingt es oft, die $\mathfrak{g},H$-Strukturen in kanonischer Weise auf immer kleinere Untergruppen $H_l \subset H$ zu reduzieren und im günstigen Fall auf ein kanonisches begleitendes Reper zu kommen. Wir lehnen uns hier eng an E. Cartan an und vermeiden es, die dort mitunter unbefriedigende begriffliche Begründung durch einen komplizierteren, bei E. Cartan [4] nicht vorkommenden formalen Apparat zu ersetzen, der die geometrische Deutung und begriffliche Durchdringung eher erschweren als erleichtern würde. Es gelingt, die von E. Cartan stammende Methode geometrisch zu interpretieren und hinreichende Bedingungen für ihre Anwendbarkeit anzugeben. Das Wesentliche dieser Bedingungen liegt darin, daß es möglich sein muß, die im Verlaufe des Reduktionsprozesses auftretenden Transformationsgruppen in besonders einfache, von uns *normal* genannte Wirkungen aufzulösen. Wie wir in § 2 erörtern, ist diese Möglichkeit jedenfalls gegeben, wenn die Isotropiegruppe H kompakt ist. Die Orbitstruktur dieser Transformationsgruppen führt dann auf eine natürliche, durch die Geometrie des Raumes X^n bestimmte Einteilung der Immersionen

$f\colon Y^m \to X^n$ in gewisse Klassen $\mathfrak{F}$. Für einen Teil dieser Klassen findet man ein (bis auf diskrete Transformationen) bestimmtes kanonisches Reper, dessen Basisformen und Koeffizienten ein vollständiges System von G-Invarianten der Klasse $\mathfrak{F}$ bilden und somit das Kongruenzproblem lösen. Für gewisse Klassen $\mathfrak{F}$ kann bekanntlich auch der Fall eintreten, daß ein kanonisches Reper nicht existiert, weil die Immersionen hohe Symmetrieeigenschaften besitzen. In diesem Zusammenhang beweisen wir den bereits von E. CARTAN stammenden Satz, daß eine Immersion genau dann lokal ein Orbit einer Untergruppe $K \subset G$ in X^n ist, wenn sämtliche G-Invarianten $c\colon Y^m \to \mathbb{R}$ konstant sind. Der dazwischen liegende Fall, daß nicht konstante Invarianten existieren und die Reduktion bei einer Untergruppe H_l mit $\dim H_l > 0$ abbricht, wird von uns nicht behandelt. Es scheint erforderlich zu sein, hierzu erst einige interessante Beispiele aufzufinden und zu untersuchen. Im übrigen haben wir bewußt darauf verzichtet, in dieser Arbeit weitere Beispiele zu behandeln; mehr oder weniger einfache Beispiele kann man in der zitierten Literatur in großer Menge finden. In komplizierteren Fällen, insbesondere für große Dimensionen n, bleibt es natürlich immer noch eine schwierige Aufgabe, das Reduktionsverfahren praktisch durchzuführen und die damit verbundenen lokalen und globalen Fragen für jeden speziellen Kleinschen Raum zu behandeln. Natürlich gibt es auch zahlreiche Arbeiten zu der hier behandelten allgemeinen Problematik, man vgl. S. P. FINIKOV [7], H. GOLLEK [10], G. F. LAPTJEW [17], I. KOLÁŘ [15]. Enger verwandt mit den hier angewandten Methoden sind die Arbeiten von A. ŠVEC [20, 21], R. HERMANN [12] und L. BOČEK [2].

§ 1. Das Kongruenz- und das Äquivalenzproblem

Wir betrachten im folgenden Immersionen $f\colon Y^m \to X^n$ von zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Y^m der Dimension m in einen G-Raum X^n, über dem die Liesche Gruppe G^r von links wirkt; für $g \in G$ bezeichne $l_g\colon X^n \to X^n$ die g entsprechende Transformation. Alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten und Abbildungen seien von einer genügend hohen Differenzierbarkeitsklasse, etwa der Klasse C_∞. Hauptsächlich interessieren uns Immersionen in Kleinsche Räume, d. h. in transitive G-Räume X^n. Die Transitivität wird jedoch in § 1 noch nicht benötigt.

Definition 1. Die Immersionen $f\colon Y^m \to X^n$, $\bar{f}\colon \overline{Y}^m \to X^n$ heißen *äquivalent*, wenn ein Diffeomorphismus $\varphi\colon Y^m \to \overline{Y}^m$ und ein $g \in G$ existieren, so daß

$$\bar{f} = l_g \circ f \circ \varphi^{-1} \tag{1.1}$$

gilt. Äquivalente Immersionen heißen *kongruent*, wenn $Y^m = \overline{Y}^m$ ist und in (1.1) $\varphi = id_{Y^m}$ gesetzt werden kann, d. h. $\bar{f} = l_g \circ f$ ist.

Um zu entscheiden, wann zwei gegebene Immersionen kongruent bzw. äquivalent sind, versucht man, vollständige Invariantensysteme zu finden, deren Übereinstimmung die Kongruenz der Immersionen sichert. Zur Präzisierung des Begriffes einer Invariante einer Immersion f benötigen wir einige einfache Tatsachen über *geometrische Objekte*, für die wir auf N. H. KUIPER und K. YANO [16] verweisen. Geometrische Objektbündel k-ter Ordnung sind den Mannigfaltigkeiten Y^m in natürlicher Weise zugeordnet; es sind Faserbündel $p\colon E \to Y^m$, die zu den Hauptfaserbündeln der Repers k-ter Ordnung assoziiert sind. Zum Beispiel sind das Tangentialbündel oder allgemeiner die Tensorbündel über Y^m geometrische Objektbündel erster Ordnung, die linearen Zusammenhänge sind Schnitte in Objektbündeln zweiter

Ordnung, und Funktionen $h\colon Y^m \to V$, V irgendeine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sind Schnitte in trivialen Objektbündeln $E = Y^m \times V$, $p = \mathrm{pr}_2\colon E \to V$, den Objektbündeln nullter Ordnung. Die für uns wichtigste Eigenschaft der geometrischen Objekte findet ihren Ausdruck in dem folgenden Satz:

Satz 1.1. *Ist $\varphi\colon Y^m \to \overline{Y}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus und sind $E(Y^m, p, F)$, $\overline{E}(\overline{Y}^m, \overline{p}, F)$ geometrische Objektbündel über Y^m bzw. $\overline{Y}^m$ desselben Typs F und derselben Ordnung k, so existiert eine kanonisch definierte Hebung $\varphi_*\colon E \to \overline{E}$ von φ in die Bündelräume, für die*

$$\overline{p} \circ \varphi_* = \varphi \circ p \tag{1.2}$$

gilt. φ_* ist ein lokaler Diffeomorphismus, und bijektiv genau dann, wenn φ bijektiv ist. □

Für einen Diffeomorphismus φ definiert

$$\overline{y} \in \overline{Y}^m \mapsto (\varphi_* s)(\overline{y}) := \varphi_* \circ s \circ \varphi^{-1}(\overline{y}) \in \overline{E} \tag{1.3}$$

zu jedem Schnitt s von $p\colon E \to Y^m$ einen Schnitt von $\overline{p}\colon \overline{E} \to \overline{Y}^m$, *das Bild $\varphi_* s$ von s bei φ*. Im folgenden wollen wir unter einem *geometrischen Objekt über Y^m* einen Schnitt eines geometrischen Objektbündels über Y^m verstehen; gewöhnlich kommt man in den klassischen Fällen der Differentialgeometrie der Immersionen mit den oben erwähnten Beispielen geometrischer Objekte aus. Es bezeichne $\mathrm{Ob}(Y^m)$ die Klasse aller geometrischen Objekte über Y^m und $\mathrm{Ob}(m)$ die Vereinigung $\mathrm{Ob}(m) = \bigcup_{Y^m} \mathrm{Ob}(Y^m)$.

Definition 1.2. Es sei $\mathfrak{F}$ eine gegenüber Äquivalenz abgeschlossene Klasse von Immersionen m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in einen festen G-Raum X^n. Unter einer *G-Invarianten der Klasse* $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine Zuordnung $I\colon \mathfrak{F} \to \mathrm{Ob}(m)$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Für $f\colon Y^m \to X^n$, $f \in \mathfrak{F}$, ist $I(f) \in \mathrm{Ob}(Y^m)$ ein geometrisches Objekt über Y^m von einem festen, nur von I und nicht von f abhängendem Typ F. — 2. I ist G-invariant, d. h., für alle $f \in \mathfrak{F}$, $g \in G$ gilt

$$I(l_g \circ f) = I(f).$$

3. I ist invariant gegenüber Diffeomorphismen, d. h., ist $\varphi\colon Y^m \to \overline{Y}^m$ ein Diffeomorphismus und φ_* die Hebung von φ in die geometrischen Objektbündel vom Typ F, so gilt

$$I(f \circ \varphi^{-1}) = \varphi_*(I(f)).$$

Unter einer *Lösung des Kongruenzproblems* für die Klasse $\mathfrak{F}$ verstehen wir die Angabe einer endlichen Folge $(I_1, \ldots, I_k)$ von G-Invarianten der Klasse $\mathfrak{F}$ derart, daß zwei Immersionen $f, \bar{f}\colon Y^m \to X^n$ der Klasse $\mathfrak{F}$ genau dann kongruent sind, wenn $I_\varkappa(f) = I_\varkappa(\bar{f})$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ gilt; $(I_1, \ldots, I_k)$ heißt dann ein *vollständiges Invariantensystem für* $\mathfrak{F}$. Schwieriger als das Kongruenzproblem ist das folgende *Äquivalenzproblem* zu behandeln: Es seien Immersionen $f\colon Y^m \to X^n$, $\bar{f}\colon \overline{Y}^m \to X^n$ gegeben. Unter welchen Bedingungen sind sie äquivalent? Wir werden uns in dieser Arbeit mit dem Äquivalenzproblem nicht beschäftigen. Es sei nur das folgende, in der Differentialgeometrie in vielen Spezialfällen angewandte Kriterium formuliert, dessen Beweis trivial ist:

Satz 1.2. *Es sei $(I_1, \ldots, I_k)$ ein vollständiges Invariantensystem für eine Klasse $\mathfrak{F}$ von Immersionen in den G-Raum X^n. Die Immersionen $f, \bar{f} \in \mathfrak{F}$ sind genau dann äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi\colon Y^m \to \overline{Y}^m$ gibt mit $I_\varkappa(\bar{f}) = \varphi_*(I_\varkappa(f))$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$.* □

§ 2. Kleinsche Räume und homogene Faserbündel

In diesem Paragraphen stellen wir einige Begriffe und Fakten zusammen, die im folgenden benötigt werden. Die hier nicht erklärten Bezeichnungen findet man in [19]. Es sei X^n jetzt ein Kleinscher Raum, also G transitiv über X^n. Wir wählen einen beliebigen, festen Punkt $x_0 \in X^n$ als Ursprung und bezeichnen mit H die Isotropiegruppe des Punktes x_0. Bekanntlich können wir dann X^n mit dem Raum der Linksnebenklassen $G^r/H^{r-n} = \{gH\}_{g\in G}$ identifizieren. Wir erhalten so ein Hauptfaserbündel $\pi: G \to G/H = X^n$ mit der Projektion $\pi: g \mapsto gH$ und der Strukturgruppe H, über dem die Gruppe G mittels der Linkstranslationen L_g, $L_g(z) = gz$, als Gruppe von Bündelautomorphismen wirkt, wobei

$$\pi \circ L_g = l_g \circ \pi \tag{2.1}$$

für alle $g \in G$ gilt. Die zu dem Hauptfaserbündel $\pi: G \to X^n$ assoziierten Faserbündel $p: E \to X^n$ nennen wir *homogene Faserbündel*; sie sind durch Vorgabe einer Wirkung der Isotropiegruppe H auf dem Fasertyp F von E eindeutig bestimmt. Auf jedem dieser Bündel E wirkt die Gruppe G als eine Gruppe von Faserisomorphismen, welche die Fasern transitiv vertauscht, diese Wirkung ist durch

$$(g, u) \in G \times E \mapsto \lambda_g(u) := [ga] \circ [a]^{-1}(u) \quad \big(a \in \pi^{-1}(p(u))\big) \tag{2.2}$$

differenzierbar und korrekt definiert (vgl. [19], § II.2), und es gilt

$$p \circ \lambda_g = l_g \circ p \qquad (g \in G). \tag{2.3}$$

Wir zeigen

Satz 2.1. *Es sei $X^n = G^r/H^{r-n}$ ein Kleinscher Raum, E^N ein G-Raum mit den Transformationen λ_g, $g \in G^r$, und $p: E^N \to X^n$ eine G-Invariante, d. h., es gelte wieder* (2.3); *p sei eine Submersion. Dann gibt es zu $p: E^N \to X^n$ eine eindeutig bestimmte Faserbündelstruktur, so daß E der Bündelraum eines zu $\pi: G \to X^n$ assoziierten homogenen Faserbündels mit dem Fasertyp $E_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ und der Wirkung*

$$(h, u) \in H \times E_{x_0} \mapsto \lambda_h(u) \in E_{x_0} \tag{2.4}$$

von H über E_{x_0} wird; die Wirkung (2.2) *von G über E^N stimmt mit der vorgegebenen Wirkung λ von G über E^N überein.*

