Beiträge zur Algebra und Geometrie
10 (1980), 51–61

# Zum Aufbau der Bewegungsgruppe des hyperbolischen Raumes durch Spiegelungen

LUTZ SCHWEDLER

## 1. Einleitung

Die beiden Geometer H. WIENER und J. HJELMSLEV haben in ihren Arbeiten um die Jahrhundertwende als erste hervorgehoben, daß die geometrisch bedeutungsvollen Struktureigenschaften der Bewegungsgruppen weniger durch ihre kontinuierlichen Untergruppen als vielmehr durch das Verhalten ihrer involutorischen Elemente zum Ausdruck kommen. Durch die grundlegenden Arbeiten von K. REIDEMEISTER und insbesondere von F. BACHMANN und dessen zahlreichen Schülern wurde das Studium von axiomatisch gegebenen Gruppen mit einem aus involutorischen Elementen bestehenden invarianten Erzeugendensystem inzwischen zu einem fruchtbaren Instrument geometrischer Grundlagenforschung. Die ebene Elementargeometrie wird dabei zu einem speziellen Zweig der Gruppentheorie. Ein derart abstrakter Standpunkt soll hier nicht eingenommen werden. Wir wollen verdeutlichen, daß ein Aufbau der Bewegungsgruppe durch Spiegelungen besonders einsichtig ist und in natürlicher Weise zur Vermittlung einer anschaulichen Vorstellung vom Charakter des betreffenden Raumes beiträgt. Dieser von M. JEGER [4] für den euklidischen Raum ausgeführte Gedanke wird beim Studium der Bewegungsgruppe des hyperbolischen Raumes durch das Auftreten von sogenannten Grenzdrehungen noch erhärtet. Ein anschauliches Erfassen dieses speziellen Bewegungstyps ist ohne Rückgriff auf Spiegelungen nur schwer möglich. Zudem verdeutlicht der spiegelungsgeometrische Aufbau der Bewegungsgruppe auch besonders eindrucksvoll sowohl die Gemeinsamkeiten als auch die Unterschiede in den Struktureigenschaften der Bewegungsgruppen des euklidischen und des hyperbolischen Raumes.
Im folgenden denken wir uns den hyperbolischen Raum etwa durch das Axiomensystem aus [6] gegeben, ersetzen aber die dortigen Bewegungsaxiome durch zu diesen äquivalente Aussagen über Spiegelungen. Auf deren Basis werden in völlig elementarer Weise die verschiedenen Bewegungstypen des hyperbolischen Raumes charakterisiert. Aus methodischen Erwägungen wurde bei der Auswahl der Spiegelungsaxiome kein Wert auf Unabhängigkeit gelegt.

## 2. Spiegelungsaxiome und einfache Folgerungen

Wir ersetzen im Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie den Grundbegriff Bewegung durch die folgende Definition und die Bewegungsaxiome durch die Forderungen S 1, ..., S 4.
Ebenen bezeichnen wir mit kleinen griechischen, Geraden mit kleinen lateinischen

und Punkte mit großen lateinischen Buchstaben. Ist $\varepsilon$ eine Ebene, $s$ ein Strahl mit $s \subset \varepsilon$, $P$ ein Punkt mit $P \in \varepsilon \wedge P \notin s$ und $\mathfrak{H}$ die (offene) Halbebene von $\varepsilon$ bezüglich der Trägergeraden von $s$, die $P$ enthält, dann wollen wir unter der *Fahne* $f = sP^+$ im üblichen Sinne die Vereinigungsmenge der Punkte von $s$ und $\mathfrak{H}$ verstehen.

Definition 1. $\sigma_\alpha$ heißt *Spiegelung an der Ebene* $\alpha$ $:\Leftrightarrow$ $\sigma_\alpha$ ist eine bijektive und anordnungstreue Abbildung des hyperbolischen Raumes auf sich mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Punkte von $\alpha$ sind Fixpunkte bezüglich $\sigma_\alpha$.

(2) $\sigma_\alpha$ vertauscht die beiden Halbräume bezüglich $\alpha$.

Für Ebenenspiegelungen fordern wir die folgenden Axiome:

(S1) Zu jeder Ebene $\varepsilon$ gibt es genau eine Ebenenspiegelung $\sigma_\varepsilon$.

(S2) Sind $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$ beliebige Ebenenspiegelungen, so ist $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ die Spiegelung an der Ebene $\sigma_\alpha(\beta)$.

(S3) Ist $\Phi$ ein Produkt endlich vieler Ebenenspiegelungen, $f$ eine Fahne und gilt $\Phi(f) = f$, so ist jeder Punkt von $f$ Fixpunkt bezüglich $\Phi$.

(S4) Zu einer beliebigen Strecke $AB$ gibt es eine Ebenenspiegelung, die $AB$ in $BA$, und zu einem beliebigen Winkel $AOB$ gibt es eine Ebenenspiegelung, die $AOB$ in den Winkel $BOA$ überführt.

Definition 2. Jedes endliche Produkt

$$\Phi = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_n}$$

von Ebenenspiegelungen heißt *Bewegung* des Raumes.

Setzt man in (S2) $\alpha = \beta$, so wird ersichtlich, daß die Ebenenspiegelung eine involutorische Abbildung ist. Damit ist die Identität $I$ ebenfalls eine Bewegung, und man schließt aus Definition 2 sofort, daß die Menge aller Bewegungen bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe $\mathfrak{B}$ darstellt.
Zur Klassifikation von $\mathfrak{B}$ benötigen wir einige Aussagen über Orthogonalitätsbeziehungen.

Definition 3. $\alpha_1$ heißt *orthogonal* zu $\alpha_2$ $(\alpha_1 \perp \alpha_2) := \sigma_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1 \wedge \alpha_1 \neq \alpha_2$.
Ist $\alpha \perp \beta$, also $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha$, so ergibt sich mit (S2) und (S1)

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\sigma_\beta(\alpha)} = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta, \quad \text{also} \quad \sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha = \sigma_{\sigma_\alpha(\beta)},$$

d. h. $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$, und man erhält

Folgerung 1. *Die Orthogonalität von Ebenen ist symmetrisch.*

Ebenfalls mit (S2) läßt sich aus den Definitionen 2 und 3 Folgerung 2 herleiten.

Folgerung 2. *Die Orthogonalität von Ebenen ist invariant gegenüber Bewegungen des Raumes.*

Beweis. Ist $\sigma_\varepsilon$ eine beliebige Ebenenspiegelung und sind $\alpha$, $\beta$ zwei zueinander orthogonale Ebenen, so gilt

$$\sigma_{\sigma_\varepsilon(\beta)}\big(\sigma_\varepsilon(\alpha)\big) = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\varepsilon(\alpha) = \sigma_\varepsilon(\alpha),$$

d. h., aus $\alpha \perp \beta$ folgt $\sigma_\varepsilon(\alpha) \perp \sigma_\varepsilon(\beta)$. Hieraus ergibt sich mit Definition 2 die Behauptung.

Unmittelbar einsichtig ist wegen der Invarianz der Zwischenrelation bei Ebenenspiegelungen die

Folgerung 3. *Gilt $\alpha \perp \beta$, so werden die Halbräume bezüglich $\alpha$ bei $\sigma_\beta$ jeweils auf sich abgebildet.*

Die Orthogonalität von Geraden und Ebenen sowie von Geraden führen wir auf die von Ebenen zurück.

Definition 4. a) Eine Gerade $g$ und eine Ebene $\varepsilon$ sind genau dann (zueinander) *orthogonal* ($g \perp \varepsilon$), wenn $g$ nicht in $\varepsilon$ enthalten ist und alle Ebenen, die $g$ enthalten, orthogonal zu $\varepsilon$ sind.
b) Die Gerade $a$ ist genau dann *orthogonal* zur Geraden $b$, wenn es eine Ebene $\alpha$ gibt, die $a$ enthält und orthogonal zu $b$ ist.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 4. $g \perp \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_\varepsilon(g) = g \wedge g \cap \varepsilon \neq g$.

Über Existenz und Eindeutigkeit von Lotgeraden zu einer gegebenen Ebene beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. 1.a) *Zu einem beliebigen Punkt $P$ und einer beliebigen Ebene $\varepsilon$ gibt es genau eine Gerade $l$ mit $P \in l \wedge l \perp \varepsilon$.*

b) *Ist $\alpha$ eine beliebige Ebene und $b$ eine zu $\alpha$ nicht orthogonale Gerade, so gibt es genau eine Ebene $\beta$ mit $\beta \supset b \wedge \beta \perp \alpha$.*

c) *Zu einem beliebigen Punkt $P$ und einer beliebigen Geraden $g$ gibt es genau eine Ebene $\varepsilon$ mit $P \in \varepsilon \wedge g \perp \varepsilon$.*

Wir beweisen nur die erste Aussage, 1b) und 1c) lassen sich ohne Mühe aus dieser ableiten.
Beim Beweis von Hilfssatz 1a) betrachten wir zunächst den Fall $P \notin \varepsilon$. Dann gilt $\sigma_\varepsilon(P) = P' \neq P$. Bezeichnen wir mit $l := g(P, P')$ die Gerade durch $P$ und $P'$, so ist wegen $\sigma_\varepsilon(l) = l$ nach Folgerung 4 die Gerade $l$ orthogonal zu $\varepsilon$. Es kann auch nur genau eine Lotgerade durch $P$ zu $\varepsilon$ geben, denn die Existenz zweier verschiedener Geraden $l_1$, $l_2$ mit $P \in l_1, l_2 \wedge l_1, l_2 \perp \varepsilon$, führt wegen $\sigma_\varepsilon(l_i) = l_i$, $\sigma_\varepsilon(P) = P' \in l_i$ $(i = 1, 2)$ und $P' \neq P$ sofort zu einem Widerspruch.
Den Fall $P \in \varepsilon$ führen wir auf das gewonnene Resultat zurück. Wir wählen einen Punkt $Q \notin \varepsilon$. Nach dem eben Bewiesenen gibt es genau eine Gerade $q$ mit $Q \in q \wedge q \perp \varepsilon$. Es sei $F := q \cap \varepsilon$. Im nichttrivialen Fall gilt $P \neq F$, so daß nach (S4) eine Ebenenspiegelung $\sigma_\alpha$ existiert, die $P$ und $F$ vertauscht, also die Gerade $g(P, F)$ auf sich abbildet. Nach Folgerung 4 ist dann $g(P, F) \perp \alpha$, und man erhält mit Definition 4a $\varepsilon \perp \alpha$, also $\sigma_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$. Damit ist aber nach Folgerung 2 mit $q' := \sigma_\alpha(q)$ die gesuchte Lotgerade durch $P$ zu $\varepsilon$ gefunden. Wären nun $l_1$, $l_2$ zwei verschiedene Lotgeraden durch $P$ zu $\varepsilon$ und ist $\beta$ eine Ebene mit $l_1 \subset \beta \wedge l_2 \cap \beta = P$ und $Q$ ein Punkt mit $Q \in l_2$ und $Q \neq P$, so würden wegen $\sigma_\varepsilon(PQ^+) = PQ^-$ die Punkte $Q$ und $\sigma_\varepsilon(Q)$ im Widerspruch zur Folgerung 3 auf verschiedenen Seiten von $\beta$ liegen. Damit ist die Eindeutigkeit auch im Fall 2 nachgewiesen.