Beweis. Weil G über X^n transitiv wirkt, vertauscht G die Fasern $E_x = p^{-1}(x)$ von E^N transitiv, und $p: E^N \to X^n$ ist wegen (2.3) surjektiv. Offenbar bestimmt (2.4) eine Transformationsgruppe $[H, E_{x_0}]$. Wir definieren (mit $x_0 = \pi(e)$)

$$(g, u) \in G \times E_{x_0} \mapsto [g]\,u := \lambda_g(u) \in E^N. \tag{2.5}$$

Dann gilt wegen (2.3) auch $[g]\,u \in E_x$ mit $x = \pi(g)$, und wir erhalten wegen $h \times g = gh^{-1}$

$$[h \times g] = [g] \circ \lambda_h^{-1} \qquad (h \in H, g \in G). \tag{2.6}$$

Ferner gilt

$$[g]^{-1}(u) = \lambda_g^{-1} u \quad \big(u \in E_x, x = \pi(g)\big). \tag{2.7}$$

Ist nun $(U_\iota, g_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie lokaler Schnitte von $\pi: G \to X^n$ mit den Übergangsfunktionen $h_{\varkappa\iota}$, so definiert

$$u \in p^{-1}(U_\iota) \mapsto \psi_\iota(u) := \big(p(u), [g_\iota(p(u))]^{-1} u\big) \in U_\iota \times E_{x_0} \tag{2.8}$$

Bündelkarten, die wegen (2.6) das entsprechende Transformationsverhalten haben:

$$[g_\varkappa]^{-1} = [h_{\varkappa\iota} \times g_\iota]^{-1} = \lambda_{h_{\varkappa\iota}} \circ [g_\iota]^{-1}. \tag{2.9}$$

Damit ist E^N das zu $\pi: G \to X^n$ assoziierte Faserbündel mit dem Fasertyp E_{x_0} und der Wirkung (2.4) von H. Aus (2.2), (2.5) und (2.7) folgt sofort $gu = [ga] \circ [a]^{-1} u = \lambda_{ga} \circ \lambda_{a^{-1}} u = \lambda_g u$ für alle $u \in E^N$, $g \in G$ und $a \in \pi^{-1}(p(u))$. □

Nach Satz 1.1 erfüllen speziell die geometrischen Objektbündel die Voraussetzungen von Satz 2.1. Also gilt

Folgerung 2.1. *Jedes geometrische Objektbündel $p: E \to X^n$ über einem Kleinschen Raum $X^n = G/H$ ist ein zu $\pi: G \to X^n$ assoziiertes homogenes Faserbündel mit dem Fasertyp E_{x_0} und der Wirkung*

$$(h, u) \in H \times E_{x_0} \mapsto h_* u \in E_{x_0} \tag{2.10}$$

von H über E_{x_0}. Dabei gilt

$$[g]\ (u) = g_* u \qquad (u \in E_{x_0}), \tag{2.11}$$

$$[g]^{-1}\ (u) = g_*^{-1} u \qquad (u \in E_{\pi(g)}), \tag{2.12}$$

$$[h \times g]^{-1} = h_* \circ [g]^{-1} \quad (h \in H, g \in G). \ \square \tag{2.13}$$

Die Wirkung von G über homogenen Faserbündeln ist natürlich im allgemeinen nicht transitiv. Daher benötigen wir auch einige Begriffe über nicht transitive Transformationsgruppen $[G, E]$. Für beliebiges $u \in E$ heißt die Menge $Gu := \{gu\}_{g \in G}$ der *G-Orbit* von u. Die Orbits zerlegen E in paarweise disjunkte Teilmengen und bestimmen daher eine Äquivalenzrelation über E, die zu dem Faktorraum $\hat{E} := E/G$, dem *Orbitraum von E unter der Wirkung von G*, führt. $\hat{E}$ denken wir uns stets mit der *Faktortopologie* versehen, das ist diejenige Topologie, für die die kanonische Abbildung $q: E \to \hat{E}$ offen und stetig ist. Zwei Orbits Gu, Gv heißen von *demselben Typ*, wenn die Isotropiegruppen H_u, H_v von u bzw. v zueinander konjugiert sind; ein *Orbittyp* ist also eine Klasse konjugierter Untergruppen $(H_u) := \{gH_u g^{-1}\}_{g \in G}$.

Satz 2.2. *Es sei $X^n = G/H$ ein Kleinscher Raum und $p: E^N \to X^n$ ein homogenes Faserbündel, wobei H die Isotropiegruppe des Punktes $x_0 \in X^n$ sei. Für $\tilde{E}_{x_0} := E_{x_0}/H$ und $\hat{E} := E^N/G$ ist die Zuordnung*

$$\alpha: \tilde{u} = Hu \in \tilde{E}_{x_0} \mapsto \hat{u} := Gu \in \hat{E} \quad (u \in E_{x_0}) \tag{2.14}$$

ein Homöomorphismus der Orbiträume. Der Orbittyp von u bezüglich H ist enthalten im Orbittyp von u bezüglich G.

Wir verzichten auf den einfachen Beweis dieses Satzes, der auf der Homogenität des Faserbündels und der Eigenschaft $Hu = Gu \cap E_{x_0}$ für alle $u \in E_{x_0}$ beruht. Die Orbitstruktur des Bündelraumes eines homogenen Faserbündels wird also völlig durch die Wirkung von H über E_{x_0} bestimmt, was wir im folgenden häufig anwenden werden. □

Eine Wirkung von G über E^N heißt *regulär*, wenn auf $\hat{E}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeitsstruktur existiert, so daß die kanonische Abbildung $q: E \to \hat{E}$ eine Submersion ist; diese differenzierbare Struktur ist dann eindeutig bestimmt (vgl. J. Dieudonné [5], Satz 16.10.3). Im allgemeinen sind selbst die einfachsten linearen Wirkungen der kompakten klassischen Gruppen nicht regulär. Häufig kann man jedoch invariante Untermannigfaltigkeiten von E finden, über denen die Einschränkung der Wirkung von G regulär ist. Für den Orbittyp (K) einer Transformationsgruppe $[G, E]$ bezeichnen wir mit $E_{(K)}$ die Menge derjenigen Punkte $u \in E$, deren Isotropiegruppen zu K konjugiert ist. Dann gilt

Satz 2.3. *Es sei $p: E^N \to X^n = G/H$ ein homogenes Faserbündel; die Isotropiegruppe H von $x_0 \in X^n$ sei kompakt. Ist (K) ein Orbittyp von E unter der Wirkung von G, so sind die zusammenhängenden Komponenten von $E_{(K)}$ differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von E^N (die eventuell verschiedene Dimension haben können). Bezeichnet $E^s_{(K)}$ die Vereinigung der s-dimensionalen Komponenten von $E_{(K)}$, so ist $E^s_{(K)}$ eine invariante Untermannigfaltigkeit von E^N, über der G regulär wirkt. Wenn der Fasertyp $F = E_{x_0}$ von E^N kompakt ist, gibt es nur endlich viele Orbittypen in E.*

Beweis. Nach Satz 2.2 können wir $K \subset H$ voraussetzen. Nach einem bekannten Satz über die Wirkung kompakter Gruppen ist $E_{x_0(K)}$ eine H-invariante Untermannigfaltigkeit von E_{x_0}, über der H regulär wirkt (vgl. A. BOREL [3] oder K. JÄNICH [13], S. 6). Offenbar gilt $GE_{x_0(K)} = E_{(K)}$. Es bezeichne p_K die Einschränkung $p \mid E_{(K)}$. Man erkennt leicht, daß die Abbildungen (Bezeichnungen analog (2.8))

$$(x, u) \in U_i \times E_{x_0(K)} \mapsto g_i(x)\, u \in p_K^{-1}(U_i) \tag{2.15}$$

bijektiv sind; ihre Inversen sind eine Familie von Bündelkarten, für die $p_K: E_{(K)} \to X^n$ ein differenzierbares, homogenes Faserbündel über X^n mit dem Fasertyp $E_{x_0}(K)$ wird. Aus Homogenitätsgründen gilt eine analoge Aussage auch für $E^s_{(K)}$. Die Regularität der Wirkung von G über $E^s_{(K)}$ erhält man aus Satz 2.2 und dem oben zitierten Satz über die Wirkung kompakter Gruppen. Die Existenz von nur endlich vielen Orbittypen im Fall einer kompakten Faser folgt analog aus einem bekannten Satz über Transformationsgruppen, vgl. K. JÄNICH [13], S. 5. □

Für das zu beschreibende Reduktionsverfahren reicht jedoch die Regularität der Wirkung noch nicht aus. Wir geben daher folgende

Definition 2.1. Eine Wirkung der Lieschen Gruppe G über der Mannigfaltigkeit E^N heißt *normal*, wenn sie regulär ist und eine differenzierbare Abbildung $s: \hat{E} \to E$ mit den folgenden Eigenschaften existiert: 1. $q \circ s = \mathrm{id}_{\hat{E}}$; 2. alle $s(\hat{u})$ haben dieselbe Isotropiegruppe K.

Offenbar haben alle Orbits einer normalen Wirkung denselben Orbittyp. Weil ds maximalen Rang hat, ist $s: \hat{E} \to E$ eine Immersion; Lemma 2.1 (s. u.) zeigt, daß $s(\hat{E})$ ein Schnitt in einem trivialen Faserbündel und folglich eine Untermannigfaltigkeit ist. Denken wir uns einen Schnitt s mit den Eigenschaften 1 und 2 fest gegeben, so nennen wir $s(E)$ eine *Normalformenmannigfaltigkeit* für die Wirkung von G über E; sie kann mit $\hat{E}$ identifiziert werden. Das Element $s\big(q(u)\big)$ heißt dann die *Normalform von $u \in E$*.

Lemma 2.1. *Die Liesche Gruppe G wirke normal über der Mannigfaltigkeit E^N. Die Abbildung $s: \hat{E} \to E^N$ definiere eine Normalformenmannigfaltigkeit mit der Isotropiegruppe K. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi: (\bar{g}, \hat{u}) \in (G/K) \times (E/G) \mapsto \bar{g}s(\hat{u}) := gs(\hat{u}) \in E^N \tag{2.16}$$

ein Diffeomorphismus; wirkt G durch $g(lK, \hat{u}) = (glK, \hat{u})$ über dem Produktraum, so ist φ ein Isomorphismus der G-Räume.

Beweis. Die Abbildung (2.16) ist offenbar korrekt definiert und bijektiv. Sie ist differenzierbar, wie man durch Wahl differenzierbarer lokaler Schnitte $\bar{h} \in \bar{U} \mapsto g(\bar{h}) \in G$, $\bar{U} \subset G/K$ offen, der kanonischen Abbildung $\pi_0: G \to G/K$ erkennt. Weil wegen der Regularität der Wirkung $N = \dim \hat{E} + \dim G/K$ gilt, genügt es, Rang $d\varphi = N$ zu zeigen. Wir betrachten zuerst $\varphi: (g, \hat{u}) \in G \times \hat{E} \mapsto u = gs(\hat{u}) \in E^N$ und zeigen Rang $d\varphi = N$. Für das Bild des Differentials gilt $\mathrm{Im}\, d\varphi_{(g,\hat{u})} = T_u(Gu) + dl_g \circ ds_{\hat{u}}(T_{\hat{u}}(\hat{E}))$. Nach Definition der Orbitmannigfaltigkeit ist $q: E \to \hat{E}$ eine

Submersion, also $\dim \hat{E} = \dim E - \dim Gu$. Weil s eine Immersion und l_g ein Diffeomorphismus ist, gilt $N = \dim T_u(Gu) + \dim dl_g \circ ds_q(T_q(\hat{E}))$. Andererseits ist der Durchschnitt dieser Vektorräume $\{0\}$; aus $dl_g \circ ds_u(t) \in T_u(Gu)$ folgt nämlich $dq \circ dl_g \circ ds_q(t) = dq \circ ds_q(t) = t$ nach Eigenschaft 1 von Definition 2.1. Nun ist $\varphi = \psi \circ (\pi_0, \mathrm{id}_{\mathfrak{k}})$, woraus wegen $N = \operatorname{Rang} d\varphi \leqq \operatorname{Rang} d\psi \leqq N$ die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung ist trivial. □

Wir bemerken, daß E. CARTAN beim Auftreten intransitiver Wirkungen stets die in (2.16) beschriebene Situation voraussetzt, vgl. [4], §§ 103, 119, 127. Da im allgemeinen eine Wirkung nicht einmal regulär ist, kommt es darauf an, *möglichst große* invariante Untermannigfaltigkeiten $E_1 \subset E$ zu finden, über denen G normal wirkt; über einem Orbit Gu ist ja die Wirkung trivialerweise normal. Daß dies in den klassischen Fällen oft gelingt, zeigen wieder analoge Überlegungen wie beim Beweis von Satz 2.3. Zunächst folgt aus Satz 2.2 und der Definition 2.1 unmittelbar, daß die Wirkung von G über einem homogenen Faserbündel E genau dann normal ist, wenn die Wirkung von H über der Faser E_{x_0} diese Eigenschaft besitzt; eine Normalformenmannigfaltigkeit für E_{x_0}/H ist gleichzeitig Normalformenmannigfaltigkeit für E/G. Wenn H kompakt ist, folgt die lokale Existenz von Normalformenmannigfaltigkeiten aus dem oben zitierten Satz über Orbitbündel. Nach diesem Satz ist die Menge $P := \{u \in E_{x_0} \mid H_u = K\}$ ein differenzierbares Hauptfaserbündel über der Orbitmannigfaltigkeit $E_{x_0(K)}/H$ mit der Strukturgruppe N_K/K, wobei N_K den Normalisator von K in H bezeichnet. Die lokalen Schnitte dieses Bündels sind als Normalformenmannigfaltigkeiten geeignet. Sätze über die Wirkung nicht kompakter Transformationsgruppen findet man bei H. GOLLEK [9], [10]. Wir behandeln noch kurz zwei einfache Beispiele, die den folgenden Betrachtungen zugrunde liegen.