Hilfssatz 2. *Ist $f$ eine Fahne und $\Phi$ eine Bewegung mit $\Phi(f) = f$, so ist $\Phi$ entweder die Identität $I$ oder die Spiegelung $\sigma_{\varepsilon(f)}$ an der Trägerebene von $f$.*

Beweis. Gilt $\Phi(f) = f$, so ist nach (S3) jeder Punkt von $f$ und damit auch jeder Punkt der Trägerebene $\alpha := \varepsilon(f)$ von $f$ Fixpunkt bezüglich $\Phi$. Wegen der Anordnungs-

treue von $\Phi$ werden dann die beiden Halbräume $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ von $\alpha$ bei $\Phi$ entweder miteinander vertauscht oder jeweils auf sich abgebildet.
Im Fall 1 ist nach Definition 1 und (S 1) $\Phi = \sigma_\alpha$.
Wir betrachten den zweiten Fall. Es sei $P$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{H}_1$ und $s$ ein zu $\alpha$ orthogonaler Strahl mit $P \notin s \wedge s \subset \mathfrak{H}_1$. Wir zeigen, daß die Fahne $sP^+$ bei $\Phi$ auf sich abgebildet wird. Ist $l$ der zu $\alpha$ senkrechte Strahl mit $P \in l \wedge l \subset \mathfrak{H}_1$, dann sind $l$ und $s$ nach Hilfssatz 1 komplanar. Da $\alpha$ Fixpunktebene bei $\Phi$ ist, werden $l$ und $s$ jeweils auf sich abgebildet. Wegen der Eindeutigkeit des Lotes muß $l \cap s = \emptyset$ gelten, und man erhält $\Phi(sP^+) = sP^+$ und damit nach (S3) $\Phi(P) = P$. Analog zeigt man, daß alle Punkte aus $\mathfrak{H}_2$ Fixpunkte bei $\Phi$ sind.
Mit den Hilfssätzen 1 und 2 läßt sich nun leicht das Starrheitsaxiom ([6], S. 102) für hyperbolische Bewegungen herleiten. Damit ist der Anschluß an die übliche, etwa in [5] und [6] betriebene Kongruenzgeometrie hergestellt, und wir können darauf verzichten, eine Reihe von im folgenden benötigten Sätzen über Parallelwinkel, Parallellot, Grenzsenkrechte usw. explizit herzuleiten.
Das Studium der Bewegungsgruppe $\mathfrak{B}$ beginnen wir mit der Untersuchung der zweispiegeligen Bewegungstypen.

## 3. Zusammensetzung zweier Spiegelungen

Für zwei verschiedene Ebenen gibt es im hyperbolischen Raum drei mögliche Lagebeziehungen. Die Ebenen besitzen entweder eine gemeinsame Gerade $g$, eine gemeinsame Senkrechte $l$, oder sie sind parallel.
Den zuletzt genannten Sachverhalt wollen wir nach D. HILBERT ausdrücken durch die Redeweise: Die Ebenen haben genau ein Ende $E$ gemeinsam.
Während die entsprechenden Ebenenbüschel im Fall 1 ($g$-Büschel) bzw. im Fall 2 ($l$-Büschel) durch die gemeinsame Gerade $g$ bzw. das gemeinsame Lot $l$ eindeutig charakterisiert sind, muß beim Parallelbüschel bekanntlich neben dem Ende $E$ eine Ebene des betreffenden Büschels gegeben sein.
Unter dem Parallelbüschel $\Pi(E, \varepsilon)$ wollen wir dann die Menge aller Ebenen verstehen, die mit $\varepsilon$ weder eine gemeinsame Gerade noch ein gemeinsames Lot besitzen, aber mit $\varepsilon$ das Ende $E$ gemeinsam haben.
Ist ein beliebiges Ebenenbüschel gegeben und betrachten wir die Ebenen, die zu allen Ebenen des gegebenen Büschels orthogonal sind, so bilden diese wieder ein Ebenenbüschel. Das zu einem $g$-Büschel ($l$-Büschel) orthogonale ist dabei ein $l$-Büschel ($g$-Büschel) und das zu einem Parallelbüschel $\Pi(E, \varepsilon)$ orthogonale Büschel ist ein Parallelbüschel $\Pi(E, \bar{\varepsilon})$ mit $E \in \bar{\varepsilon}$ und $\bar{\varepsilon} \perp \varepsilon$.
Den drei Arten von Ebenenbüscheln entsprechen drei Typen von zweispiegeligen Bewegungen, die wir in den Sätzen 1—3 charakterisieren.

Definition 5. *$Dg$ heißt Drehung um die Gerade $g$* $:\Leftrightarrow$

$$Dg = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \wedge g \subset \alpha, \beta.$$

Satz 1. *Eine von der Identität verschiedene Bewegung $\Phi$ ist genau dann eine Drehung $Dg$ um die Gerade $g$, wenn $\Phi(P) = P$ für $P \in g$ und $\Phi(P) \neq P$ für $P \notin g$ gilt.*

Beweis. Es sei $g$ eine Gerade und $\Phi$ eine Bewegung mit $\Phi(P) = P$ für $P \in g$ und $\Phi(P) \neq P$ für $P \notin g$. Wir wählen einen Punkt $Q \notin g$. Für diesen gilt $\Phi(Q) = \bar{Q} \neq Q$. Ist $\varepsilon$ eine zu $g$ orthogonale Ebene, so schneidet diese die (voneinander verschiedenen) Halbebenen $gQ^+$ bzw. $g\bar{Q}^+$ in den beiden Strahlen $h_1$, $h_2$. Nach (S4) existiert eine Ebenenspiegelung $\sigma_\alpha$, die $h_1$ in $h_2$ überführt und deshalb nach Folgerung 2 und Hilfssatz 1 auch die durch $g$ und $h_1$ bzw. $g$ und $h_2$ bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, d. h., es gilt $\sigma_\alpha(g\bar{Q}^+) = gQ^+$. Damit ergibt sich $\sigma_\alpha \circ \Phi(gQ^+) = gQ^+$, und hieraus folgt nach Hilfssatz 2 entweder

$$\sigma_\alpha \circ \Phi = I \quad \text{oder} \quad \sigma_\alpha \circ \Phi = \sigma_\beta ,$$

wobei $\beta$ die durch $g$ und $Q$ bestimmte Ebene darstellt. Ein Vergleich der Fixelemente liefert $\Phi \neq \sigma_\alpha$, und damit muß $\sigma_\alpha \circ \Phi = \sigma_\beta$ gelten, also $\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \wedge \alpha \wedge \beta = g$.

Der Beweis der Umkehrung ist trivial, da man mit Hilfssatz 1 aus $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta(F) = F$ sofort $F \in \alpha \wedge F \in \beta$ folgert.

Variiert man im obigen Beweis den Punkt $Q$ in geeigneter Weise, so wird deutlich, daß eine Drehung $Dg$ auf beliebig viele Arten als Produkt zweier Spiegelungen an die Gerade $g$ enthaltenden Ebenen darstellbar ist. Hieraus folgt unmittelbar der

Satz 1′. *Sind $\alpha, \beta, \gamma$ Ebenen mit $g \subset \alpha, \beta, \gamma$, so gilt stets $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta \wedge g \subset \delta$.*

Ohne Mühe erkennt man auch, daß das Produkt zweier Spiegelungen an voneinander verschiedenen Ebenen $\alpha, \beta$ mit $g \subset \alpha, \beta$ genau dann kommutativ ist, wenn $\alpha \perp \beta$ gilt.

In der Tat, ist $\alpha \perp \beta$, also $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha$, so ergibt sich mit (S2) $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_{\sigma_\beta(\alpha)} = \sigma_\alpha$, also $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$.

Gilt umgekehrt $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$, d. h. $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\alpha$, so ergibt sich mit (S2) und (S1) $\sigma_{\sigma_\beta(\alpha)} = \sigma_\alpha$, also $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha$ und wegen $\alpha \neq \beta$ die Behauptung.

Definition 5′. $\sigma_g$ heißt *Spiegelung an der Geraden* $g$ $:\Leftrightarrow$

$$\sigma_g = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \wedge \alpha \perp \beta .$$

Ist ein Bündel paralleler Geraden mit dem gemeinsamen Ende $E$ gegeben und ist $P$ ein beliebiger Punkt auf einer dieser Geraden, so versteht man unter der Grenzkugel oder Orisphäre $O_E(P)$ bezüglich $E, P$ (vgl. [6]) bekanntlich die Menge derjenigen, auf den Geraden des gegebenen Bündels liegenden Punkte, die aus $P$ durch Spiegelung an Geraden des gegebenen Bündels hervorgehen.

Eigenschaften der Orisphäre spielen im folgenden eine wichtige Rolle.

Definition 6. $D_\Pi$ heißt *Grenzdrehung bezüglich* $\Pi(E, \varepsilon)$ $:\Leftrightarrow$

$$D_\Pi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \wedge \alpha, \beta \in \Pi(E, \varepsilon).$$

Satz 2. *Eine Bewegung $\Phi \neq I$ ist genau dann eine Grenzdrehung $D_\Pi$ bezüglich $\Pi(E, \varepsilon)$, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

(1) *$\Phi(P) \neq P$ für alle $P$.*

(2) *Ist $\Pi(E, \bar{\varepsilon})$ mit $\bar{\varepsilon} \perp \varepsilon$ das zu $\Pi(E, \varepsilon)$ orthogonale Parallelbüschel und ist $\delta \in \Pi(E, \bar{\varepsilon})$, so gilt stets $\Phi(\delta) = \delta$.*

(3) *Ist $O_E$ eine beliebige Orisphäre bezüglich $E$, so gilt $\Phi(O_E) = O_E$.*[1]

Beweis. Es sei $\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \neq I$ mit $\alpha, \beta \in \Pi(E, \varepsilon)$. Wir weisen die Eigenschaften (1) bis (3) nach. Wegen $\alpha, \beta \in \Pi(E, \varepsilon)$ ist $\alpha \cap \beta = \emptyset$, also $\Phi(P) \neq P$ für alle Punkte $P$. Da jede Ebene aus dem Büschel $\Pi(E, \bar{\varepsilon})$ orthogonal zu $\alpha$ und $\beta$ ist, gilt die Eigenschaft (2), und auch die Eigenschaft (3) ist unmittelbar einzusehen, weil jede Diametral-

[1]) Satz 2 läßt sich auch beweisen, wenn die Bedingungen (1) und (3) ersetzt werden durch

(1′) $\Phi(g) \neq g$ für alle Geraden $g$,

(3′) $\Phi(\Pi(E, \varepsilon)) = \Pi(E, \varepsilon)$.

ebene (Ebene durch $E$) einer Orisphäre eine Symmetrieebene dieser Orisphäre darstellt.
Es sei nun umgekehrt $\Phi$ eine Bewegung mit den Eigenschaften (1) bis (3). Bei $\Phi$ werden parallele Strahlen stets wieder in parallele Strahlen übergeführt, und man schließt hieraus mit den Eigenschaften (2) und (3), daß die Bewegung $\Phi$ das Ebenenbüschel $\Pi(E, \varepsilon)$ auf sich abbildet.
Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt $A$, einen zu den Geraden des durch $E$ bestimmten Geradenbündels parallelen Strahl $s$ mit dem Anfangspunkt $A$ sowie Ebenen $\beta$, $\gamma$ mit $s \subset \beta, \gamma \wedge \beta \in \Pi(E, \varepsilon) \wedge \gamma \in \Pi(E, \bar{\varepsilon})$. Nach (2) gilt $\Phi(s) \subset \gamma$, wegen (1) und (3) ergibt sich $\Phi(s) \neq s$ und $\Phi(s)$ parallel zu $s$. Nach (3) liegen nun $A$ und $\Phi(A) \neq A$ auf $O_E(A)$, d. h., es existiert eine zu $s$ und $\Phi(s)$ parallele Gerade $h$ so, daß $\sigma_h(s) = \Phi(s)$ ist. Damit gilt auch für die Ebene $\alpha$ mit $h \subset \alpha \wedge \alpha \in \Pi(E, \varepsilon)$