Beispiel 2.1. *Das Tangentialbündel TX^n eines Kleinschen Raumes* ist ein homogenes Vektorraumbündel. Es gilt $g_* = dl_g$, $g \in G$, und die (2.10) entsprechende Wirkung ist die *lineare Isotropiedarstellung* des Kleinschen Raumes $h \in H \mapsto (dl_h)_{x_0} \in GL(T_{x_0}(X^n))$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \ldots$ die Lie-Algebren von $G, H, \ldots$ und identifizieren oft $\mathfrak{g} = T_e G$; zur Vereinfachung der Bezeichnungen schreiben wir auch π statt $d\pi$. Wegen $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker} \pi$ erhalten wir eine Identifizierung

$$\dot{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \mapsto \pi(X) \in T_{x_0}(X^n); \tag{2.17}$$

sie ist eine Äquivalenz der linearen Isotropiedarstellung mit der Darstellung

$$h \in H \mapsto \dot{Ad}(h) \in GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \tag{2.18}$$

die repräsentantenweise definiert wird. Ist beispielsweise X^n ein symmetrischer Raum konstanter Schnittkrümmung, so wirkt die Isometriegruppe normal über dem Komplement E des Nullschnittes von TX^n, eine von $0 \in T_{x_0}(X^n)$ ausgehende, in diesem Vektorraum liegende Halbgerade ist eine Normalformenmannigfaltigkeit, und es gilt $\hat{E} \approx \mathbb{R}^+$ ist diffeomorph zur Menge der positiven reellen Zahlen. Für die Tangentialbündel der Graßmann-Mannigfaltigkeiten und der Räume von m-Ebenen des euklidischen Raumes E^n ist die Vereinigung aller Elemente vom Hauptorbittyp eine normale invariante Untermannigfaltigkeit, für die Normalformenmannigfaltigkeiten (nicht ganz explizit) in [18] angegeben wurden. Weil das Tangentialbündel TX^n ein über die Darstellung (2.18) zum Hauptfaserbündel $\pi: G \to X^n$ assoziiertes Vektorraumbündel ist, entspricht der 1-Form id_{TX} auf X^n mit Werten in TX^n eine tensorielle 1-Form ϑ vom Typ $\dot{Ad}$ auf G; aus [19], (II, 9.14), (2.12) und (2.1) folgt

$$\vartheta_g = d(l_{g^{-1}} \circ \pi)_g = \pi \circ (dL_{g^{-1}})_g = \pi \circ \omega, \tag{2.19}$$

wobei $g \in G$ gilt und $\omega = dL_{g^{-1}}\, dg$ die *Strukturform von G* bezeichnet. ϑ entspricht der kanonischen Form des Reperbündels und soll deshalb die *kanonische Form des Kleinschen Raumes* genannt werden.

Beispiel 2.2. Für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X^n ist die Menge $G_m(X^n)$ der m-dimensionalen Unterräume von X^n ein geometrisches Objektbündel mit dem Fasertyp $G_{n,m}$ — der Graßmann-Mannigfaltigkeit der m-Ebenen des $\mathbb{R}^n$. Für einen Kleinschen Raum X^n identifizieren wir $\mathbb{R}^n = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ und bemerken, daß $G_m(X^n)$ ein homogenes Faserbündel ist, für das die Wirkung von H über $G_{n,m}$ durch die lineare Isotropiedarstellung (oder (2.18)) induziert wird.

§ 3. $\mathfrak{g}$,H-Strukturen und ein allgemeiner Existenzsatz

Es sei $X^n = G^r/H^{r-n}$ ein Kleinscher Raum und $f\colon Y^m \to X^n$ eine Immersion. f induziert aus $\pi\colon G \to X^n$ ein Hauptfaserbündel $E_0(Y^m, H, p_0)$ und eine Immersion $\tilde{f}\colon E_0 \to G$, so daß

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & G^r \\ {\scriptstyle p_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y^m & \xrightarrow{f} & X^n \end{array} \tag{3.1}$$

kommutativ und $(\tilde{f}, \mathrm{id}_H)$ ein Homomorphismus ist. Dabei gilt

$$\begin{aligned} E_0 &:= \{(y, g) \mid (y, g) \in Y^m \times G \quad \text{mit} \quad g x_0 = f(y)\}, \\ \tilde{f} &= \mathrm{pr}_G \mid E_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Strukturform ω und die kanonische Form ϑ bestimmen entsprechende Formen $\omega_0 := \tilde{f}^*\omega$, $\vartheta_0 := \tilde{f}^*\vartheta$ auf E_0, für die $\vartheta_0 = \pi \circ \omega_0$ gilt. Das Hauptfaserbündel E_0 heißt *Bündel nullter Ordnung* und ω_0 (bzw. ϑ_0) die *Strukturform* (bzw. *kanonische Form*) *nullter Ordnung der Immersion f*. Die Form ω_0 hat offenbar folgende Eigenschaften:

1. *ω_0 ist eine 1-Form auf E_0 vom Typ $Ad\,|\,H$ mit Werten in $\mathfrak{g}$. Bezeichnet $\sigma_h\colon E_0 \to E_0$ die Wirkung von H als Strukturgruppe von E_0, so gilt für alle $h \in H$*

$$\sigma_h^* \omega_0 = Ad(h) \circ \omega_0. \tag{3.3}$$

2. *Für jedes fundamentale Vektorfeld $\tilde{A}$ auf E_0, $A \in \mathfrak{h}$, gilt*

$$\omega_0(\tilde{A}) = A. \tag{3.4}$$

3. *ω_0 erfüllt die Strukturgleichung*

$$d\omega_0 = -\frac{1}{2}\,[\omega_0, \omega_0]. \tag{3.5}$$

4. *Es gilt Rang $\pi \circ \omega_0 = m$.*

Zum Beweis der Eigenschaften 1 und 2 verfährt man genauso wie beim Beweis der entsprechenden Eigenschaften einer Zusammenhangsform, [19], § II.7; Eigenschaft 3 ergibt sich unmittelbar aus der Strukturgleichung der Lieschen Gruppe G; schließlich folgt aus der Immersionseigenschaft $\mathrm{rg}\, df_y = m$ für alle $y \in Y^m$ wegen (3.1) und (2.19) (mit $g = f(z)$, $z \in E_0$):

$$(\vartheta_0)_z = dl_{g^{-1}} \circ d\pi \circ (d\tilde{f})_z = dl_{g^{-1}} \circ df \circ (dp_0)_z. \tag{3.6}$$

Weil dp_0 surjektiv ist, erhalten wir

$$\operatorname{Im}(\vartheta_0)_z = dl_{g^{-1}} \operatorname{Im}(df)_y, \quad y = p_0(z), \tag{3.7}$$

woraus sich Eigenschaft 4 unmittelbar ergibt.

Definition 3.1. Unter einer $\mathfrak{g},H$-*Struktur* $E_0(Y^m, \omega_0)$ *auf* Y^m verstehen wir ein Hauptfaserbündel $E_0(Y^m, H, p_0)$, über dem eine *Strukturform* ω_0 gegeben ist, welche die Eigenschaften 1 bis 4 besitzt. Ein Isomorphismus $\varphi_0: E_0 \to E_0'$ der Hauptfaserbündel mit dem zugehörigen Gruppenisomorphismus id_H heißt *Isomorphismus der* $\mathfrak{g},H$-*Strukturen* $E_0(Y^m, \omega_0)$, $E_0'(Y'^m, \omega_0')$, wenn $\omega_0 = \varphi_0^* \omega_0'$ gilt.

Satz 3.1. *Jede Immersion* $f: Y^m \to X^n = G/H$ *induziert eine* $\mathfrak{g},H$-*Struktur* $E_0 = f^*G$, $\omega_0 = \tilde{f}^* \omega$ *auf* Y^m, *nämlich Bündel und Strukturform nullter Ordnung. Äquivalente Immersionen induzieren isomorphe* $\mathfrak{g},H$-*Strukturen.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist nur eine Zusammenfassung des bereits Bewiesenen. Zum Beweis der zweiten Behauptung nehmen wir an, daß f und $f' = l_g \circ f \circ \varphi^{-1}$ äquivalente Immersionen sind. Wir definieren

$$\varphi_0: (y, a) \in E_0 \mapsto \big(\varphi(y), ga\big) \in E_0'.$$

Aus $f' \circ \varphi = l_g \circ f$ folgt $\pi(ga) = l_g \circ \pi(a) = l_g \circ f(y) = f'\big(\varphi(y)\big)$, d. h., $\varphi_0(y, a)$ ist wirklich ein Element aus E_0'. Wegen

$$\varphi_0\big(h^*(y, a)\big) = \varphi_0(y, ah^{-1}) = \big(\varphi(y), gah^{-1}\big) = h \times \varphi_0(y, a)$$

für alle $h \in H$ ist φ_0 ein Bündelhomomorphismus, und weil φ ein Diffeomorphismus ist, wird $(\varphi_0, \mathrm{id}_H)$ ein Bündelisomorphismus von E_0 auf E_0'. Schließlich ergibt sich aus $L_g \circ \tilde{f} = \tilde{f}' \circ \varphi_0$ sofort

$$\omega_0 = \tilde{f}^* \omega = \tilde{f}^* \circ L_g^* \omega = (L_g \circ \tilde{f})^* \omega = (\tilde{f}' \circ \varphi_0)^* \omega = \varphi_0^* \circ \tilde{f}'^* \omega = \varphi_0^* \omega_0'. \quad \square$$

Eine $\mathfrak{g},H$-Struktur läßt sich analog zu einem Zusammenhang auch durch eine Familie lokaler Formen beschreiben; in dieser Gestalt tritt sie bei vielen differentialgeometrischen Untersuchungen auf. Dazu denken wir uns in dem Hauptfaserbündel E_0 eine Familie lokaler Schnitte $\{z_\iota\}_{\iota \in I}$ gegeben, die *begleitenden Repers*, deren Definitionsbereiche $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ eine aus offenen, zusammenhängenden Mengen bestehende Überdeckung der Basis Y^m bilden. Durch $z_\varkappa = h_{\varkappa\iota} \times z_\iota$ sind die Übergangsfunktionen $y \in U_\varkappa \cap U_\iota \mapsto h_{\varkappa\iota}(y) \in H$ eindeutig bestimmt. Die Strukturform ω_0 von E_0 induziert die *Familie* $\{\omega_\iota\}_{\iota \in I}$ *lokaler Formen der* $\mathfrak{g},H$-*Struktur:*

$$\omega_\iota := z_\iota^* \omega_0 = g_\iota^{-1}(y)\, dg_\iota, \quad \iota \in I, \tag{3.8}$$

wobei $g_\iota: y \in U_\iota \mapsto \tilde{f}\big(z_\iota(y)\big) \in G$ gesetzt wurde. Die lokalen Formen besitzen folgende Eigenschaften:

1. ω_ι ist eine 1-Form auf U_ι mit Werten in $\mathfrak{g}$.

2. Für alle $y \in U_\iota \cap U_\varkappa$ gilt

$$\omega_\varkappa = Ad(h_{\varkappa\iota}) \circ \omega_\iota + h_{\varkappa\iota} dh_{\iota\varkappa}. \tag{3.9}$$

3. $d\omega_\iota = -\frac{1}{2}[\omega_\iota, \omega_\iota] \quad (\iota \in I).$ (3.10)

4. Rang $\pi \circ \omega_\iota = m.$ (3.11)

Analog wie bei einer Zusammenhangsform verifiziert man, daß eine Familie lokaler Formen die Strukturform ω_0 mit den Eigenschaften 1 bis 4 aus Definition 3.1 eindeutig bestimmt. Es gilt nun

Folgerung 3.1. *Es sei $E_0(Y^m, \omega_0)$ eine $\mathfrak{g},H$-Struktur auf Y^m. Die Einbettung $\varepsilon: H \to G$ definiert dann eine eindeutig bestimmte Erweiterung $\tilde{\varepsilon}: E_0(Y^m, H) \to P(Y^m, G)$ zu einem Hauptfaserbündel P über Y^m mit der Strukturgruppe G. Es gibt genau einen Zusammenhang τ über P mit $\tau | E_0 = \omega_0$; dieser Zusammenhang ist lokal flach.*

Beweis. Die bekannte Bündelerweiterung, vgl. [19], § II.3, ergibt die erste Behauptung. Beachtet man die sich aus $h_{\iota\varkappa} \cdot h_{\varkappa\iota} = e$ durch Differentiation ergebende Formel

$$h_{\varkappa\iota} \cdot dh_{\iota\varkappa} = -Ad(h_{\varkappa\iota})\, h_{\varkappa\iota}^{-1} \cdot dh_{\varkappa\iota}, \tag{3.12}$$

so erkennt man, daß aus (3.9) unmittelbar das Transformationsgesetz der lokalen Zusammenhangsformen [19], (II.7.17), folgt; die zweite Behauptung ergibt sich aus dem dort bewiesenen Satz II.7.2. Der Vergleich von (3.10) mit der Strukturgleichung [19], (II.9.30), eines Zusammenhangs zeigt, daß die Krümmungsform Null ist.□

Wir bemerken, daß die $\mathfrak{g},H$-Strukturen im wesentlichen mit den lokal flachen Räumen mit Zusammenhang $\mathscr{S}(P, Y, G, E_0, H, \tau)$ von A. ŠVEC [20] übereinstimmen, wie man unmittelbar aus Folgerung 3.1 erkennt.