$$\sigma_\alpha(s) = \Phi(s).$$

Ist nun $P$ ein Punkt mit $P \in \beta \wedge P \notin s$, so werden die Halbräume bezüglich $\gamma \in \Pi(E, \bar{\varepsilon})$ bei $\sigma_\alpha$ und wegen (2) auch bei $\Phi$ jeweils in sich übergeführt, also wird $\sigma_\alpha(sP^+) = \Phi(sP^+)$ und damit $\sigma_\alpha \circ \Phi(sP^+) = sP^+$. Wegen (1) ist $\sigma_\alpha \neq I$, und man erhält mit Hilfssatz 2 $\sigma_\alpha \circ \Phi = \sigma_\beta$, wobei $\beta$ die durch $s$ und $P$ bestimmte Ebene ist.
Dann ist aber wegen $\alpha, \beta \in \Pi(E, \varepsilon)$ die Bewegung $\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ eine Grenzdrehung $D_\Pi$ bezüglich $\Pi(E, \varepsilon)$.
In Analogie zum Satz 1′ ergibt sich aus dem obigen Beweis unmittelbar der

Satz 2′. *Sind $\alpha, \beta, \gamma$ beliebige Ebenen eines Parallelbüschels $\Pi(E, \varepsilon)$, so gilt stets*

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta \wedge \delta \in \Pi(E, \varepsilon).$$

Definition 7. $S_a$ heißt *Schiebung längs der Geraden $a$* $:\Leftrightarrow$

$$S_a = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \wedge a \perp \alpha, \beta.$$

Satz 3. *Eine Bewegung $\Phi \neq I$ ist genau dann eine Schiebung $S_a$ längs $a$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.*

(1) $\Phi(P) \neq P$ *für alle Punkte* $P$.

(2) $P \notin a \Rightarrow \Phi(aP^+) = aP^+$.

Beweis. Es sei $\Phi$ eine Bewegung mit den Eigenschaften (1) und (2). Wir betrachten eine Ebene $\beta \perp a$. Ist $A := \beta \cap a$ und $s$ ein in $\beta$ liegender Strahl mit dem Anfangspunkt $A$, so gilt $s \perp a$. Es sei $\gamma := \varepsilon(s, a)$ die durch $s$ und $a$ bestimmte Ebene. Dann gilt wegen (2) und Folgerung 2 $\Phi(s) \subset \gamma$ und $\Phi(s) \perp a$. Nach (S4) existiert dann ein $\sigma_\alpha$ mit $\sigma_\alpha(A) = \Phi(A) \in a$, also $\alpha \perp a$, und hieraus ergibt sich ebenfalls mit (2) und Folgerung 2 $\sigma_\alpha(s) = \Phi(s)$. Ist $P$ ein Punkt mit $P \in \beta \wedge P \notin s$, so gilt sogar $\sigma_\alpha(sP^+) = \Phi(sP^+)$, da bei $\sigma_\alpha$ und wegen (2) auch bei $\Phi$ die Halbräume bezüglich $\gamma$ jeweils auf sich abgebildet werden. Also wird $\sigma_\alpha \circ \Phi(sP^+) = sP^+$, und da wegen (1) $\Phi \neq \sigma_\alpha$ gilt, ergibt sich mit Hilfssatz 2 und $\beta := \varepsilon(sP^+)$ schließlich $\sigma_\alpha \circ \Phi = \sigma_\beta$, und wegen $a \perp \alpha, \beta$ ist damit $\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ eine Schiebung $S_a$ längs $a$.
Auf den Beweis der Umkehrung können wir verzichten.

Mit einer zum Satz 1′ analogen Begründung läßt sich aus Satz 3 folgender Satz ableiten:

Satz 3′. *Ist $a$ eine Gerade und sind $\alpha, \beta, \gamma$ Ebenen mit $a \perp \alpha, \beta, \gamma$, so gilt* $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta \wedge \delta \perp a$.

Um Spiegelungsprodukte in geeigneter Weise umformen zu können, formulieren wir

Satz 4. *Zu einem Punkt $P$ und zu Ebenen $\alpha$, $\beta$ existieren stets Ebenen $\alpha'$, $\beta'$ mit $P \in \beta'$ und $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}$.*

Beweis. Zu $P$, $\alpha$, $\beta$ findet man stets eine Ebene $\beta'$, die $P$ enthält und mit $\alpha$, $\beta$ im Büschel liegt. Dann existiert aber nach den Sätzen 1', 2' und 3' eine Ebene $\alpha'$ mit $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_{\beta'} = \sigma_{\alpha'}$, also ist $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}$.

Bemerkung. Ebenfalls ohne Mühe lassen sich aus den Sätzen 1', 2' und 3' die beiden Folgerungen ableiten:

a) Gehören die Geraden $a$, $b$, $c$ einem Büschel an, so ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$, und $d$ gehört zu demselben Büschel.

b) Aus $a, b, c \perp g$ folgt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$ und $d \perp g$.

Wir verzichten auf einen Beweis.

## 4. Zusammensetzung von Geradenspiegelungen

Um drei- und vierspiegelige Bewegungstypen in geeigneter Weise charakterisieren zu können, ist es nützlich, zunächst Produkte von Geradenspiegelungen zu untersuchen.

Satz 5. *Das Produkt zweier Spiegelungen an verschiedenen komplanaren Geraden $a$, $b$ ist entweder eine Drehung, eine Schiebung oder eine Grenzdrehung. Umgekehrt sind Drehung, Schiebung und Grenzdrehung jeweils auf unendlich viele Arten als Produkt zweier Spiegelungen an komplanaren Geraden darstellbar.*

Beweis. Es sei $\varepsilon$ die durch $a$, $b$ bestimmte Ebene. Nach Hilfssatz 1 existieren Ebenen $\alpha$ mit $\alpha \supset a \wedge \alpha \perp \varepsilon$ und $\beta$ mit $\beta \supset b$ und $\beta \perp \varepsilon$. Dann gilt

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_\alpha \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\beta = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$$

und mit den Definitionen 5 bis 7 ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zum Beweis der Umkehrung sei durch $\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2}$ eine Drehung, Schiebung oder Grenzdrehung gegeben. Ist $\varepsilon$ eine zu $\alpha_1$ und $\alpha_2$ orthogonale Ebene und setzen wir $a_1 := \varepsilon \cap \alpha_1$ und $a_2 := \varepsilon \cap \alpha_2$, so wird $\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{a_1} \circ \sigma_{a_2}$.
Da es nach Hilfssatz 1 unendlich viele jeweils zu $\alpha$ und $\beta$ orthogonale und voneinander verschiedene Ebenen $\varepsilon$ gibt, gilt auch die Umkehrung des Satzes 5.

Definition 8. Das Produkt einer Drehung $D_a$ um die Achse $a$ mit einer Schiebung $S_a$ längs $a$ heißt *Schraubung $\mathfrak{S}_a$ bezüglich $a$.*

Drehungen und Schiebungen sind spezielle Schraubungen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wollen wir auch Grenzdrehungen als spezielle Schraubungen auffassen. Die Achse der Schraubung ist dann zu einer — durch ein entsprechendes Parallelbüschel $\Pi$ von Ebenen bestimmten — „Grenzgeraden“ ausgeartet.

Satz 6. *Das Produkt zweier Spiegelungen an windschiefen Geraden $g_1$, $g_2$ ist eine Schraubung mit der gemeinsamen Senkrechten von $g_1$, $g_2$ als Achse.*

Beweis. Es seien $g_1$, $g_2$ windschiefe Geraden, und $l$ sei deren gemeinsame Senkrechte. Für $i = 1, 2$ betrachten wir Ebenen $\alpha_i := \varepsilon(g_i, l)$ und Ebenen $\beta_i$ mit $\beta_i \supset g_i$ und $\beta_i \perp l$. Setzen wir $p := \beta_1 \cap \alpha_2$ und $q := \beta_2 \cap \alpha_1$, dann gilt wegen $\alpha_1, \alpha_2 \perp \beta_1, \beta_2$ nach Satz 5

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_q = \sigma_p \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} = S_l$$

sowie

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = D_l,$$

und wir erhalten

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_q \circ \sigma_q \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = S_l \circ D_l = \mathfrak{S}_l.$$

Da auch

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_p \circ \sigma_p \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} = D_l \circ S_l = \mathfrak{S}_l$$

gilt, sind bei einer Schraubung $\mathfrak{S}_l$ Drehung und Schiebung miteinander vertauschbar.

Satz 6'. *Es sei $\mathfrak{S}_m := S_m \circ D_m$ eine (eigentliche) Schraubung mit der Achse $m$ und $g$ eine beliebige zu $m$ orthogonale Gerade. Dann existiert eine zu $m$ ebenfalls orthogonale Gerade $h$ so, daß*

$$\mathfrak{S}_m = \sigma_h \circ \sigma_g$$

*gilt.*

Beweis. Mit den Voraussetzungen des Satzes 6' lassen sich nach Satz 4 Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ mit $\alpha_2 \supset g$ und $\beta_2 \supset g$ so angeben, daß

$$S_m = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \quad \text{und} \quad D_m = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \perp m$ und $m \subset \beta_1, \beta_2$ gilt. Setzt man $h := \alpha_1 \cap \beta_1$, so ergibt sich

$$\mathfrak{S}_m = S_m \circ D_m = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\beta_2} = \sigma_h \circ \sigma_g.$$

Die Sätze 5, 6 und 6' drücken aus, daß das Produkt zweier Geradenspiegelungen stets eine — eventuell ausgeartete — Schraubung ist und daß umgekehrt eine Schraubung (einschließlich Grenzdrehung) auf unendlich viele Arten als Produkt zweier Geradenspiegelungen realisiert werden kann.

Um Produkte von Schraubungen charakterisieren zu können, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 3. *Zu beliebigen Geraden $a, b, c$ existieren stets Geraden $u, v$ mit $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_u \circ \sigma_v$.*

Beweis. Wir formen zunächst das Produkt auf der linken Seite geeignet um. Ist $P$ ein beliebiger Punkt der Geraden $c$, so existieren zu der Schraubung $\sigma_a \circ \sigma_b$ nach den Sätzen 5 und 6' Geraden $a', b'$ mit $P \in b'$ und $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{a'} \circ \sigma_{b'}$. Die rechte Seite der Gleichung

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c$$

läßt sich nun in einfacher Weise als Produkt zweier Geradenspiegelungen darstellen.