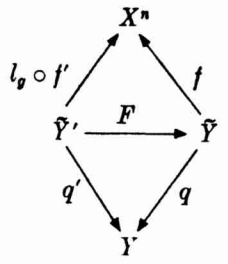
Es sei nun $E_0(Y, \omega_0)$ eine $\mathfrak{g},H$-Struktur auf Y und $q: \tilde{Y} \to Y$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist für das induzierte Bündel $\tilde{E}_0 := q^*E_0$ die Abbildung $\check{q}: \tilde{E}_0 \to E_0$ ein lokaler Diffeomorphismus, und das Paar $\tilde{E}_0, \tilde{\omega}_0$ mit $\tilde{\omega}_0 := \check{q}^*\omega_0$ bestimmt eine zu $E_0(Y, \omega_0)$ lokal isomorphe $\mathfrak{g},H$-Strukur über Y, die wir *die durch q aus $E_0(Y, \omega_0)$ induzierte $\mathfrak{g},H$-Struktur* nennen.
Die Einführung der $\mathfrak{g},H$-Strukturen wird durch den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz gerechtfertigt, der gleichzeitig die Grundlage der E.-Cartanschen Methode des repère mobile darstellt; er führt zur Lösung des Kongruenzproblems für zahlreiche Klassen von Immersionen und gibt eine allgemeine Lösung des Existenzproblems, das dem in § 1 formulierten Kongruenzproblem entspricht. In der Literatur findet man diesen Satz oft in speziellerer Form, vgl. etwa J. FAVARD [6], § III.9 (Introduction), P. GRIFFITHS [11], § 1, L. BOČEK [2], § 1.

Satz 3.2 (*Immersionstheorem*). *Es sei Y^m eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $E_0(Y^m, \omega_0)$ eine $\mathfrak{g},H$-Struktur auf Y^m. Dann gibt es eine zusammenhängende Überlagerung $q: \tilde{Y} \to Y$ und eine Immersion $f: \tilde{Y} \to X^n = G/H$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Die durch $q: \tilde{Y} \to Y$ aus $E_0(Y, \omega_0)$ induzierte $\mathfrak{g},H$-Struktur $\tilde{E}_0(\tilde{Y}, \tilde{\omega}_0)$ ist mit der durch die Immersion f auf $\tilde{Y}$ induzierten $\mathfrak{g},H$-Struktur $(f^*G, f^*\omega)$ identisch.*

2. *Ist $q': \tilde{Y}' \to Y$ eine Überlagerung von Y durch eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\tilde{Y}'$ und $f': \tilde{Y}' \to X^n$ eine Immersion, für die ebenfalls Eigenschaft 1 erfüllt ist, so existieren eine Überlagerung $F: \tilde{Y}' \to \tilde{Y}$ und ein Element $g \in G$, für welche das*

folgende Diagramm kommutativ ist:



(3.13)

3. *Die Immersion $f: \tilde{Y} \to X^n$ mit den Eigenschaften* 1 *und* 2 *ist bis auf Äquivalenz durch $E_0(Y, \omega_0)$ bestimmt; zu isomorphen $\mathfrak{g}$,H-Strukturen gehören äquivalente derartige Immersionen.*

Bemerkung. Die Mannigfaltigkeit ist gewissermaßen die kleinste Überlagerung von Y, für welche die von Y auf $\tilde{Y}$ gehobene $\mathfrak{g}$,H-Struktur durch eine Immersion in X^n induziert werden kann. Interessiert man sich nur für das Bild der Immersion, so folgt aus (3.13)

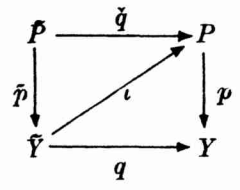
$$f'(\tilde{Y}') = l_g^{-1}(f(\tilde{Y})), \tag{3.14}$$

d. h., die Bilder aller Immersionen f', welche die Eigenschaft 1 erfüllen, sind G-kongruent. In diesem Sinne wird durch eine $\mathfrak{g}$,H-Struktur eine m-Fläche von X^n bis auf G-Kongruenz eindeutig bestimmt.

Der Beweis von Satz 3.2 stützt sich auf den folgenden Hilfssatz, der ein Spezialfall ($N = \{e\}$) des Satzes II.9.3 aus S. Kobayashi und K. Nomizu [14] ist:

Lemma 3.1. *Es sei $p: P \to Y^m$ ein Hauptfaserbündel mit dem lokal flachen Zusammenhang τ; Y^m sei zusammenhängend. Für $z_0 \in P$ sei $\tilde{Y}$ die maximale Integralmannigfaltigkeit des horizontalen m-Richtungsfeldes mit $z_0 \in \tilde{Y}$ und $q := p \mid \tilde{Y}$. Dann ist $q: \tilde{Y} \to Y$ eine Überlagerungsabbildung. Bezeichnet $\tilde{p}: \tilde{P} \to \tilde{Y}$ das durch $q: \tilde{Y} \to Y$ aus $p: P \to Y$ induzierte Hauptfaserbündel mit dem aus τ induziertem Zusammenhang $\tilde{\tau}$* (vgl. [19], Satz II.8.4), *so ist $\tilde{P}(\tilde{Y}, G, \tilde{p}, \tilde{\tau})$ isomorph zu dem trivialen Bündel $\tilde{Y} \times G$ mit dem kanonischen flachen Zusammenhang.* □

Zum Beweis von Satz 3.2 betrachten wir die in Folgerung 3.1 definierte Erweiterung $p: P \to Y$ von $E_0 \to Y$ mit dem lokal flachen Zusammenhang τ. Wir führen die in Lemma 3.1 beschriebene Konstruktion durch und erhalten das Hauptfaserbündel $\tilde{P}(\tilde{Y}, G, \tilde{p})$ mit dem flachen Zusammenhang $\tilde{\tau}$. Dabei haben wir das Diagramm



mit $p \circ \check{q} = q \circ \tilde{p}$ und $p \circ \iota = q$.

Es sei $\tilde{y} \in \tilde{Y} \to z_0(\tilde{y}) \in \tilde{P}$ ein globaler horizontaler Schnitt von $\tilde{P}$. Nun ist $\tilde{E}_0 = \check{q}^{-1}(E_0)$ eine Reduktion von $\tilde{P}$ auf die Untergruppe H von G, die durch die Reduktion E_0

von P auf H induziert wird. Es sei $(\tilde{z}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie lokaler Schnitte von $\tilde{E}_0$, deren Definitionsbereiche $(\tilde{U}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Überdeckung von $\tilde{Y}$ bilden, und

$$h_{\varkappa\iota}\colon \tilde{y}\in \tilde{U}_\iota\cap\tilde{U}_\varkappa \mapsto h_{\varkappa\iota}(\tilde{y})\in H$$

seien die zugehörigen Übergangsfunktionen. Wir können annehmen, daß $\tilde{U}_\iota$ eine Umgebung U_ι des Bündelatlas von E_0 überlagert und daß

$$\tilde{q}\circ\tilde{z}_\iota = z_\iota\circ q \tag{3.15}$$

gilt. Da G frei auf den Fasern von $\tilde{P}$ wirkt, gibt es für alle $\iota\in I$ eindeutig bestimmte Funktionen $g_\iota\colon \tilde{y}\in\tilde{U}_\iota\mapsto g_\iota(\tilde{y})\in G$ mit

$$\tilde{z}_0(\tilde{y}) = g_\iota(\tilde{y})\times\tilde{z}_\iota(\tilde{y}),\quad \tilde{y}\in\tilde{U}_\iota, \tag{3.16}$$

für die

$$g_\varkappa(\tilde{y}) = g_\iota(\tilde{y})\,h_{\iota\varkappa}(\tilde{y}),\quad \tilde{y}\in\tilde{U}_\iota\cap\tilde{U}_\varkappa, \tag{3.17}$$

gilt. Folglich ist die Abbildung

$$f\colon \tilde{y}\in\tilde{Y}\mapsto \pi\circ g_\iota(\tilde{y}) = g_\iota(\tilde{y})\,H\in X^n,\quad \text{wenn } \tilde{y}\in\tilde{U}_\iota \text{ ist}, \tag{3.18}$$

global definiert. Wir zeigen, daß sie den Forderungen des Satzes genügt. Da g_ι einen differenzierbaren Schnitt in einer Bündelkarte beschreibt, ist die Funktion g_ι und somit auch f differenzierbar. Weil der induzierte Zusammenhang durch $\tilde{\tau} = \tilde{q}^*\tau$ gegeben ist, vgl. [19], § II.8, Sätze 3, 4, folgt aus (3.15) für die lokalen Formen

$$\tilde{\omega}_\iota = q^*\omega_\iota. \tag{3.19}$$

Wir haben nämlich $\tilde{\omega}_\iota = \tilde{z}_\iota^*\tilde{\tau} = \tilde{z}_\iota^*\tilde{q}^*\tau = q^*z_\iota^*\tau = q^*\omega_\iota$. Nach dem Transformationsgesetz [19], (II.7.17), der lokalen Formen eines Zusammenhangs folgt beim Übergang von $\tilde{z}_\iota$ zu dem Schnitt $\tilde{z}_0|\tilde{U}_\iota$ aus (3.16)

$$\tilde{\tau}_0 = Ad(g_\iota)\,(\tilde{\omega}_\iota - g_\iota^{-1}\,dg_\iota), \tag{3.20}$$

und weil $\tilde{z}_0$ horizontal ist, ergibt sich aus $\tilde{\tau}_0 = 0$ die Beziehung $\tilde{\omega}_\iota = g_\iota^{-1}\,dg_\iota$. Betrachten wir das durch die differenzierbare Abbildung $f\colon\tilde{Y}\to X^n$ induzierte Bündel $E_f(\tilde{Y}, H)$, so erkennen wir aus (3.8), daß $\tilde{\omega}_\iota$ mit der durch f induzierten lokalen Strukturform dieses Bündels übereinstimmt. Hieraus folgt sofort, daß f eine Immersion ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(df)_{\tilde{y}} &= \operatorname{rg}\pi\circ(dg_\iota)_{\tilde{y}} = \operatorname{rg} dl_{g_\iota}^{-1}\circ\pi\circ(dg_\iota)_{\tilde{y}}\\ &= \operatorname{rg}\pi\circ g_\iota^{-1}(dg_\iota)_{\tilde{y}} = \operatorname{rg}\pi\circ\tilde{\omega}_\iota = \operatorname{rg}\pi\circ\omega_\iota\circ(dg)_{\tilde{y}}\\ &= \operatorname{rg}\pi\circ\omega_\iota(y) = m.\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Zum Beweis der zweiten Behauptung zeigen wir

Lemma 3.2. *Eine $\mathfrak{g}$,H-Struktur $E_0(Y^m,\omega_0)$ läßt sich genau dann durch eine Immersion $f\colon Y^m\to X^n$ induzieren, wenn der durch ω_0 in der Erweiterung P von E_0 bestimmte Zusammenhang τ flach ist. In diesem Fall erhält man alle zu f kongruenten Immersionen, wenn man (mit $Y=\tilde{Y}$) sie nach* (3.18) *auf Grund beliebiger globaler horizontaler Schnitte* (3.16) *von $P=\tilde{P}$ definiert.*

Beweis. Ist P flach, so können wir die Basis Y mit einem globalen horizontalen Schnitt $y\in Y\mapsto z_0(y)\in P$ identifizieren und die Immersion f nach (3.18) mit $Y=\tilde{Y}$ definieren. Ist $z_1(y) = a\times z_0(y)$, $a\in G$ konstant, ein beliebiger horizontaler Schnitt,

so erhalten wir $z_1(y) = \big(ag_i(y)\big) \times z_i(y)$, $y \in U_i$, und für die mit z_1 definierte Immersion gilt $f_1 = l_a \circ f$. Weil $a \in G$ beliebig ist, erhalten wir jede zu f G-kongruente Immersion auf diese Weise. Es bleibt zu zeigen, daß der Zusammenhang τ der Erweiterung $P \supset E_0$ der durch eine Immersion $f\colon Y \to X^n$ induzierten $\mathfrak{g},H$-Struktur flach ist. Wir setzen hierzu die Abbildung $\check{f}\colon E_0 \to G$ durch

$$\check{f}(g \times z) := \check{f}(z) \cdot g^{-1} \in G, \quad g \in G, \quad z \in E_0, \tag{3.21}$$

zu einer Abbildung $\check{f}\colon P \to G$ fort; aus $u = g \times z = g' \times z'$ mit $z' = h \times z$, $h \in H$, folgt $g' = gh^{-1}$, also $\check{f}(g' \times z') = \check{f}(z')\, g'^{-1} = \check{f}(z)\, h^{-1}hg^{-1} = \check{f}(z)\, g^{-1}$, und somit ist $\check{f}$ korrekt definiert. Es sei $(z_i)_{i \in I}$ eine Familie lokaler Schnitte von $p_0\colon E_0 \to Y$. Wir setzen $g_i(y) := \check{f}\big(z_i(y)\big)$ und erhalten hieraus wieder das Transformationsgesetz (3.17) mit $U_i = \tilde{U}_i$, $y = \tilde{y}$. Hieraus folgt, daß $z_0(y) := g_i(y) \times z_i(y)$ unabhängig von der Wahl des lokalen Schnittes z_i über U_i ist; z_0 ist also ein globaler Schnitt von $p\colon P \to Y$. Aus (3.8) ergibt sich nach dem Transformationsgesetz (3.20) sofort $\tau(dz_0) = 0$, z_0 ist also ein globaler horizontaler Schnitt, und die Abbildung $u \in P \mapsto \big(p(u), \check{f}(u)\big) \in Y \times G$ ist der Isomorphismus mit dem trivialen Bündel, der den Schnitt $z_0(y)$ in $Y \times \{e\}$ überführt. □

Folgerung 3.2. *Ist Y^m einfach zusammenhängend und zusammenhängend, und $E_0(Y^m, \omega_0)$ eine $\mathfrak{g},H$-Struktur über Y^m, so gibt es eine und bis auf G-Kongruenz nur eine Immersion $f\colon Y^m \to X^n$, welche die gegebene $\mathfrak{g},H$-Struktur induziert.* □

Bemerkung. Zu dieser Folgerung korrespondiert der bekannte, für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten bewiesene Fundamentalsatz für Hyperflächen des euklidischen Raumes E^n, vgl. S. Kobayashi und K. Nomizu [14], Theorem VII.7.2 (Vol. II), und analoge Sätze der Differentialgeometrie. Speziell erhalten wir für $H = \{e\}$ einen bekannten Existenzsatz, vgl. P. Griffiths [11], Lemma 1.4.

Wir beweisen nun die Behauptung 2 von Satz 3.2. Es sei $(q', \tilde{Y}', f')$ ein Tripel mit den in Satz 3.2 angegebenen Eigenschaften. Nach Voraussetzung sind q'^*E_0 und $P' = q'^*P$ gleich den von der Immersion f' induzierten Bündeln, und der aus der induzierten Strukturform entspringende Zusammenhang τ' ist gleich dem über q' induzierten; er ist flach nach Lemma 3.2. Wir betrachten das $\tilde{Y} \subset P$ bestimmende Element $z_0 \in P$. Weil P' das Bündel P überlagert, finden wir ein $z_0' \in P'$, das durch die q' entsprechende Abbildung $\check{q}'\colon P' \to P$ in z_0 übergeht. Wir identifizieren den durch z_0' gehenden horizontalen Schnitt von P' mit $\tilde{Y}'$. Weil $\check{q}'$ horizontale Mannigfaltigkeiten in horizontale überführt, erhalten wir durch $F := \check{q}' \mid Y'$ die gesuchte Überlagerung von $\tilde{Y}$. Die Abbildung $f_1' := f \circ F$ ist dann eine Immersion von $\tilde{Y}'$ in X^n, welche über $\tilde{Y}'$ die von der Überlagerung $q' = q \circ F\colon \tilde{Y}' \to Y$ induzierte $\mathfrak{g},H$-Struktur bestimmt. Nach Lemma 3.2 finden wir schließlich ein $g \in G$, für das (3.13) kommutativ wird, nämlich das g mit $f_1' = l_g \circ f'$.

Zum Beweis der Behauptung 3 von Satz 3.2 seien $(q, \tilde{Y}, f)$, $(q', \tilde{Y}', f')$ Überlagerungen von Y und Immersionen, die jeweils die Eigenschaften 1 und 2 erfüllen. Dann haben wir außer dem kommutativen Diagramm (3.13) noch eine zu F analoge Überlagerung $F'\colon \tilde{Y} \to \tilde{Y}'$. Als Überlagerung ist F surjektiv und ein lokaler Diffeomorphismus. Wir zeigen, daß F auch injektiv ist. Es sei $F(\tilde{y}_1') = F(\tilde{y}') = \tilde{y}$ und $\tilde{\gamma}'$ ein Weg von $\tilde{y}'$ nach $\tilde{y}_1'$. Dann ist $\tilde{\gamma} := F \circ \tilde{\gamma}'$ geschlossen, und dasselbe gilt auch für $\gamma = q \circ F \circ \tilde{\gamma}' = q' \circ \tilde{\gamma}'$, also auch für $\tilde{\gamma}_1' = F' \circ \tilde{\gamma}$. Nun sind $\tilde{\gamma}'$ und $\tilde{\gamma}_1'$ Hebungen desselben Weges γ in den Überlagerungsraum $\tilde{Y}'$, und weil $\tilde{\gamma}_1'$ geschlossen ist, gilt das auch für $\tilde{\gamma}'$. Daher ist $\tilde{y}_1' = \tilde{y}'$, und F ist ein Diffeomorphismus, der wegen $l_g \circ f' = f \circ F$ die Äquivalenz der Immersionen f, f' vermittelt.

Um die letzte Behauptung von Satz 3.2 zu zeigen, betrachten wir isomorphe $\mathfrak{g},H$-Strukturen $E_0(Y, \omega_0)$, $E_0'(Y', \omega_0')$. Sie bestimmen isomorphe Erweiterungen P, P' und diffeomorphe Holonomieflächen $\tilde{Y}$, $\tilde{Y}'$ sowie isomorphe Hebungen q^*E_0, q'^*E_0'. Aus der Definition (3.18) der Immersionen f, f' folgt unmittelbar deren Äquivalenz. □

§ 4. Das Reduktionsverfahren

Wie in § 3 bewiesen, wird eine Immersion $f\colon Y^m \to X^n = G/H$ durch die von ihr induzierte $\mathfrak{g},H$-Struktur $E_0(Y^m, \omega_0)$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Eine $\mathfrak{g},H$-Struktur ist jedoch kein vollständiges Invariantensystem, da sie kein geometrisches Objekt über der Mannigfaltigkeit Y^m darstellt. Ein Weg zur Lösung des Kongruenzproblems ist nun die Charakterisierung der $\mathfrak{g},H$-Struktur von f durch geometrische Objekte. Gelingt es z. B., das Hauptfaserbündel E_0 in kanonischer Weise auf $\{e\}$ zu reduzieren, also der Immersion f einen durch invariante Eigenschaften von f definierten globalen Schnitt $z_f\colon Y^m \to E_0$ zuzuordnen, so wird $z_f^*\omega_0$ eine 1-Form auf Y^m mit Werten in $\mathfrak{g}$, die f bis auf Kongruenz eindeutig charakterisiert: Man wendet Satz 3.2 auf die reduzierte Struktur mit $H = \{e\}$ an, erhält nach Lemma 3.2 eine Immersion $F\colon Y^m \to G$ — die man auch als Lösung eines durch $z_f^*\omega_0$ bestimmten Pfaffschen Systems definieren kann, vgl. P. GRIFFITHS [11], Lemma (1.4) — und bildet $f = \pi \circ F$. Eine solche Reduktion auf ein kanonisches Reper z_f versucht das hier zu beschreibende, von E. CARTAN [4] stammende Verfahren zu bestimmen. Weil das Bündel E_0 und die daraus durch schrittweise Reduktion entstehenden Bündel E_k in der Regel nicht trivial sind, ist die Existenz eines globalen Schnittes nicht zu erwarten. Das genannte Verfahren ist also im allgemeinen nur lokal anwendbar und liefert eine lokale Klassifikation der Immersionen. Die Reduktion erfolgt schrittweise; bei jedem Schritt soll die Dimension der Strukturgruppe kleiner werden. Beim $(j+1)$-ten Reduktionsschritt wird das Differential $d\tilde{l}_f\colon TE_f \to TG$ der im j-ten Schritt konstruierten Reduktion herangezogen; es sind Normalformen der „Berührungselemente" $(j+1)$-ter Ordnung und ihre Invarianten zu bestimmen.
Für den ersten Reduktionsschritt betrachten wir wie in § 3 das durch eine Immersion $f\ (= f_0)$ von Y^m in G/H induzierte Bündel nullter Ordnung $E_0(Y, \omega_0)$, vgl. Satz 3.1. Dem Hauptfaserbündel E_0 ist das aus dem Tangentialbündel TX^n durch die Abbildung $f\colon Y \to X^n$ induzierte Vektorraumbündel $TX^n \mid Y = f^*TX^n$ assoziiert. Das Differential der Immersion bestimmt einen injektiven Vektorbündelmorphismus von konstantem Rang m

$$df\colon TY \to TX^n \mid Y. \tag{4.1}$$

Weiter betrachten wir das Graßmann-Bündel $G_m(X^n)$ der m-dimensionalen Unterräume der Tangentialräume von X^n, vgl. Beispiel 2.2. Die Immersion f bestimmt einen globalen Schnitt $y \in Y \mapsto \operatorname{Im} df_y$ in dem induzierten Bündel $G_m(TX^n \mid Y)$, welcher dem ersten Reduktionsschritt zugrunde liegt. Über E_0 haben wir keine Wirkung von G; wir behalten jedoch die aus (2.11) bis (2.13) resultierenden Bezeichnungen für die Faserisomorphismen bei:

$$[z] = dl_g \mid T_{x_0}(X^n), \quad [z]^{-1} = dl_g^{-1} \mid T_{p_0(z)}(X^n) \quad \text{für} \quad z \in E_0, \quad g = \check{f}(z), \tag{4.2}$$

die ja durch die Immersion f in X^n eine anschauliche geometrische Bedeutung haben. Die Abbildung (4.1) ist eine 1-Form auf Y mit Werten in $TX^n \mid Y$; die ihr entsprechende 1-Form auf E_0 vom Typ $\ddot{A}d$ ist gerade die kanonische Form nullter Ord-

nung $\vartheta_0(z) = \pi \circ \omega_0(z)$, vgl. (2.19), (3.6). Wegen

$$\vartheta_0(h \times z) \circ (d\sigma_h)_z = Ad(h) \circ \vartheta_0(z), \quad h \in H, \quad z \in E_0, \tag{4.3}$$

durchläuft das Bild $\operatorname{Im} \vartheta_0(z) = \operatorname{Im} dl_g^{-1} \circ df_y$, vgl. (3.7), einen vollen H-Orbit in der Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{n,m}$ von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, wenn z die Faser $p_0^{-1}(y)$ durchläuft, nämlich die Menge aller Bilder des Tangentialraumes $df_y(T_y(Y))$ bei allen Transformationen l_g^{-1} mit $g^{-1}f(y) = x_0$. Wir erhalten also durch

$$\gamma_1^f : y \in Y^m \mapsto \operatorname{Im} \vartheta_0(z) \bmod H \in G_{n,m}/H, \qquad z \in p_0^{-1}(y), \tag{4.4}$$

eine Zuordnung $\gamma_1 : f \mapsto \gamma_1^f$, die, wie man sofort sieht, die Eigenschaften 1 bis 3 der Definition 1.2 einer G-Invarianten der Klasse $\mathfrak{F}$ erfüllt, wenn $\mathfrak{F}$ die Klasse der Immersionen in X^n ist, für die alle $df_y(T_y(Y))$ in einer G-invarianten Teilmenge von $G_m(X^n)$ liegen, auf der G regulär operiert; wir nennen dann f *regulär von erster Ordnung* und γ_1^f *die Berührungsinvariante erster Ordnung der Immersion* f. Fordert man die Regularität nicht, so ist γ_1^f ebenfalls definiert und erfüllt die Eigenschaften 1 bis 3; da aber die Wirkung von H über $G_{n,m}$ im allgemeinen nicht regulär ist, kann man nicht mehr von der Differenzierbarkeit von γ_1^f reden und γ_1^f daher auch nicht als ein geometrisches Objekt betrachten.

Beispiel 4.1. Ist X^n ein homogener *Riemannscher Raum konstanter Schnittkrümmung*, so ist jede Immersion von erster Ordnung regulär; denn die Isometriegruppe G wirkt transitiv über $G_m(X^n)$. Da G einfach transitiv über dem Hauptfaserbündel der orthonormierten Basen der Tangentialräume von X^n wirkt, können wir G nach Wahl eines Bezugsrepers mit diesem Bündel identifizieren. Das Bündel $G_m(X^n)$ hat wegen $G_{n,m} = O(n)/O(m) \times O(n-m)$ in diesem Fall homogene Fasern, und der oben erwähnte Schnitt $y \in Y \mapsto df_y(T_y)$ von $G_m(TX^n \mid Y)$ bestimmt nach einem bekannten Satz (vgl. etwa [19], Satz II.3.2) die Reduktion E_1 von E_0 auf die Untergruppe $O(m) \times O(n-m)$; E_1 besteht aus denjenigen Orthorepers, deren m erste Vektoren Tangentialvektoren der Immersion sind. Wir erhalten die bekannte, zu E_1 assoziierte Zerlegung von $TX^n \mid Y$ in Tangential- und Normalbündel der Immersion; die Aufspaltung der Form $\omega_1 := \omega_0 \mid TE$ in die entsprechenden Komponenten liefert uns den Riemannschen Zusammenhang im Tangentialbündel, einen Zusammenhang im Normalbündel und die zweite Fundamentalform der Immersion.

Beispiel 4.2. Ist $m = 1$ und X^n ein *pseudo-euklidischer Raum*, so besteht der Orbitraum $G_1(X^n)/G = G_{n,1}/H$ aus drei Elementen, die den lichtartigen, raumartigen und zeitartigen Richtungen entsprechen. Auf jeder dieser Richtungsmengen für sich genommen haben wir eine normale Wirkung. Dementsprechend finden wir drei Klassen regulärer Immersionen erster Ordnung: die lichtartigen (d. h. isotropen), raumartigen und zeitartigen Kurven. Wenn man die Reduktion weiterführt, erhält man bei höheren Dimensionen immer kompliziertere Unterteilungen dieser drei Klassen erster Ordnung. Man vergleiche hierzu und auch über die Schwierigkeiten, welche auftreten, wenn man diese Unterteilung vermeiden will, B. Frank [8].

Beispiel 4.3. In den Beispielen 4.1, 4.2 sind die Abbildungen γ_1^f natürlich trivial, weil die Orbitmannigfaltigkeiten diskret sind. Eine nicht triviale Berührungsinvariante besitzen die generischen Kurven der Graßmann-Mannigfaltigkeiten $X^{k(n-k)} = G_{n,k}$, betrachtet als homogener Raum bezüglich der üblichen Wirkung der orthogonalen Gruppe $O(n)$. Im Fall $2k \leqq n$ wird die Berührungsinvariante γ_1^f für generische Kurven $f : Y^1 \to G_{n,k}$ durch k reelle Zahlen $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k > 0$ mit $\sum_{\alpha=1}^{k} \mu_\alpha^2 = 1$ charakterisiert, vgl. [18].

Die Auswertung der Transformation (4.3) führt uns auf das E.-Cartansche Reduktionsverfahren. Es sei $U \subset Y^m$ eine Umgebung, über der — als begleitendes Reper nullter Ordnung — ein Schnitt $y \in U \mapsto z(y) \in E_0$ gegeben ist. Dieser Schnitt bestimmt 1-Formen $z^*\omega^J$ auf U durch $z^*\omega_0 = X_J z^*\omega^J$, $J = 1, \ldots, r$. Zur Abkürzung wenden wir von nun an oft die Summenkonvention an, nach der über gleiche, in einem Ausdruck oben und unten auftretende Indizes zu summieren ist. Die Basis (X_J) der Lie-Algebra $\mathfrak{g}^r$ sei so gewählt, daß $(X_{n+1}, \ldots, X_r)$ eine Basis von $\mathfrak{h}^{r-n}$ ist. Das involutive System

$$\omega^i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

bestimmt die Faserung $\pi: G \to G/H$. Wegen (3.11) können wir durch geeignete Numerierung (lokal) erreichen, daß gerade $z^*\omega^1, \ldots, z^*\omega^m$ linear unabhängig sind. Es gilt

Lemma 4.1. *Die Formen $z^*\omega^i$, $i = 1, \ldots, n$, hängen nur vom Wert $z(y)$ des Schnittes an der Stelle y ab (und nicht vom Differential dz).*

Beweis. Es sei $z_\varkappa(y) = h_{\varkappa\iota}(y) \times z_\iota(y)$, $y \in U_\iota \cap U_\varkappa$, eine Transformation des begleitenden Repers; für den festen Punkt y_0 sei $h_{\varkappa\iota}(y_0) = e$. Wegen (3.9) ergibt die Basisaufspaltung

$$(\omega_\varkappa)^i_{y_0} = \left(Ad(h_{\varkappa\iota})\,\omega_\iota\right)^i_{y_0} = (\omega_\iota)^i_{y_0}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

weil $h_{\varkappa\iota}(y_0) = e$ und $h_{\varkappa\iota}\,dh_{\iota\varkappa}(t) \in \mathfrak{h}$, also wegen (4.5) $\omega^i(h_{\varkappa\iota}\,dh_{\iota\varkappa}) = 0$ gilt. □

Es ist also gleichgültig, ob man $\omega^i(z)$ auf $p_0^{-1}(U) \subset E_0$ oder $z^*\omega^i$ auf U betrachtet, und wir haben

$$\vartheta_0(z) = X_i\omega^i(z) = X_i z^*\omega^i \circ (dp_0)_z \bmod \mathfrak{h}, \tag{4.6}$$

wobei $y \mapsto z(y)$ ein lokaler Schnitt durch z ist. Wegen $\omega^i(\mathfrak{h}) = 0$ und weil $Ad\,|\,\mathfrak{h}$ die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ in sich überführt, können wir (ω^i) als die zu $(X_i \bmod \mathfrak{h})$ duale Basis von $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ ansehen; sie transformiert sich kontragredient zu $(X_i \bmod \mathfrak{h})$. Wir setzen

$$\dot{Ad}^*(h)\,(\omega^i) = c^i_j(h^{-1})\,\omega^j, \quad h \in H, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Betrachten wir nur diejenigen Werte von $h \in H$, für welche die $\left(\dot{Ad}^*(h)\,(\omega^\alpha)\right)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, linear unabhängig bleiben, und drücken die (ω^μ), $\mu = m+1, \ldots, n$, durch sie aus, so erhalten wir mit $z = h \times z_\iota \in p_0^{-1}(U_\iota)$

$$\omega^\mu(y, h) = b'^\mu_{\ \alpha}(y, h)\,\omega^\alpha(y, h), \quad h \in H, \quad y = p_0(z) \in U_\iota. \tag{4.8}$$

Aus (3.6) und (4.6) folgt

$$z^*\vartheta_0 = l_g^{-1}\,df_y = X_i z^*\omega^i \bmod \mathfrak{h}, \quad y = p_0(z), \quad g = f(z), \tag{4.9}$$

und hieraus ergibt sich: $\left(b'^\mu_{\ \alpha}(y, h)\right)$ ist die Matrix der Koordinaten des Unterraumes $\mathrm{Im}\,(l_g^{-1}\,df_y)$ in einer Karte von $G_{n,m}$, die sich aus der Basis $(X_i \bmod \mathfrak{h})$ von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ auf der Menge aller zu der linearen Hülle $\mathscr{L}(X_{m+1} \bmod \mathfrak{h}, \ldots, X_n \bmod \mathfrak{h})$ komplementären Unterräume von $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}$ in üblicher Weise ergibt. (Ist (a_i) eine feste Basis des $\mathbb{R}^n$, so bestimmt ein Unterraum $L^m \in G_{n,m}$, der schlicht über $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m)$ liegt, eindeutig die Matrix $\left(b^\mu_{\ \alpha}(L^m)\right)$, wenn man ihn in den zu dieser Basis gehörenden Koordinaten durch ein Gleichungssystem der Form $\xi^\mu = b^\mu_{\ \alpha}(L^m)\,\xi^\alpha$ beschreibt.) Wir fassen zusammen:

Satz 4.1. *Es sei $X^n = G/H$ ein Kleinscher Raum und $G_{n,m}$ die Graßmann-Mannigfaltigkeit der m-dimensionalen Unterräume von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \equiv T_{x_0}(X^n)$. Für jede $\mathfrak{g}$,H-Struktur,*

speziell also für jede Immersion $f\colon Y^m \to X^n$ *beschreibt* (4.9) *eine von dem Reper nullter Ordnung* $z \in p_0^{-1}(y) \subset E_0$ *abhängende Schar linearer Abbildungen* $z^*\vartheta_0\colon T_y(Y) \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; *durchläuft* z *die Faser* $p_0^{-1}(y)$, *so durchläuft* $\operatorname{Im} z^*\vartheta_0$ *ein* H*-Orbit von* $G_{n,m}$ *unter der Wirkung der linearen Isotropiedarstellung von* H. *In den Koordinaten wird* $\operatorname{Im} z^*\vartheta_0$ *durch die Gleichungen* (4.8) *beschrieben.* □

Bemerkung. Die Gleichungen (4.8) sind mit der zweiten Serie der Gleichungen (2) bei E. CARTAN [4], § 127, identisch, wenn man $p = 0$, $r - r_0 = n$, $r - r_{-1} = m$ und $\omega^i = \pi^i$, $i = 1, \ldots, n$, beachtet. Die $\omega^i = \pi^i$ sind die „Hauptkomponenten nullter Ordnung", die Koordinaten der $h \in H$ (vertikalen Koordinaten) sind die „sekundären Parameter nullter Ordnung" und die Koordinaten der $y \in Y^m$ die „Hauptparameter" in den Bezeichnungen von E. CARTAN. Die erste Serie der Gleichungen (2) aus [4], § 127, fehlt, da G über X^n transitiv ist, also keine Invarianten nullter Ordnung auftreten. Nach [4], § 129, sind nun „*die sekundären Parameter* $h \in H$ *so zu wählen, daß zwischen den Koeffizienten nullter Ordnung* $b'^{\mu}_{\alpha}(y, h)$ *eine möglichst große Zahl möglichst einfacher Relationen entsteht.*" Auf Grund der geometrischen Bedeutung der (b'^{μ}_{α}) als Koordinaten von $\operatorname{Im} z^*\vartheta_0$ haben wir diese Formulierung so zu interpretieren: Auf jedem H-Orbit $\hat{u} \in A/H$ einer gewissen invarianten Menge $A \subset G_{n,m}$ ist eine Normalform $s(\hat{u})$ auszuzeichnen, und h ist so zu wählen, daß $\operatorname{Im} z^*\vartheta_0 = \operatorname{Im} \vartheta_0(h \times z_1) = s\big(\gamma_1^f(p_0(z))\big)$ gilt. Um zu einer kanonischen Reduktion von E_0 zu kommen, ist es zweckmäßig, die Wirkung von H über A als normal vorauszusetzen — eine Annahme, die allerdings bei E. CARTAN [4] ausdrücklich nicht gemacht wird (vgl. den Absatz nach (1) in [4], § 127). Andererseits bemerkt E. CARTAN [4], § 130, daß die angestrebte Reduktion (unter seinen Voraussetzungen) nicht immer möglich sei. Er weist selbst auf die Notwendigkeit einer Typeneinteilung bei jedem Reduktionsschritt hin. Um zu einer präzisen Aussage zu kommen, definieren wir zuerst den Begriff einer Immersion vom Typ A.

Definition 4.1. Es sei $A \subset G_{n,m}$ eine H-invariante Teilmenge, über der H normal wirkt; durch $s\colon \hat{u} \in A/H \to s(\hat{u}) \in A$ seien die Normalformen von A definiert, und H_1 bezeichne die Isotropiegruppe der Normalformen. Eine *Immersion* $f\colon Y^m \to X^n$ *heißt vom Typ* A, wenn sie regulär von erster Ordnung ist und $\gamma_1^f(y) \in A/H$ für alle $y \in Y^m$ gilt.

Die Abbildung $\gamma_1^{E_0}\colon y \in Y \mapsto \operatorname{Im} \vartheta_0(z) \bmod H$ für $p_0(z) = y$ hängt nur von ϑ_0, d. h. nur von der $\mathfrak{g},H$-Struktur $E_0(Y, \omega_0)$ ab, unabhängig davon, ob sie durch eine Immersion induziert ist. Deshalb sind $\gamma_1^{E_0}$ und die damit zusammenhängenden Begriffe sinngemäß auch für $\mathfrak{g},H$-Strukturen zu verwenden.

Satz 4.2. *Es sei* $E_0(Y^m, \omega_0)$ *eine* $\mathfrak{g},H$*-Struktur vom Typ* A. *Dann definiert*

$$E_1 := \{z \in E_0 \mid \operatorname{Im} \vartheta_0(z) \in s(A/H)\}, \quad \omega_1 := \omega_0 \mid TE_1, \quad p_1 := p_0 \mid E_1 \tag{4.10}$$

eine $\mathfrak{g},H_1$*-Struktur. Isomorphen* $\mathfrak{g},H$*-Strukturen entsprechen isomorphe* $\mathfrak{g},H_1$*-Strukturen und umgekehrt. Ist* $E_0(Y^m, \omega_0)$ *die durch eine Immersion* $f\colon Y^m \to X^n$ *induzierte* $\mathfrak{g},H$*-Struktur und setzen wir* $\overset{\vee}{f}_1 := \overset{\vee}{f} \mid E_1\colon E_1 \to G$, *so bestimmt*

$$f_1\colon y \in Y^m \mapsto f_1(y) := \overset{\vee}{f}_1(z)\, H_1 \in X_1^{n_1} := G/H_1, \quad p_1(z) = y, \tag{4.11}$$

eine Immersion f_1 *von* Y^m *in den Kleinschen Raum* $X_1^{n_1}$, *deren induzierte* $\mathfrak{g},H_1$*-Struktur gerade* $E_1(Y, \omega_1)$ *ist. Die Immersionen* $f, f'\colon Y^m \to X^n$ *vom Typ* A *sind* G*-kongruent genau dann, wenn die entsprechenden Immersionen* f, f'_1 G*-kongruent sind.*

Beweis. Für den Beweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen, daß wir lokale differenzierbare Schnitte $z_1(y)$ von E_0 wählen können, die in E_1 liegen. Sind nämlich z_1, z_1' zwei derartige Schnitte über $U \subset Y$, so ist $\operatorname{Im} \vartheta_0(z_1') = h_1 \operatorname{Im} \vartheta_0(z_1) = s\big(\operatorname{Im} \vartheta_0(z)\big)$,

also $z_1' = h_1 \times z_1$ mit $h_1 = h_1(y) \in H_1$. Damit ist E_1 eine Reduktion von E_0, und ω_1 erfüllt offenbar alle Eigenschaften einer Strukturform. Ist nun $y \in U \mapsto z(y) \in E_0$ ein beliebiger lokaler Schnitt von E_0, so gilt $\operatorname{Im} \vartheta_0(z(y)) \in A$, und nach Lemma 2.1 finden wir eine differenzierbare Funktion $y \in U \to \tilde{h}(y) \in H/H_1$ so, daß $\operatorname{Im} \vartheta_0(z(y)) = \tilde{h}(y)\, \gamma_1^{E_0}(y)$ ist; hier identifizieren wir wieder A/H mit der Normalformenmannigfaltigkeit. Nach der Definition der differenzierbaren Struktur von H/H_1 gibt es dann bei genügend kleinem U auch differenzierbare Funktionen $y \in U \mapsto h(y) \in H$ mit $\operatorname{Im} \vartheta_0(z(y)) = h(y)\, \gamma_1^{E_0}(y)$. Weil ϑ_0 eine 1-Form vom Typ Ad ist, definiert $z_1(y) := h^{-1}(y) \times z(y)$ einen geeigneten differenzierbaren Schnitt. Ist nun $\varphi: E_0 \to E_0'$ ein Isomorphismus der $\mathfrak{g},H$-Strukturen, so folgt aus $\vartheta_0' = \varphi^{*-1}\vartheta_0$ und (4.10) sofort $\varphi(E_1) = E_1'$, und daher sind die Reduktionen E_1, E_1' isomorph. Umgekehrt sind die Erweiterungen E_0, E_0' der isomorphen Hauptfaserbündel E_1, E_1' von H_1 auf H isomorph; schließlich zeigt (3.3), daß E_0, E_0' auch als $\mathfrak{g},H$-Strukturen isomorph sind, wenn das für ihre Reduktionen gilt; diese Strukturen lassen sich ja durch isomorph einander entsprechende Familien lokaler Formen (3.8) definieren. Zum Beweis der nächsten Behauptung bemerken wir zuerst, daß durch die Einbettung $H_1 \to H$ eine G-Invariante

$$\beta: gH_1 \in X_1^{n_1} \to gH \in X^n \tag{4.12}$$

definiert wird. Die Abbildung (4.11) ist korrekt definiert; sie ist differenzierbar, wie man sofort sieht, wenn man für z einen lokalen Schnitt $z_1(y)$ von E_1 einsetzt. Aus

$$f = \beta \circ f_1 \tag{4.13}$$

folgt wegen $df = d\beta \circ df_1$ unmittelbar $m = \operatorname{rg} df \leqq \operatorname{rg} df_1 \leqq m$, so daß f_1 eine Immersion ist. Ferner ergibt sich aus (4.13): Ist $f_1' = l_a \circ f_1$, so gilt $f' = \beta \circ f_1' = l_a \circ \beta \circ f_1 = l_a \circ f$. Sind schließlich f und f' G-kongruent, so sind die ihnen entsprechenden $\mathfrak{g},H$-Strukturen (3.2) kanonisch identifizierbar; denn aus $f' = l_a \circ f$ folgt nach (3.2) sofort

$$E_0' = \{(y, ag) \mid (y, g) \in E_0\}. \tag{4.14}$$

Somit ist $\tilde{f}' = L_a \circ \tilde{f}$, und weil wegen der Links-Invarianz von ω die (4.14) entsprechende Formel auch für die reduzierten Bündel E_1, E_1' gilt, ergibt sich $\tilde{f}_1' = L_a \circ \tilde{f}_1$, also $f_1' = l_a \circ f_1$. Abschließend bemerken wir, daß $z = (y, g) \in E_1$ dann und nur dann gilt, wenn $gH_1 = f_1(y)$ ist. Aus (3.2) folgt daher, daß $E_1(Y^m, \omega_1)$ die von f_1 induzierte $\mathfrak{g},H_1$-Struktur ist. □

Nach Satz 4.2 kann man nun das Verfahren iterieren, wenn es gelingt, die normalen Typen für die sukzessive auftretenden Transformationsgruppen $[H_l, G_{n_l,m}]$ zu bestimmen. Damit wird man auf den Begriff einer Immersion $f: Y^m \to X^n$ vom Typ

$$\mathfrak{T}_l := ([H, A_1], [H_1, A_2], \ldots, [H_{l-1}, A_l]) \tag{4.15}$$

ihrer *Berührungselemente l-ter Ordnung* geführt; es ist klar, daß sich die Differentiationsordnung bei jedem Schritt um 1 erhöht.

Wir beschreiben nun diese Iteration im einzelnen.

Satz 4.3. *Die in Satz 4.2 beschriebene Reduktion einer $\mathfrak{g},H$-Struktur $E_0(Y^m, \omega_0)$ habe nach l Schritten, $l \geqq 1$, eine $\mathfrak{g},H_l$-Struktur $E_l(Y^m, \omega_l)$, $p_l: E_l \to Y^m$ von einem gewissen Typ $\mathfrak{T}_l$, vgl. (4.15), ergeben. Die Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei so numeriert, daß $(X_{n_l+1}, \ldots, X_r)$ eine Basis von $\mathfrak{h}_l$ ist, $\lambda = 0, \ldots, l$, $n_0 = n < n_1 < \cdots < n_l$. Dann gilt:*

I. Die kanonische Form $\vartheta_l = \pi_l \circ \omega_l$ *ist eine 1-Form vom Typ* $Ad(H_l)$ *mit Werten in* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_l$,

$$\vartheta_l(z, dz) = \sum_{i=1}^{n_l} X_i \omega^i(z, dz) \bmod \mathfrak{h}_l, \quad z \in E_l, \tag{4.16}$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ *ist linear unabhängig;*

2. *es gilt*

$$\omega^\varkappa(z, dz) = b'^\varkappa{}_a(z)\, \omega^a(z, dz), \quad \varkappa = m + 1, \ldots, n_l; \tag{4.17}$$

3. *für* $\alpha = 1, \ldots, m$, $\varkappa = m + 1, \ldots, n_{l-1}$ *und* $h \in H_l$ *sind die Koeffizienten der Ordnung kleiner als l längs der Fasern konstant:*

$$b'^\varkappa{}_a(h \times z) = b'^\varkappa{}_a(z), \quad z \in E_l. \tag{4.18}$$

II. Es ist eine Folge natürlicher Zahlen

$$\mu_0 = 0 \leqq \mu_1 \leqq \cdots \leqq \mu_l$$

und eine Folge $c_a\colon Y^m \to \mathbb{R}$, $a = 1, \ldots, \mu_l$, *von G-Invarianten der Klasse* $\mathfrak{F}_l$ *gegeben, welche folgende Eigenschaft besitzen: Die Differentiale haben Darstellungen*

$$p_l^*\, dc_a = b_{a\alpha}(z)\, \omega^\alpha(z, dz), \quad z \in E_l, \tag{4.19}$$

welche für $a = 1, \ldots, \mu_{l-1}$ *längs der Fasern von* E_l *konstant sind:*

$$b_{a\alpha}(h \times z) = b_{a\alpha}(z), \quad h \in H_l, \quad z \in E_l. \tag{4.20}$$

Beweis. Die Formel (4.16) ist die Basisdarstellung von ϑ_l. Nach der vor (4.8) gestellten Bedingung sind die Komponenten $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ von ω_1 linear unabhängig, und wegen $\omega_\lambda = \omega_{\lambda-1} | TE_\lambda$ gilt das auch für alle $\lambda > 1$. Die Eigenschaft 2 resultiert unmittelbar aus der Eigenschaft 1. Nach Definition von $E_l \subset E_{l-1}$ gilt für $z \in E_l$ die Bedingung $\operatorname{Im} \vartheta_{l-1}(z) \in s(A_l/H_{l-1})$. Daher haben die (4.8) entsprechenden Gleichungen für $\varkappa = m + 1, \ldots, n_{l-1}$ wohlbestimmte, nur von $y \in Y$ abhängende Koeffizienten, die wegen $\omega_l = \omega_{l-1} | TE_l$ bei der Reduktion unverändert bleiben. Für den Beweis von II. betrachten wir die Formen ϑ_λ, $\lambda \geqq 1$. Zusammen mit $E_{\lambda-1}$ mögen bereits $\mu_{\lambda-1}$ G-Invarianten vorliegen, welche die im Satz genannte Eigenschaft besitzen. Nach Induktionsvoraussetzung sind die Koeffizienten $b'^\varkappa{}_a$, $b_{a\alpha}$ von ϑ_λ für $\varkappa = n_{\lambda-2} + 1, \ldots, n_{\lambda-1}$, $a = \mu_{\lambda-2} + 1, \ldots, \mu_{\lambda-1}$ universelle, d. h. aus der Normalform entspringende und nur vom Typ $\mathfrak{F}_\lambda$ abhängende Konstanten oder G-invariante Funktionen des Types $\mathfrak{F}_\lambda$; die G-Invarianz folgt aus Satz 3.1. Die Anzahl dieser G-Invarianten sei $\mu_\lambda - \mu_{\lambda-1} \geqq 0$; wir bezeichnen sie mit c_a, $a = \mu_{\lambda-1} + 1, \ldots, \mu_\lambda$. Die Differentiale $p_\lambda^*\, dc_a = dp_\lambda^* c_a$ besitzen Darstellungen (4.19); denn die $p_\lambda^* c_a$ sind längs der Fasern von E_λ konstant, und wegen (4.17) und Eigenschaft 1 erhalten wir die eindeutig bestimmten Koeffizienten $b_{a\alpha}(z)$, die in der Regel von $z \in p_\lambda^{-1}(y)$ abhängen. Die schrittweise Bestimmung der Normalformen, die ja nach Voraussetzung möglich ist, beziehe nun neben der Transformation der $b'^\varkappa{}_a(z)$ noch die durch die Wirkung von H_λ über E_λ induzierte (lineare) Transformation der $b_{a\alpha}(z)$ mit ein. Dann erfüllen die Koeffizienten $b_{a\alpha}$ aus (4.19) für $a = \mu_{\lambda-1} + 1, \ldots, \mu_\lambda$ bezüglich $[H_{\lambda+1}, E_{\lambda+1}]$ die Eigenschaft (4.20). □

Ist E_0 durch eine Immersion $f\colon Y^m \to X^n$ induziert, so erhalten wir analog (4.11) entsprechende Immersionen $f_\lambda\colon Y^m \to X_\lambda^{n_\lambda} = G/H_\lambda$; wegen Satz 3.2 können wir diese Annahme lokal stets machen. Die in Satz 4.3 beschriebene Situation entspricht den

§§ 129, 172 bei E. CARTAN [4]. Die Sätze 4.2, 4.3 und die bei ihrem Beweis geschilderte schrittweise Reduktion zeigen, daß man das Verfahren so lange fortsetzen kann, wie es gelingt, die Wirkung von H_l in normale Wirkungen aufzulösen, was für kompakte Isotropiegruppen möglich ist, wie wir in § 2 erörterten. Diese Notwendigkeit der Typeneinteilung macht immer speziellere Annahmen über die Immersion erforderlich, weil Immersionen, die den Typ wechseln, sich dem hier geschilderten Verfahren entziehen. Will man diese Spezialisierung vermeiden, so muß man versuchen, eine der $\mathfrak{g},H_\lambda$-Strukturen für möglichst kleines λ durch G-Invarianten der Klasse $\mathfrak{F}_\lambda$ zu charakterisieren und so die weitere Reduktion zu vermeiden. Zum Beispiel läßt sich die Struktur erster Ordnung für Hyperflächen des euklidischen Raumes durch die erste und zweite Grundform beschreiben. Das Beispiel 4.2 zeigt jedoch, daß auf diesem Weg vorläufig kaum allgemeine Resultate zu erwarten sind. Man denke auch daran, daß schon die Theorie der Kurven des dreidimensionalen euklidischen Raumes versagt, wenn man nicht voraussetzt, daß die Krümmung positiv ist. Die beiden hier zu unterscheidenden Typen sind die Geraden, bei denen die Krümmung identisch gleich Null ist, und die allgemein gekrümmten Kurven mit stets positiver Krümmung. Andererseits führt das E.-Cartansche Verfahren auf eine natürliche lokale Klassifikation der Immersionen.

Unter der Annahme, daß es gelingt, die Typeneinteilung bei jedem Reduktionsschritt vorzunehmen, bricht das Reduktionsverfahren in den folgenden zwei Fällen ab.

Fall I. Es gibt eine kleinste natürliche Zahl k, für die $\dim H_k = 0$ gilt. Dann hat E_k diskrete Fasern, und $p_k\colon E_k \to Y^m$ ist eine Überlagerung. Wenn wir an einer Stelle y_0 durch eine Art „Orientierung" ein Reper $z_0 \in p^{-1}(y_0)$ willkürlich auszeichnen, erhalten wir lokal und, wenn Y^m einfach zusammenhängend ist, auch global ein eindeutig bestimmtes kanonisches Reper $z = z(y)$. Die 1-Form $z^*\omega_k$, deren Koeffizienten (4.18) für $\varkappa = m+1, \ldots, r$ dann — bis auf die erwähnte diskrete Wirkung von H_k — G-Invarianten der Klasse $\mathfrak{F}_k$ sind, ist ein vollständiges Invariantensystem für diese Klasse; man betrachtet dabei entweder „orientierte" Immersionen oder nimmt die Orbits $H_k \cdot (z^*\omega_k)$, die man lokal differenzierbar repräsentieren kann, als vollständige Invariante.

Fall II. Es gilt $\dim H_k > 0$, aber die Koeffizienten k-ter Ordnung $b'^{\varkappa}_{a}$, $\varkappa = n_{k-1} + 1, \ldots, n_k$, und b_{aa}, $a = \mu_{k-1}+1, \ldots, \mu_k$, hängen nicht mehr von den vertikalen Koordinaten ab; es gelten also (4.18) und (4.20) für *alle* Koeffizienten k-ter Ordnung. Dann ist die Wirkung von H_k über diesen Koeffizienten trivial, und wir erhalten bei dem angegebenen Reduktionsverfahren $H_{k+1} = H_k$, also keine echte Reduktion. Insbesondere tritt das auf, wenn die Immersion f lokal ein Orbit ist, d. h., eine Liesche Untergruppe $K \subset G$ existiert so, daß $f(Y^m)$ eine offene Untermannigfaltigkeit von Kx für ein gewisses $x \in X^n$ ist. Dieser Spezialfall wird durch den folgenden, bereits von E. CARTAN [4], § 132, stammenden Satz charakterisiert:

Satz 4.4. *Die Immersion $f\colon Y^m \to X^n$ sei von einem gewissen Typ $\mathfrak{F}_k$; alle Invarianten c_a der Ordnungen $l \leqq k$ und die Koeffizienten k-ter Ordnung $b'^{\varkappa}_{a}$ seien konstant. Dann gibt es zu zwei beliebigen Elementen $z_0, z_1 \in E_k$ Umgebungen $U_\iota \subset Y$, $\iota = 0, 1$, mit $p_k(z_\iota) \in U_\iota$ und ein eindeutig bestimmtes Element $g_0 \in G$ mit*

$$g_0 f_k(z_0) = f_k(z_1) \quad \textit{und} \quad g_0 f(U_0) = f(U_1).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist uns die Reduktion E_k der durch die Immersion f bestimmten $\mathfrak{g},H$-Struktur auf die Untergruppe H_k gegeben; ω_k sei die Strukturform von E_k. Wir versuchen zuerst, lokal definierte Diffeomorphismen $\varphi\colon V \to \tilde{V}$, $V, \tilde{V}$ offen in E_k, zu finden, die $\varphi^*\omega_k = \omega_k$ erfüllen. Dazu betrachten wir in der Pro-

duktmannigfaltigkeit $E_k \times E_k$ der Paare $(\tilde{z}, z)$ das aus den $\dim E_k = m + r - n_k$ linear unabhängigen Formen bestehende Pfaffsche System

$$\omega^i(\tilde{z}, d\tilde{z}) - \omega^i(z, dz) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, n_k + 1, \ldots, r, \tag{4.21}$$

und zeigen, daß es involutiv ist. Weil ω_k die Strukturgleichung (3.5) erfüllt, gilt

$$d\omega^I = -\frac{1}{2} c^I{}_{JK} \omega^J \wedge \omega^K, \quad I, J, K = 1, \ldots, r, \tag{4.22}$$

wobei $c^I{}_{JK}$ die Strukturkonstanten der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind. Äußere Differentiation von (4.21) ergibt nach (4.22)

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^i - d\omega^i = &-\frac{1}{2} c^i{}_{jk}(\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k - \omega^i \wedge \omega^k) \\ &- c^i{}_{j\mu}(\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^\mu - \omega^j \wedge \omega^\mu) \\ &-\frac{1}{2} c^i{}_{\mu\nu}(\tilde{\omega}^\mu \wedge \tilde{\omega}^\nu - \omega^\mu \wedge \omega^\nu); \end{aligned} \tag{4.23}$$

hierbei haben wir $\tilde{\omega}^i = \omega^i(\tilde{z}, d\tilde{z})$ gesetzt, die Indizes i, j, k durchlaufen den in (4.21) angegebenen Bereich, und für μ, ν sowie α, β gelte

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, m; \quad \mu, \nu, \varkappa = m + 1, \ldots, n_k. \tag{4.24}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite von (4.23) verschwindet offenbar als Folge von (4.21). Das Verschwinden der beiden anderen Summen erhält man, wenn man

$$\tilde{\omega}^\mu = b'^\mu{}_\alpha \tilde{\omega}^\alpha, \quad \omega^\mu = b'^\mu{}_\alpha \omega^\alpha \tag{4.25}$$

in sie einsetzt; weil die $b'^\mu{}_\alpha$ von $\tilde{z}$, z unabhängige Konstanten sind, ist ja z. B.

$$\tilde{\omega}^\mu \wedge \tilde{\omega}^\nu - \omega^\mu \wedge \omega^\nu = b'^\mu{}_\alpha b'^\nu{}_\beta (\tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta - \omega^\alpha \wedge \omega^\beta) = 0$$

als Folge von (4.21). Wir betrachten nun ein Paar (z_1, z_0). Weil die $\tilde{\omega}^i$ eine Basis von $T^*_{\tilde{z}} E_k$ sind, können wir das System (4.21) lokal in der äquivalenten Form

$$d\tilde{z}^i - A^i{}_j(\tilde{z}, z)\, dz^j = 0 \tag{4.26}$$

darstellen, wobei sogar $\operatorname{rg}(A^i{}_j) = m + r - n_k$ gilt. Daher können wir die Lösung durch (z_1, z_0) lokal in der Gestalt

$$\varphi: z \in V \mapsto \tilde{z} = \varphi(z) \in \tilde{V} \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0) = z_1 \tag{4.27}$$

darstellen; aus der Rangeigenschaft folgt, daß φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es gilt nun *unter den Voraussetzungen von Satz* 4.4.

Lemma 4.2. *Ist* $\psi: p_k^{-1}(U) \to p_k^{-1}(\tilde{U})$, $U, \tilde{U} \subset Y^m$ *offene Mengen, ein Isomorphismus der auf* U *bzw.* $\tilde{U}$ *eingeschränkten* $\mathfrak{g}, H_k$*-Strukturen, so ist der Graph* $\{(\psi(z), z) \mid z \in p_k^{-1}(U)\}$ *eine Lösung von* (4.21). *Umgekehrt läßt sich jede lokal definierte Lösung* φ (4.27) *von* (4.21) *zu einem derartigen lokalen Isomorphismus der* $\mathfrak{g}, H_k$*-Strukturen fortsetzen.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt sofort aus der Gleichung $\omega_k = \psi^* \tilde{\omega}_k$, deren Komponentendarstellung die Gleichungen (4.21) enthält. Umgekehrt sei eine Lösung (4.27) gegeben. Wählen wir V genügend klein und setzen $U = p_k(V)$, so finden wir einen Schnitt $y \in U \mapsto z(y) \in V$ mit $z(y_0) = z_0$. Wir definieren nun

$$\psi: z = h \times z(y) \in p_k^{-1}(U) \mapsto \psi(z) := h \times \varphi(z(y)) \in E_k. \tag{4.28}$$

Offenbar ist ψ ein Isomorphismus des auf U eingeschränkten Hauptfaserbündels $E_k|U$ in E_k. Wir haben zu zeigen, daß $\psi^*\tilde{\omega}_k = \omega_k$ gilt, wobei $\tilde{\omega}_k$ die auf $\psi(p_k^{-1}(U)) = p_k^{-1}(\tilde{U})$ eingeschränkte Strukturform bezeichnet. Ist $A \in \mathfrak{h}_k$ und $\tilde{A}$ das entsprechende fundamentale Vektorfeld auf E_k, so gilt $\psi_*\tilde{A} = \tilde{A}$, also $\psi^*\tilde{\omega}_k(A) = \tilde{\omega}_k(\psi_*\tilde{A}) = \tilde{\omega}_k(\tilde{A}) = A = \omega_k(\tilde{A})$. Weil nun φ eine Lösung von (4.21) ist und (4.25) mit konstanten Koeffizienten gilt, erhalten wir zunächst $\varphi^*\tilde{\omega}_k = \omega_k$. Ist nun $t \in T_zE_k$ ein Tangentialvektor an den Schnitt $h \times z(y)$, h konstant, so folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k(d\psi t) &= \tilde{\omega}_k(d\sigma_h \circ d\varphi \circ d\sigma_h^{-1} t)\\ &= Ad(h)\,\tilde{\omega}_k(d\varphi \circ d\sigma_h^{-1} t)\\ &= Ad(h)\,\omega_k(d\sigma_h^{-1} t) = \omega_k(t),\end{aligned}$$

weil ω_k eine Strukturform ist. Daher ist ψ ein Isomorphismus der $\mathfrak{g},H_k$-Strukturen und definiert nach dem ersten Teil des Lemmas ebenfalls eine Lösung von (4.21). Setzt man in (4.28) $z = z_0$, so folgt $h = e$ und $\psi(z_0) = \varphi(z_0) = z_1$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen setzt ψ die Lösung φ fort. □

Wir können nun den Beweis von Satz 4.4 leicht zu Ende führen. Wegen Lemma 4.2 können wir annehmen, daß die Lösung (4.27) ein über U definierter Isomorphismus der $\mathfrak{g},H_k$-Strukturen ist. Nach Satz 3.2 sind die durch die $\mathfrak{g},H_k$-Strukturen auf $U_0 = U$ und $U_1 := p_k(\varphi(p_k^{-1}(U)))$ definierten Immersionen $f_k|U_0$, $f_k|U_1$ in X^{n_k} G-äquivalent. Wir definieren g_0 durch $g_0 := \tilde{f}_k(z_1)\,\tilde{f}_k(z_0)^{-1}$ und betrachten das auf $p_k^{-1}(U_0) \times G$ definierte, involutive Pfaffsche System

$$\omega(g, dg) - \omega_k(z, dz) = 0. \tag{4.29}$$

Dann ist $g = \tilde{f}_k \circ \varphi$ eine Lösung mit $\tilde{f}_k \circ \varphi(z_0) = \tilde{f}_k(z_1)$; wegen der Links-Invarianz der Strukturform ω von G ist aber auch $L_{g_0} \circ \tilde{f}_k$ eine auf $p_k^{-1}(U_0)$ definierte Lösung mit $L_{g_0} \circ \tilde{f}_k(z_0) = \tilde{f}_k(z_1)$. Daher müssen beide Lösungen übereinstimmen, und durch die Projektion $\pi: G \to X^n$ erhalten wir die Behauptung $g_0 f(U_0) = f(U_1)$. □

Anmerkung bei der Korrektur:

Nach Abschluß dieser Arbeit erschien mit verwandten Ergebnissen das Buch von G. R. JENSEN, Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous Spaces, Lect. Notes in Math. 610, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1977. Ferner sei noch auf den Artikel von O. KOWALSKI, A contribution to the Cartan's method of specialization of frames, Spisy přírodov. fak. Univ. J. E. Purkyně v Brně, T 4 (1968), 107–120, und die dort unter [2] zitierten Arbeiten desselben Autors verwiesen.

LITERATUR

[1] BLASCHKE, W., und H. REICHARDT: Einführung in die Differentialgeometrie. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.

[2] BOČEK, L.: Untermannigfaltigkeiten von homogenen Räumen. Czech. Math. J. *21* (96) (1971), 1–4.

[3] BOREL, A.: Seminar on Transformation Groups, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.

[4] CARTAN, E.: La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. Gauthier-Villars, Paris 1951.

[5] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis 3. Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Verlag, Braunschweig/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976 (Übersetzung aus dem Französischen).

[6] FAVARD, J.: Cours de géométrie différentielle locale. Gauthier-Villars, Paris 1957.

[7] Фиников, С. П.: Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Гостехиздат, Москва-Ленинград 1948.
[8] Франк, Б.: Теория кривых в пространстве Минковского. Вестник Ленингр. ун-та *7* (1964), 46—56.
[9] Gollek, H.: Über den Orbitraum Liescher Transformationsgruppen. Czech. Math. J. *26* (101) (1976), 252—258.
[10] Gollek, H.: On the induced geometric object on submanifolds of homogeneous spaces. Beiträge zur Algebra und Geometrie *9* (1979), 103—130.
[11] Griffiths, P.: On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry. Duke Math. J. *41* (1974), 775 to 814.
[12] Hermann, R.: Equivalence invariants for submanifolds of homogeneous spaces. Math. Ann. *158* (1965), 284—299.
[13] Jänich, K.: Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten. Lect. Notes in Math. 59, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968.
[14] Kobayashi, S., and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol. I, II. Interscience Publishers, New York—London—Sydney 1963, 1969.
[15] Kolář, I.: On the infinitesimal geometric objects of submanifolds. Arch. Math. 4, Scripta Fac. Sci. Ujep Brunensis *IX* (1973), 203—211.
[16] Kuiper, N. H., and K. Yano: On geometric objects and Lie groups of transformations. Indag. Math. *17* (1955), 411—420.
[17] Лаптев, Г. Ф.: Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Труды Моск. Мат. о-ва *2* (1953), 275—382.
[18] Sulanke, R.: Kurven in Graßmann-Mannigfaltigkeiten und in Räumen von k-Ebenen. Math. Nachr. *76* (1977), 213—229.
[19] Sulanke, R., und P. Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Birkhäuser Verlag, Basel—Stuttgart 1972.
[20] Švec, A.: Cartan's method of specialisation of frames. Czech. Math. J. *16* (91) (1966), 552—599.
[21] Švec, A.: On the geometry of submanifolds in homogeneous spaces. Mat. Časopis *17* (1967), 146—166.

Manuskripteingang: 17. 1. 1978

VERFASSER:

Rolf Sulanke, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

Alois Švec, Dept. of Math., University of Kuwait