Fall 1. $P \in a'$. Wir betrachten eine Gerade $d$ mit $P \in d$, $d \subset \varepsilon(b', c)$, $d \perp a'$ und erhalten

$$\sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c = (\sigma_{a'} \circ \sigma_d) \circ (\sigma_d \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c) = \sigma_u \circ \sigma_v.$$

Fall 2. $P \notin a'$. Wir konstruieren Geraden $g, h$ mit

$$g: P \in g \wedge g \perp a'; \quad h: P \in h \wedge h \subset \varepsilon(b', c) \wedge h \perp g.$$

Damit ergibt sich

$$\sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c = (\sigma_{a'} \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_h) \circ (\sigma_h \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c) = \sigma_k \circ \sigma_l \circ \sigma_m,$$

wobei $k, l \perp g$ sowie $m \subset \varepsilon(b', c)$ und $P \in m$ gilt. Ist $q$ eine Gerade mit $P \in q$ und $q \perp \varepsilon(g, m)$, so erhält man schließlich mit

$$\sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_c = \sigma_k \circ \sigma_l \circ \sigma_m = (\sigma_k \circ \sigma_l \circ \sigma_q) \circ (\sigma_q \circ \sigma_m) = \sigma_{u'} \circ \sigma_{v'}$$

das gewünschte Resultat.

Sind nun $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ beliebige Schraubungen, so existieren nach den Sätzen 5 und 6′ Geraden $a_1, b_1, a_2, b_2$ mit

$$\mathfrak{S}_1 = \sigma_{a_1} \circ \sigma_{b_1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{S}_2 = \sigma_{a_2} \circ \sigma_{b_2},$$

und nach Hilfssatz 3 ist dann $\mathfrak{S}_1 \circ \mathfrak{S}_2$ als Produkt zweier Geradenspiegelungen darstellbar und damit ebenfalls eine Schraubung. Da die zu einer Schraubung inverse Bewegung ebenfalls eine Schraubung ist, ergibt sich der

Satz 7. *Die Menge aller Schraubungen (einschließlich Grenzdrehungen!) bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe* $\mathfrak{B}^+$.

Betrachtet man nur nichtausgeartete Schraubungen, d. h., schließt man Grenzdrehungen aus, so gilt der Satz 7 nicht mehr.

## 5. Gerade und ungerade Bewegungen

Definition 9. Eine Bewegung $\Phi$ heißt *gerade*, wenn sie als Produkt einer geraden, und *ungerade*, wenn sie als Produkt einer ungeraden Anzahl von Ebenenspiegelungen darstellbar ist.

Mit den Definitionen 5, 6 und 7 läßt sich jede gerade Bewegung

$$\Phi = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{2m}}$$

darstellen durch

$$\Phi = \mathfrak{S}_1 \circ \mathfrak{S}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{S}_m,$$

wobei die $\mathfrak{S}_i$ Drehungen, Schiebungen oder Grenzdrehungen sind. Nach dem eben bewiesenen Satz ist deren Produkt stets wieder eine (eventuell ausgeartete) Schraubung, und da umgekehrt jede Schraubung eine gerade Bewegung ist, erhält man aus Satz 7 den

Satz 8. *Die Gruppe der geraden Bewegungen stimmt mit der Gruppe* $\mathfrak{B}^+$ *überein.*

Man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{B}^+$ sogar eine echte Untergruppe der Bewegungsgruppe $\mathfrak{B}$ ist. Aus der Definition 8 folgert man mit Hilfssatz 2 ohne Mühe, daß eine Schraubung, die eine Ebene punktweise festläßt, stets die Identität ist, d. h., eine Schraubung ist stets verschieden von einer Ebenenspiegelung (für ausgeartete Schraubungen folgt das unmittelbar aus Satz 2). Dann kann aber wegen Satz 8 eine gerade Bewegung niemals gleich einer ungeraden sein, also gilt $\mathfrak{B}^+ \subset \mathfrak{B}$.

Wir schließen die Klassifikation der hyperbolischen Bewegungen mit der Untersuchung der ungeraden Bewegungen ab.

Satz 9. *Jede ungerade Bewegung* $\Phi$ *ist als Produkt dreier Ebenenspiegelungen darstellbar.*

**Beweis.** Nach Satz 8 gilt für eine ungerade Bewegung

$$\Phi = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{2m}} \circ \sigma_{\alpha_{2m+1}} = \sigma_{\alpha_1} \circ \mathfrak{S},$$

und da jede Schraubung $\mathfrak{S}$ als Produkt von höchstens vier Ebenenspiegelungen darstellbar ist, läßt sich $\Phi$ folglich als Produkt von höchstens fünf Ebenenspiegelungen darstellen. Wir zeigen, daß sich ein Produkt

$$\Psi = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} \circ \cdots \circ \sigma_{\beta_5}$$

stets auf ein solches von drei Ebenenspiegelungen reduzieren läßt. Dazu wählen wir einen Punkt $P \in \beta_5$ und ersetzen nach Satz 4 $\beta_3$, $\beta_4$ durch $\beta_3'$, $\beta_4'$ mit $P \in \beta_4'$ und

$$\sigma_{\beta_3} \circ \sigma_{\beta_4} = \sigma_{\beta_3'} \circ \sigma_{\beta_4'}.$$

Analog ersetzen wir $\beta_2$, $\beta_3'$ durch $\beta_2'$, $\beta_3''$ mit $P \in \beta_3''$ und

$$\sigma_{\beta_2} \circ \sigma_{\beta_3'} = \sigma_{\beta_2'} \circ \sigma_{\beta_3''}$$

und schließlich $\beta_1$, $\beta_2'$ durch $\beta_1'$, $\beta_2''$ mit $P \in \beta_2''$ und

$$\sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2'} = \sigma_{\beta_1'} \circ \sigma_{\beta_2''}.$$

Dann ergibt sich

$$\Psi = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} \circ \cdots \circ \sigma_{\beta_5} = \sigma_{\beta_1'} \circ \sigma_{\beta_2''} \circ \sigma_{\beta_3''} \circ \sigma_{\beta_4'} \circ \sigma_{\beta_5}.$$

wobei $P \in \beta_2''$, $\beta_3''$, $\beta_4'$, $\beta_5$ gilt. Die Ebenen $\beta_2''$ und $\beta_3''$ bzw. $\beta_4'$ und $\beta_5$ schneiden sich also in Geraden $g$ bzw. $h$. Ist $\alpha := \varepsilon(g, h)$ die durch $g$ und $h$ bestimmte Ebene, so erhält man mit

$$\Psi = \sigma_{\beta_1'} \circ \left(\sigma_{\beta_2''} \circ \sigma_{\beta_3''} \circ \sigma_\alpha\right) \circ \left(\sigma_\alpha \circ \sigma_{\beta_4'} \circ \sigma_{\beta_5}\right) = \sigma_{\beta_1'} \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$$

die im Satz 9 ausgesprochene Behauptung.

Wir untersuchen zum Abschluß noch die verschiedenen Typen von dreispiegeligen Bewegungen.

**Definition 10.** a) Das Produkt einer Schiebung längs einer Geraden $a$ mit einer Spiegelung an einer $a$ enthaltenden Ebene $\alpha$ heißt *Schubspiegelung bezüglich* $a$, $\alpha$.

b) Das Produkt einer Drehung um eine Gerade $g$ mit einer Spiegelung an einer zu $g$ orthogonalen Ebene $\beta$ heißt *Drehspiegelung bezüglich* $g$, $\beta$.

c) Das Produkt einer Grenzdrehung bezüglich $\Pi(E, \varepsilon)$ mit einer Spiegelung an einer zu den Ebenen von $\Pi(E, \varepsilon)$ orthogonalen Ebene $\gamma$ heißt *Grenzdrehspiegelung bezüglich* $\Pi(E, \varepsilon)$, $\gamma$.

**Satz 10.** *Jede ungerade Bewegung $\Phi$ ist eine Schub-, Dreh- oder Grenzdrehspiegelung.*

**Beweis.** Um die Fallunterscheidung übersichtlich zu gestalten, stellen wir $\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ zunächst als Produkt einer Ebenen- und einer Geradenspiegelung dar.

Ist $P \in \gamma$, so existieren nach Satz 4 Ebenen $\alpha'$, $\beta'$ mit $P \in \beta'$ und $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}$. Wegen $P \in \beta', \gamma$ besitzen $\beta'$ und $\gamma$ eine gemeinsame Gerade $a$. Wir betrachten die Ebene $\lambda$ mit $\lambda \supset a \wedge \lambda \perp \alpha$ und erhalten

$$\Phi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'} \circ \sigma_\gamma = (\sigma_\alpha \circ \sigma_\lambda) \circ (\sigma_\lambda \circ \sigma_{\beta'} \circ \sigma_\gamma) = \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon.$$

Es seien nun $\alpha_1$, $\alpha_2$ Ebenen mit

$$\alpha_1 : \alpha_1 \supset g \wedge \alpha_1 \perp \varepsilon; \quad \alpha_2 : \alpha_2 \supset g \wedge \alpha_2 \perp \alpha_1.$$

Fall 1. $g \cap \varepsilon = \emptyset$.

a) $g \parallel \varepsilon$. Die Gerade $g$ und die Ebene $\varepsilon$ haben also ein Ende $E$ gemeinsam, und $\alpha_2$ gehört nach Konstruktion zum Parallelbüschel $\Pi(E, \varepsilon)$. Also ist $\sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon$ eine Grenzdrehung $D_\Pi$, und

$$\Phi = \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ D_\Pi$$

ist wegen $\alpha_1 \perp \alpha_2$, $\varepsilon$ eine Grenzdrehspiegelung bezüglich $\Pi(E, \varepsilon)$, $\alpha_1$.

b) Die Gerade $g$ und die Ebene $\varepsilon$ sind überparallel, d. h., $g$ und $\varepsilon$ besitzen eine gemeinsame Lotgerade $l$.

Dann ist $l$ auch orthogonal zu $\alpha_2$ und $\varepsilon$, d. h., $\alpha_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon$ ist eine Schiebung $S_l$, und

$$\Phi = \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ S_l$$

ist wegen $l \subset \alpha_1$ eine Schubspiegelung bezüglich $l$, $\alpha_1$.

Fall 2. $g \cap \varepsilon \neq \emptyset$.

a) $g \subset \varepsilon$. Dann ist $g$ in den Ebenen $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\varepsilon$ enthalten, und wegen $\alpha_2, \varepsilon \perp \alpha_1$ muß nach Hilfssatz 1 $\alpha_2 = \varepsilon$ gelten, und man erhält

$$\Phi = \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1},$$

d. h., $\Phi$ ist sowohl Schub- als auch Dreh- und Grenzdrehspiegelung.

b) $g \cap \varepsilon = P$. Wegen $g \subset \alpha_2$ schneiden sich die Ebenen $\alpha_2$ und $\varepsilon$ in einer Geraden $a$, d. h., $\sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon$ ist eine Drehung $D_a$, und

$$\Phi = \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_{\alpha_1} \circ D_a$$

ist wegen $a \perp \alpha_1$ eine Drehspiegelung bezüglich $a$, $\alpha_1$.

## LITERATUR


[1] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[2] Ewald, G.: Spiegelungsgeometrische Kennzeichnung euklidischer und nichteuklidischer Räume beliebiger Dimensionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *41* (1974), 224—251.

[3] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 12. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart 1977.

[4] Jeger, M.: Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie. Elem. Math. *19* (1964), 1—8, 29—35; *23* (1968), 1—10, 32—41.

[5] Liebmann, H.: Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl., B. G. Teubner, Berlin—Leipzig 1923.

[6] Norden, A. P.: Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958 (Übersetzung aus dem Russischen).

[7] Scherf, H.: Begründung der hyperbolischen Geometrie des Raumes. Dissertation, Kiel 1961.


**Manuskripteingang: 7. 1. 1978**

**VERFASSER:**

**Lutz Schwedler, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena**