

## Werk

**Titel:** Zur vollständigen Zerlegung der euklidischen und nichteuklidischen Tetraeder in O...

**Autor:** BÖHM, J.

**Jahr:** 1980

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0009|log8](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0009|log8)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Zur vollständigen Zerlegung der euklidischen und nichteuklidischen Tetraeder in Orthogonal-Tetraeder

JOHANNES BÖHM

### 1. Einleitung

In der Polyedergeometrie ist das alte Problem der elementar-geometrischen Zerlegung eines  $r$ -dimensionalen Polyeders in Orthoscheme bis heute noch nicht einmal im euklidischen Sonderfall allgemein gelöst. Da sich ein jedes  $r$ -dimensionale Polyeder in Simplexe derselben Dimension vollständig zerlegen läßt, reduziert sich dieses Zerlegungsproblem auf die Zerlegung  $r$ -dimensionaler Simplexe. Die Zerlegung eines Polyeders oder speziell eines Simplexes in einfachere Bausteine spielt nicht nur bei der Inhaltsmessung von Simplexen oder Polyedern insbesondere in nichteuklidischen Räumen eine Rolle, sondern hat auch bei der Untersuchung von Polyederstrukturen eine Bedeutung. Die Vermutung von H. HADWIGER [4], daß jeweils aus endlich vielen Elementen der Menge der  $r$ -dimensionalen Orthoscheme ein jedes  $r$ -dimensionale Simplex als elementar-geometrische Summe dargestellt werden kann, konnte von H.-CHR. LENHARD [5] für den euklidischen dreidimensionalen Fall bestätigt werden. An diese Ergebnisse wird hier unter anderen angeknüpft. Dabei werden Tetraeder in Räumen konstanter normierter Krümmung  $\kappa = 0, +1$  oder  $-1$  (euklidischer, elliptischer bzw. hyperbolischer Raum) betrachtet. Sie mögen als euklidische, elliptische bzw. hyperbolische Tetraeder bezeichnet werden und zur Tetraedermenge  $\mathfrak{T}^{(3)}$  zusammengefaßt sein. Entsprechend werden Dreiecke in solchen Räumen euklidische, elliptische bzw. hyperbolische Dreiecke genannt. Im elliptischen Fall ist zu beachten, daß alle Tetraeder und in gleicher Weise auch alle Dreiecke zulässige Simplexe sein müssen. Das heißt, es existiert in dem elliptischen Raum jeweils eine Kugel bzw. ein Kreis mit einem Radius kleiner als  $\pi/2$ , so daß das betreffende Tetraeder bzw. Dreieck ganz im Innern dieser Kugel bzw. dieses Kreises liegt.

Für die Zerlegungsuntersuchungen macht es sich erforderlich, die Menge der Tetraeder zu Typen hinsichtlich des Vorkommens und der gegenseitigen Lage von stumpfen Dreiecks- und Keilwinkeln zusammenzufassen. Damit der elliptische Fall gemeinsam mit dem euklidischen und hyperbolischen Fall untersucht werden kann, werden nur solche elliptischen Tetraeder betrachtet, deren Kanten die Länge  $\pi/2$  nicht übersteigen. Eine Kante von einer Länge größer als  $\pi/2$  wird eine stumpfe Kante genannt, sonst heißt sie nichtstumpf. In einem elliptischen Dreieck mit nichtstumpfen Kanten gibt es höchstens einen stumpfen Dreieckswinkel, wie es auch in jedem euklidischen und hyperbolischen Dreieck der Fall ist. Die Beschränkung auf elliptische Tetraeder mit nichtstumpfen Kanten ist jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da jedes elliptische Tetraeder mit stumpfen Kanten in endlich viele elliptische Tetraeder mit nichtstumpfen Kanten zerlegt werden kann. Zu diesen Themenkreisen findet man weitere Ausführungen und Beweise in [2] und [3]. Die

Menge der elliptischen Tetraeder mit nichtstumpfen Kanten zusammen mit der Menge der euklidischen und hyperbolischen Tetraeder wird darum zur Tetraedermenge  $\mathfrak{B}^{(3)} \subset \mathfrak{C}^{(3)}$  zusammengefaßt, die im folgenden untersucht werden soll.

Die Polyedermenge  $\mathfrak{C}$  stellt einen Polyederbaukasten für die Polyedermenge  $\mathfrak{P}$  ( $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}$ ) dar, wenn jedes Element  $P$  von  $\mathfrak{P}$  als endliche elementar-geometrische Summe von Elementen  $E_1^{(P)}, E_2^{(P)}, \dots, E_n^{(P)}$  aus  $\mathfrak{C}$  geschrieben werden kann. Man sagt dann,  $\mathfrak{C}$  ist ein  $\mathfrak{P}$ -Baukasten. Bei einer solchen elementar-geometrischen Summe haben insbesondere die einzelnen Bausteine  $E_i^{(P)}$  paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte. Wenn eine solche Darstellung existiert, sagt man auch,  $P$  ist vollständig in  $E_1^{(P)}, E_2^{(P)}, \dots, E_n^{(P)}$  zerlegt.

Nach einer Strukturierung der Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  in Kapitel 2 durch Äquivalenzrelationen ergeben sich als Äquivalenzklassen Dreieckswinkeltypen bzw. Keilwinkeltypen, die für die weiteren Untersuchungen ein wichtiges Instrument darstellen. In Kapitel 3 wird auf die um eine Dimension niedrigeren Auffangsimplexe eingegangen. Das sind hier Dreiecke, die stets in einem elliptischen Raum liegen. Über diese werden Aussagen hinsichtlich des Auftretens von stumpfen Kanten und stumpfen Dreieckswinkeln aus [2] wiederholt sowie diese Aussagen für rechtwinklige elliptische Dreiecke spezialisiert. Nach der Erklärung von gewissen Loteigenschaften eines Tetraeders im vierten Kapitel können zwei Tetraeder-Baukästen für  $\mathfrak{B}^{(3)}$  angegeben werden. Von diesen Baukästen ist die Menge der Orthogonal-Tetraeder (das sind dreidimensionale Orthoscheme) aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  jeweils eine echte Teilmenge, und jedes Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$ , das nicht zu dem jeweiligen Baukasten gehört, läßt sich aus zwei Elementen des Baukastens elementar-geometrisch zusammensetzen. Auch für weitere Polyederbaukästen ist die kleinste Anzahl der Elemente von Interesse, die jeweils für eine vollständige Zerlegung eines bestimmten Tetraeders benötigt wird, sowie die obere Grenze  $N$  dieser Anzahlen für alle Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$ .

Nach der Erklärung einer besonderen Tetraedermenge in Kapitel 5, deren Elemente Fast-Orthoscheme genannt werden und die als Vorstufe von Orthogonal-Tetraedern aufgefaßt werden können, wird in Kapitel 6 durch eine Reihe von Hilfssätzen das in Satz 4 formulierte Hauptergebnis vorbereitet. Dieses überträgt die Aussage von LENHARD, daß sich jedes euklidische Tetraeder in Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegen läßt, auf den elliptischen und hyperbolischen dreidimensionalen Raum und bestätigt, daß die zugehörige Zerlegungszahl  $N$  für die Tetraedermenge  $\mathfrak{B}^{(3)}$ , für die LENHARD im euklidischen Fall als eine obere Schranke die Zahl 12 erhalten und als obere Grenze vermutet hatte, tatsächlich 12 beträgt.

## 2. Tetraedertypen

Für Zerlegungsuntersuchungen von Tetraedern in einem euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen dreidimensionalen Raum macht es sich erforderlich, eine Typisierung der Tetraeder sowohl nach der Lage ihrer stumpfen Dreieckswinkel als auch nach der Lage ihrer stumpfen Keilwinkel vorzunehmen. Die Tetraeder des elliptischen Falles, die mindestens eine Kante von einer Länge größer als  $\pi/2$  besitzen (stumpfe Kante), werden zu einem Tetraedertyp (0) zusammengefaßt und bei der weiteren Betrachtung ausgeschlossen, da für diese besondere Eigenschaften gelten, die sich den hier dargelegten Untersuchungen nicht immer unterordnen. Das ist aber kein wesentlicher Verlust an Allgemeinheit, da es möglich ist, ein Tetraeder vom Typ (0) stets elementar-geometrisch aus endlich vielen Tetraedern, die nicht vom Typ (0) sind, zusammenzusetzen (vgl. [2]). Die nicht zu (0) gehörenden euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Tetraeder werden zur Tetraedermenge  $\mathfrak{B}^{(3)}$

zusammengefaßt. Eine Typisierung hinsichtlich des Vorkommens und der Lage von stumpfen Dreieckswinkeln ist möglich. Bei verschiedenen Typen ist eine weitere Unterteilung in verschiedene Unterfälle erforderlich, falls man noch zusätzlich das Vorkommen und die Lage von stumpfen Keilwinkeln zwischen den Wänden eines Tetraeders berücksichtigt. Es gibt dann, abgesehen vom Typ (0), genau 14 Typen, die teilweise noch in weitere Fälle unterteilt werden können. Damit sind alle Typen mit ihren Unterfällen aufgezählt. Der Typ (14) (so wie der Typ (0)) läßt sich nur im elliptischen Raum realisieren, alle übrigen Typen kommen im euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Raum jeweils tatsächlich vor. Nähere Ausführungen und Beweise finden sich in [3]. Diese eben erwähnten Typen sollen *Dreieckswinkeltypen* genannt werden.

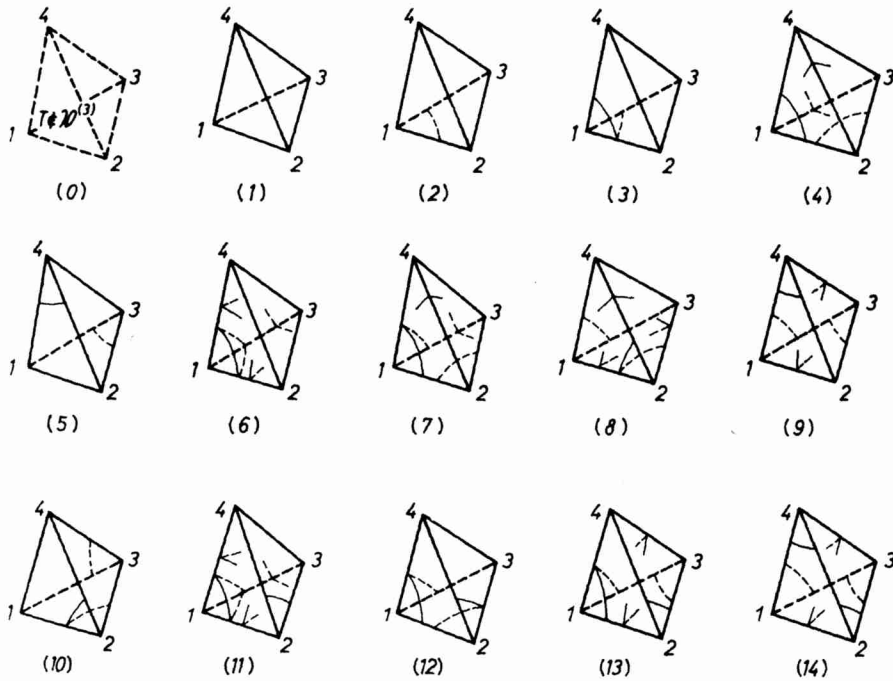


Abb. 1. Dreieckswinkeltypen

In Abb. 1 ist jeweils ein Repräsentant für alle Dreieckswinkeltypen (1) bis (14) und in Abb. 2 ein solcher für alle sich ergebenden verschiedenen Unterfälle dargestellt. In diesen wie in den folgenden Abbildungen sind die betreffenden Tetraeder und Dreiecke lediglich symbolisch skizziert. Dabei ist ein stumpfer Dreieckswinkel durch einen Winkelbogen markiert, ein Winkelbogen mit einem Punkt bezeichnet einen rechten Dreieckswinkel. Ein stumpfer Keilwinkel ist durch eine Winkelecke an seiner Scheitelkante gekennzeichnet. Trägt diese Ecke einen Punkt, dann ist dieser Keilwinkel ein rechter. Im elliptischen Falle sind Kanten, deren Länge größer als  $\pi/2$  ist, fett gezeichnet.

Es ist ferner auch möglich, eine Typisierung der Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  lediglich hinsichtlich des Vorkommens und der gegenseitigen Lage von stumpfen Keilwinkeln vorzunehmen. Da bereits bei der Typisierung hinsichtlich der stumpfen Dreieckswinkel

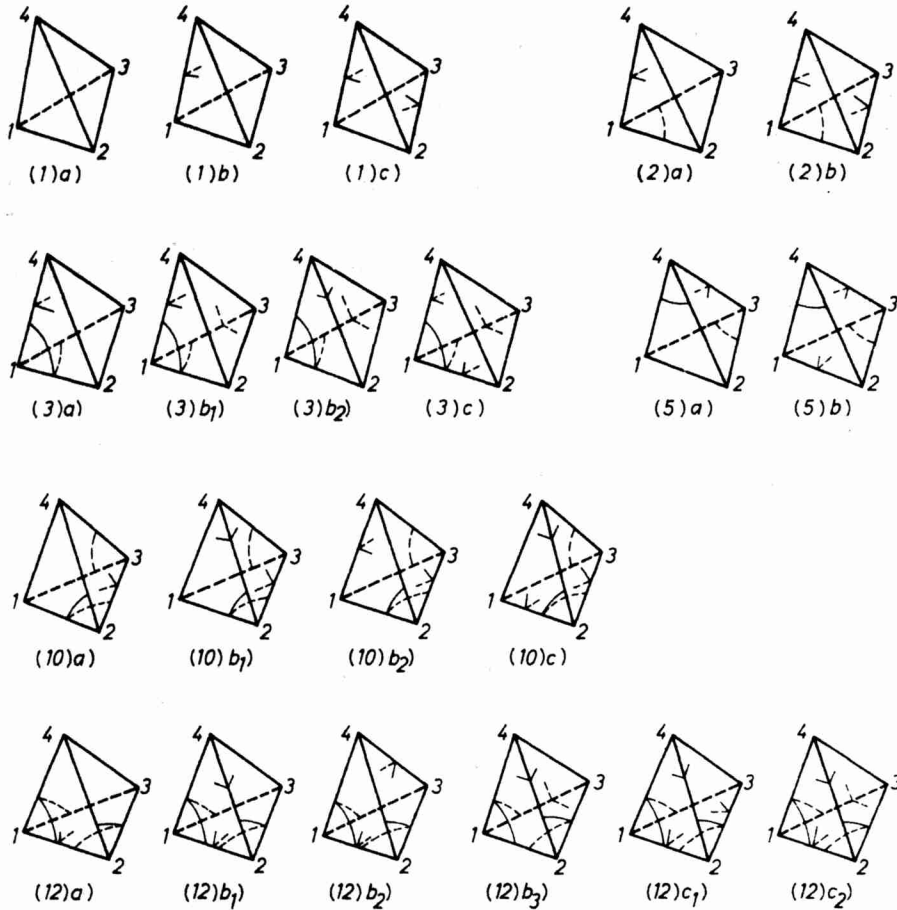


Abb. 2. Unterfälle von Dreieckswinkeltypen

Vorbereitungen dazu geleistet wurden, läßt sich ohne Mühe eine Typisierung hinsichtlich der stumpfen Keilwinkel in folgender Weise angeben:

**Satz 1.** Die Menge  $\mathfrak{B}^{(3)}$  läßt sich hinsichtlich Vorkommens und Lage von stumpfen Keilwinkeln in genau sechs Keilwinkeltypen einteilen.

Bevor zum Beweis dieses Satzes einige Bemerkungen gemacht werden, soll zunächst die „Keilwinkelstruktur“ eines Tetraeders erklärt werden.

**Definition 1.** Das Tetraeder  $T = 1,2,3,4 \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Keilwinkelstruktur  $\langle\langle k_1 k_2 k_3 k_4 \rangle\rangle$  ( $0 \leq k_i \leq 2$ ;  $i = 1,2,3,4$ ) genau dann, wenn die dreieckige Wand  $i'$  von  $T$ , die gegenüber der Ecke  $i$  liegt, mit genau  $k_i$  weiteren Wänden je einen stumpfen Keilwinkel einschließt.

Es sei angemerkt, daß auf Grund der Ergebnisse in [3] stets  $k_i < 3$  sein muß. Ferner wird eine Relation erklärt durch

**Definition 2.** Die zwei Tetraeder  $T_1 = 1,2,3,4$  und  $T_2 = 1,2,3,4$  aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Keilwinkelstruktur  $\langle\langle k_1^{(1)} k_2^{(1)} k_3^{(1)} k_4^{(1)} \rangle\rangle$  bzw.  $\langle\langle k_1^{(2)} k_2^{(2)} k_3^{(2)} k_4^{(2)} \rangle\rangle$  stehen in der Relation  $\varrho$

genau dann, wenn es eine Permutation  $\Pi$  der Bezeichnung der Eckpunkte von  $T_2$  gibt, so daß  $k_{\Pi i}^{(2)} = k_i^{(1)}$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  gilt.

Diese Relation  $\rho$  ist eine Äquivalenzrelation, wie sich sofort aus der Gruppeneigenschaft der Permutationen ergibt, und induziert demzufolge eine Klassenbildung in der Menge  $\mathfrak{B}^{(3)}$ . Die einzelnen Klassen werden *Keilwinkeltypen* genannt.

Jetzt kann Satz 1 bewiesen werden: Als Repräsentanten der einzelnen Keilwinkeltypen sollen diejenigen Keilwinkelstrukturen ausgewählt werden, für die  $2 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq 0$  gilt und wo die  $k_1$  stumpfen Keilwinkel von der Wand 1' im Fall  $k_1 = 1$  mit der Wand 2' und im Fall  $k_1 = 2$  mit den Wänden 2' und 3' gebildet werden. Aus kombinatorischen Gründen ist damit die betreffende Keilwinkelstruktur als Repräsentant eindeutig festgelegt. Gleichzeitig ergibt sich dadurch auch eine Typisierung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der stumpfen Keilwinkel. In Abb. 3 sind die Repräsentanten der sechs Keilwinkeltypen dargestellt. Es sei erwähnt, daß sich  $\langle\langle 2200 \rangle\rangle$  und  $\langle\langle 2222 \rangle\rangle$  nicht als Keilwinkeltypen in  $\mathfrak{B}^{(3)}$  realisieren lassen.

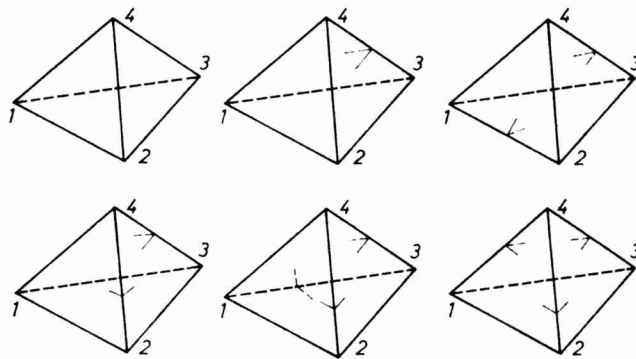


Abb. 3. Keilwinkeltypen

### 3. Auffangdreiecke

Die weiteren Untersuchungen machen häufig von Auffangdreiecken Gebrauch. Das sind Dreiecke, stets im elliptischen Raum, die als Durchschnitt zwischen einer Kugel von geeignetem Radius um eine Tetraederecke  $P$  einerseits und den Tetraederwänden oder deren Verlängerung, die  $P$  als eine Ecke besitzen, andererseits entstehen. Diese Auffangdreiecke können auch stumpfe Kanten besitzen. Sie treten genau dann auf, wenn in dem Tetraeder an der betreffenden Ecke in der entsprechenden Wand ein stumpfer Dreieckswinkel liegt.

Für elliptische Dreiecke gilt in bezug auf die Lage von stumpfen Dreieckswinkeln und Dreiecksseiten

*Hilfssatz 1. Für ein elliptisches Dreieck gibt es genau sieben verschiedene Möglichkeiten hinsichtlich der gegenseitigen Lage von stumpfen Dreieckswinkeln und stumpfen Seiten (vgl. Abb. 4).*

Der Beweis ist in [2] ausgeführt.

Als Spezialfall von Hilfssatz 1 ergibt sich im Fall eines rechtwinkligen elliptischen Dreiecks

**Hilfssatz 2.** *Ist ein elliptisches Dreieck rechtwinklig, dann gibt es genau vier verschiedene Möglichkeiten für die gegenseitige Lage von stumpfen Dreieckswinkeln und stumpfen Seiten, nämlich:*

- (1) keine stumpfen Dreieckswinkel, keine stumpfen Seiten,
  - (2) ein stumpfer Dreieckswinkel, eine stumpfe Seite (diese stumpfe Seite liegt dem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber, und die beiden nichtstumpfen Dreieckswinkel sind rechte),
  - (3) ein stumpfer Dreieckswinkel und zwei stumpfe Seiten (die stumpfen Seiten liegen jeweils dem rechten und dem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber),
  - (4) zwei stumpfe Dreieckswinkel und zwei stumpfe Seiten (die stumpfen Seiten liegen jeweils einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber)
- (vgl. Abb. 5).

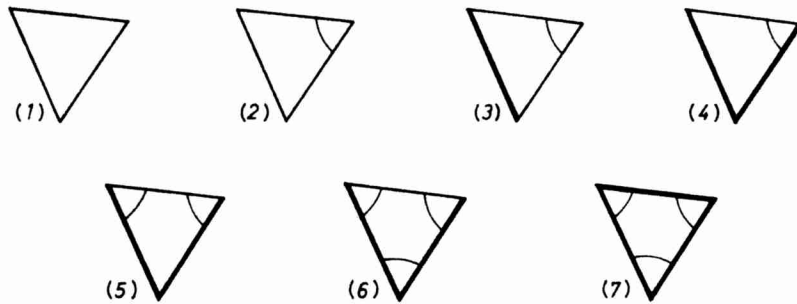


Abb. 4. Verteilung der stumpfen Winkel und Seiten in einem elliptischen Dreieck



Abb. 5. Verteilung der stumpfen Winkel und Seiten in einem rechtwinkligen elliptischen Dreieck

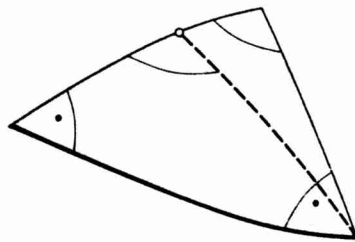


Abb. 6

**Beweis.** Die Existenz von (1) ist klar. (2) gilt auf Grund der Pol-Polare-Beziehung. (3) läßt sich aus (2) herleiten, indem eine nichtstumpfe Seite — die in (2) die Länge  $\pi/2$  hat — um den Scheitel des betreffenden rechten Winkels derart gedreht wird, so daß dieser rechte Winkel verkleinert wird und (3) entsteht (vgl. Abb. 6). Schließlich ist (4) ein Spezialfall von Hilfssatz 1, aus dem auch abgeleitet werden kann, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Im folgenden wird noch eine Winkelzerlegungseigenschaft eines Tetraeders eine Rolle spielen, die mit Hilfe von stumpfen Seiten in Aufganddreiecken formuliert werden kann. Zur Erklärung dieser Eigenschaft werden Tetraeder  $T$  betrachtet, die

einen Eckpunkt  $P$  besitzen, der Scheitel von genau zwei stumpfen Dreieckswinkeln ist und von dem genau eine Kante ausgeht, die Scheiteltkante eines stumpfen Keilwinkels ist. Ein solcher Eckpunkt  $P$  wird „doppelstumpf“ genannt. Die Menge der Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  mit mindestens einem doppelstumpfen Eckpunkt wird mit  $\mathfrak{T}_d$  bezeichnet. Aus Abb. 1 bzw. 2 läßt sich ablesen, daß zu dieser Menge genau die Tetraeder der folgenden Dreieckswinkeltypen gehören: (I) Tetraeder mit genau einem doppelstumpfen Eckpunkt:  $(3)a)$ ,  $(3)b_2)$ ,  $(7)$ ,  $(10)a)$ ,  $(10)b_2)$ ,  $(12)b_1)$ ,  $(12)c_1)$  und  $(13)$ ; (II) Tetraeder mit genau zwei doppelstumpfen Eckpunkten:  $(12)a)$ ,  $(12)b_2)$  und  $(12)b_3)$ .

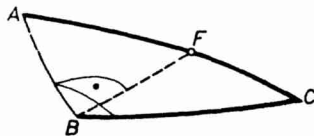


Abb. 7. Auffangdreieck bezüglich eines doppelstumpfen Eckpunktes

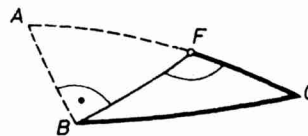


Abb. 8. Auffangdreieck bezüglich eines doppelstumpfen Eckpunktes bei Eigenschaft (Z)

Das Auffangdreieck  $A,B,C$  bezüglich eines doppelstumpfen Eckpunktes  $P$  enthält darum genau zwei stumpfe Seiten (z. B.  $A,C$  und  $B,C$ ) und genau einen stumpfen Dreieckswinkel. Dieser liegt einer stumpfen Seite gegenüber (z. B.  $\sphericalangle ABC$ ) (vgl. Abb. 7). Das Dreieck  $A,B,C$  wird von der Senkrechten zur nichtstumpfen Seite  $A,B$  durch den Scheitel des stumpfen Dreieckswinkels  $B$  in zwei Dreiecke zerlegt. Diese Senkrechte schneidet die dem stumpfen Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite  $A,C$  in  $F$ . Es entstehen das rechtwinklige Dreieck  $A,B,F$  und das nichtrechtwinklige Dreieck  $B,C,F$  (vgl. Abb. 7). Diese Zerlegung des Dreiecks  $A,B,C$  wird mit  $\mathfrak{Z}_d$  bezeichnet.

Definition 3. Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{T}_d$  hat genau dann die Eigenschaft (Z), wenn für das Auffangdreieck bezüglich eines jeden doppelstumpfen Eckpunktes von  $T$  bei seiner Zerlegung  $\mathfrak{Z}_d$  das entstehende rechtwinklige Dreieck keine stumpfen Seiten und das andere nichtrechtwinklige Dreieck zwei stumpfe Seiten besitzt (vgl. Abb. 8).

Als ein Beispiel eines solchen elliptischen Auffangdreiecks mit der Eigenschaft (Z) kann das Dreieck  $A,B,C$  angegeben werden mit  $|B,C| = |\sphericalangle ABC| = \frac{3}{4}\pi$  und  $|\sphericalangle ACB| = \frac{\pi}{6}$ .

#### 4. Loteigenschaften

Es sollen jetzt zwei Loteigenschaften von Tetraedern erklärt werden.

Definition 4. Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_1)_P$  genau dann, wenn die Lotfußpunkte aller Lote vom Eckpunkt  $P$  des Tetraeders  $T$  auf die drei Kanten der  $P$  gegenüberliegenden Wand  $P'$  nicht außerhalb von  $T$  liegen.  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_1)$ , wenn es einen Eckpunkt  $P$  von  $T$  gibt, so daß  $T$  die Eigenschaft  $(L_1)_P$  besitzt.

Die Menge der Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(L_1)$  werde mit  $\mathfrak{L}_1$  bezeichnet.



**Definition 5.** Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_2)_P$  genau dann, wenn der Lotfußpunkt des Lotes vom Eckpunkt  $P$  des Tetraeders  $T$  auf die  $P$  gegenüberliegende Wand  $P'$  nicht außerhalb von  $T$  liegt.  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_2)$ , wenn es einen Eckpunkt  $P$  von  $T$  gibt, so daß  $T$  die Eigenschaft  $(L_2)_P$  besitzt. Die Menge der Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(L_2)$  werde mit  $\mathfrak{L}_2$  bezeichnet.

**Definition 6.** Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_{1/2})_P$  genau dann, wenn es die Eigenschaft  $(L_1)_P$  und  $(L_2)_P$  besitzt.  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_{1/2})$ , wenn es einen Eckpunkt  $P$  von  $T$  gibt, so daß  $T$  die Eigenschaft  $(L_{1/2})_P$  besitzt. Die Menge der Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(L_{1/2})$  werde mit  $\mathfrak{L}_{1/2}$  bezeichnet.

Bei der vollständigen Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  eines Tetraeders  $T$  in Teiltetraeder aus einer gewissen Tetraedermenge  $\mathfrak{B}$  (Tetraederbaukasten), so daß  $T$  die elementar-geometrische Summe dieser Teiltetraeder darstellt, sind die folgenden Anzahlen von Teiltetraedern von Interesse:

1. Anzahl der Teiltetraeder bei der Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  des Tetraeders  $T$ :

$$a_T^{(\mathfrak{B})},$$

2. kleinste Anzahl von Teiltetraedern, in die das Tetraeder  $T$  vollständig zerlegt werden kann:

$$a_T := \min_{\mathfrak{B}} a_T^{(\mathfrak{B})},$$

3. größter Wert der minimalen Teiltetraederanzahl  $a_T$  bezüglich aller Tetraeder  $T$  einer gewissen Tetraedermenge  $\mathfrak{I} \in \mathfrak{B}^{(3)}$ :

$$N_{\mathfrak{I}} := \max_{T \in \mathfrak{I}} a_T.$$

Es wird  $N := N_{\mathfrak{B}^{(3)}}$  gesetzt.

Dann gelten die Sätze

**Satz 2.**  $\mathfrak{L}_1$  ist ein Tetraederbaukasten für alle  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$ , und es gilt  $N = 2$ .

**Satz 3.**  $\mathfrak{L}_2$  ist ein Tetraederbaukasten für alle  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$ , und es gilt  $N = 2$ .

**Beweis.** Satz 2 ist in [3] bewiesen, indem es stets gelingt, in einem Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$ , das nicht die Eigenschaft  $(L_1)$  besitzt, geeignet eine Wand einzuziehen und so das Tetraeder in zwei Teiltetraeder jeweils mit der Eigenschaft  $(L_1)$  zu zerlegen. Zum Beweis von Satz 3 überlegt man sich, daß genau die Keilwinkeltypen  $\langle\langle 1111 \rangle\rangle$  und  $\langle\langle 2211 \rangle\rangle$  nicht die Eigenschaft  $(L_2)$  haben, da die dazugehörigen Tetraeder zwei Keilwinkel besitzen, deren Scheitelkanten im Tetraeder sich gegenüberliegen. Durch Einziehen einer Wand, die einen dieser beiden stumpfen Keilwinkel in zwei nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt, entstehen beim Keilwinkeltyp  $\langle\langle 1111 \rangle\rangle$  stets zwei Teiltetraeder mit der Eigenschaft  $(L_2)$ . Beim Keilwinkeltyp  $\langle\langle 2211 \rangle\rangle$  gibt es stets eine solche Wand, die diese Zerlegung in zwei Teiltetraeder mit der Eigenschaft  $(L_2)$  bewirkt, aber nicht jede derartige Wand leistet dieses. Speziell kann diese Wand bei beiden Typen so gewählt werden, daß der betreffende stumpfe Keilwinkel in einen rechten und einen spitzen Keilwinkel zerlegt wird, wobei beim Keilwinkeltyp  $\langle\langle 2211 \rangle\rangle$  der rechte Keilwinkel mit dem dritten ihm nicht gegenüberliegenden stumpfen Keilwinkel des Tetraeders eine Tetraederwand als Schenkel gemeinsam haben muß. Das entspricht dem Vorgehen von LENHARD bei der Zerlegung eines Tetraeders in Orthogonal-Tetraeder (vgl. [5]). Im einzelnen gilt: In einem Tetraeder vom Keilwinkeltyp  $\langle\langle 1111 \rangle\rangle$  wird z. B. in dem angegebenen Repräsentanten die Wand  $1,2,F$

mit  $F \in 3,4$  und  $1,2,F \perp 1,2,4$  eingezeichnet, so daß der stumpfe Keilwinkel mit der Scheiteltkante 1,2 in nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt wird (vgl. Abb. 9). Es entstehen die beiden Teiltetraeder  $T_1 = 1,2,4,F$  und  $T_2 = 1,2,3,F$ , die beide die Eigenschaft  $(L_2)_F$  haben, da in ihnen keine stumpfen Keilwinkel vorkommen, die jeweils die Wand gegenüber  $F$  als einen Schenkel besitzen. — In einem Tetraeder vom Keilwinkeltyp  $\langle\langle 2211 \rangle\rangle$  wird in dem angegebenen Repräsentanten z. B. die Wand  $1,3,F$  mit  $F \in 2,4$  und  $1,3,F \perp 1,3,4$  eingezeichnet (vgl. Abb. 10). Es entstehen die beiden Teiltetraeder  $T_1 = 1,3,4,F$  und  $T_2 = 1,2,3,F$ .  $T_1$  besitzt die Eigenschaft  $(L_2)_4$  und

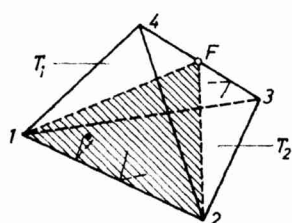


Abb. 9

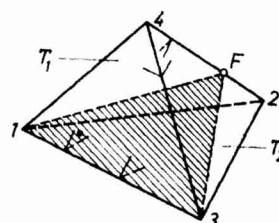


Abb. 10

$T_2$  die Eigenschaft  $(L_2)_F$  auf Grund der Lage der stumpfen Keilwinkel mit den Scheiteltkanten 1,3, 2,4 und 3,4. Denn da der Keilwinkeltyp  $\langle\langle 2211 \rangle\rangle$  mit dem Fall  $(12)c_2$  des Dreieckswinkeltyps (12) zusammenfällt, lassen sich Aussagen über die Lage der stumpfen Dreieckswinkel machen. Auf Grund der Hilfssätze 1 und 2 erhält man, daß in  $T_1$  die Kanten gegenüber der Ecke 4 Scheiteltkanten von nichtstumpfen Keilwinkeln sind. Das ergibt sich durch Betrachtung der Auffangdreiecke bezüglich der Ecken 1 und 3.

### 5. Fast-Orthoscheme

Von Interesse ist weiterhin die vollständige Zerlegung eines Tetraeders  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  in Orthogonal-Tetraeder. Ein Orthogonal-Tetraeder  $R = 1,2,3,4$  ist ein Tetraeder mit einem total-orthogonalen Kantenzug, etwa  $1,2 \perp 2,3 \wedge 1,2,3 \perp 3,4$  (vgl. Abb. 11).

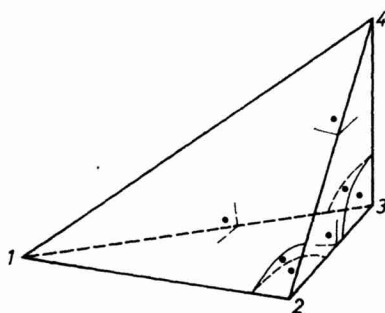


Abb. 11. Orthogonal-Tetraeder

In einem Orthogonal-Tetraeder sind alle vier Wände sowie alle vier Auffangdreiecke bezüglich der Eckpunkte immer rechtwinklige Dreiecke. Es läßt sich zeigen, daß für ein Orthogonal-Tetraeder die Rechtwinkligkeit aller Dreieckswände im euklidischen und hyperbolischen Fall dafür notwendig und hinreichend ist, daß ein total-orthogonaler Kantenzug existiert. Im elliptischen Fall ist diese Forderung lediglich dafür

notwendig (vgl. [1]). Ein  $r$ -dimensionales Simplex  $S^{(r+1)}$  mit einem total-orthogonalen Kantenzug bezeichnet L. SCHLÄFLI [6] als ein Orthoschem. Im allgemeinen werden die Orthoscheme für  $r = 2$  bzw.  $r = 3$  *rechtwinklige Dreiecke* bzw. *Orthogonal-Tetraeder* genannt. Ein  $r$ -dimensionales Orthoschem in einem  $r$ -dimensionalen elliptischen Raum besitzt genau dann nichtstumpfe Kanten, wenn seine Keilwinkel nichtstumpf sind. In einem  $r$ -dimensionalen euklidischen oder hyperbolischen Raum besitzen alle Orthoscheme stets nur nichtstumpfe Keilwinkel. Demzufolge gehört ein Orthogonal-Tetraeder genau dann zu  $\mathfrak{B}^{(3)}$ , wenn alle seine Keilwinkel nichtstumpf sind. Die Menge aller Orthogonal-Tetraeder, die zu  $\mathfrak{B}^{(3)}$  gehören, wird mit  $\mathfrak{R}^{(3)}$  bezeichnet.

Wie bereits bemerkt, hatte LENHARD für den dreidimensionalen euklidischen Raum bewiesen, daß jedes beliebige euklidische Tetraeder in Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt werden kann. Dabei ergibt sich  $N \leq 12$ . Dieser Satz soll auf den elliptischen und den hyperbolischen dreidimensionalen Raum ausgedehnt sowie hinsichtlich der Zahl  $N$  verschärft werden.

Dafür sind zunächst einige Hilfssätze zu beweisen.

Als Vorstufe eines  $r$ -dimensionalen Simplexes  $S^{(r+1)}$  zu einem Orthoschem wird erklärt

**Definition 7.** Ein Simplex  $S^{(n)}$  ( $n \geq 3$ ) wird genau dann ein *Fast-Orthoschem* (1. Ordnung) genannt, wenn  $S^{(n)}$  eine Kante  $i, k$  enthält mit  $i, k \perp S_i^{(n-1)}$ , wobei  $S_i^{(n-1)}$  diejenige Wand von  $S^{(n)}$  bezeichnet, die der Simplexecke  $i$  gegenüberliegt.

Man erkennt sofort, daß ein Orthoschem gleichzeitig auch ein Fast-Orthoschem ist. Nur für  $n = 3$  ist ein Fast-Orthoschem stets ein Orthoschem.

**Hilfssatz 3.** Ist das Tetraeder  $T = 1,2,3,4 \in \mathfrak{B}^{(3)}$  ein Fast-Orthoschem mit  $1,2,3 \perp 3,4$ , aber kein Orthogonal-Tetraeder, und ist keiner der beiden Dreieckswinkel  $\sphericalangle 123$  und  $\sphericalangle 213$  stumpf, dann läßt sich  $T$  vollständig in Orthogonal-Tetraeder zerlegen, und es gilt  $a_T = 2$ .

**Beweis.** Das Vorgehen LENHARDS läßt sich hier ohne weiteres auch auf den elliptischen und den hyperbolischen Raum übertragen. Auf Grund der Voraussetzungen besitzt  $T$  die Eigenschaft  $(L_{1,2})_4$ . Es läßt sich vom Eckpunkt 3 auf die Kante 1,2 das Lot fallen, so daß der Lotfußpunkt  $F$  im Innern der Kante 1,2 liegt. Durch Einziehen der Wand  $F,3,4$  wird  $T$  in die beiden Teiltetraeder  $T_1 = 1,F,3,4$  und  $T_2 = 2,F,3,4$  zerlegt. Diese sind Orthogonal-Tetraeder, und es gilt  $a_T \leq 2$ . Da  $T$  selbst aber kein Orthogonal-Tetraeder ist, muß  $a_T > 1$  sein, und der Hilfssatz ist damit bewiesen (vgl. Abb. 12).

**Hilfssatz 4.** Ist das Tetraeder  $T = 1,2,3,4 \in \mathfrak{B}^{(3)}$  ein Fast-Orthoschem mit  $1,2,3 \perp 3,4$  und ist einer der beiden Dreieckswinkel  $\sphericalangle 123$  oder  $\sphericalangle 213$  stumpf, dann läßt sich  $T$  vollständig in Orthogonal-Tetraeder zerlegen, und es gilt  $a_T = 3$ .

**Beweis.** Auch hier kann man den Lenhardschen Gedanken übertragen, um zu zeigen, daß es eine Zerlegung in drei Orthogonal-Tetraeder gibt. Ist o.B.d.A. der Dreieckswinkel  $\sphericalangle 123$  der stumpfe, dann wird durch Einziehen der Wand  $2,4,F_1$ , wobei  $F_1$  der Lotfußpunkt des Lotes vom Eckpunkt 2 auf die Kante 1,3 und darum  $2,4,F_1 \perp 1,3,4$  ist, das Fast-Orthoschem  $T$  in das Orthogonal-Tetraeder  $T_1 = 2,F_1,3,4$  und in das Fast-Orthoschem  $T_0 = 1,4,F_1,2$  mit  $2,F_1 \perp 1,F_1,4$  zerlegt.  $T_0$  ist kein Orthogonal-Tetraeder, kann aber nach Hilfssatz 3 durch Einziehen einer weiteren Wand  $2,F_1,F_2$  mit  $F_2 \in 1,4$  und  $F_1,F_2 \perp 1,4$ , die senkrecht auf  $1,F_1,4$  steht, in zwei Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden (vgl. Abb. 13), und es gilt  $a_T \leq 3$ . Ist andererseits in  $T$  o.B.d.A. der Dreieckswinkel  $\sphericalangle 123$  stumpf, dann ist auch der Dreiecks-

winkel  $\sphericalangle 124$  und der Keilwinkel mit der Scheiteltkante 2,4 stumpf, wie sich aus der Betrachtung des Auffangdreiecks bezüglich der Ecke 2 auf Grund des Hilfssatzes 2 ergibt.  $T$  besitzt die Eigenschaft  $(L_2)_4$ , es besitzt aber nicht die Eigenschaft  $(L_1)_4$ . Die beiden Wände 1,2,3 und 1,2,4 müssen bei einer Zerlegung in Orthogonal-Tetraeder von  $T$  in mindestens zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Der stumpfe Keilwinkel mit der Scheiteltkante 2,4 muß ebenfalls in mindestens zwei nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt werden. Für die Zerlegung dieses Keilwinkels ist mindestens eine Wand durch die Kante 2,4 einzuziehen, die aber auf eine Zerlegung des stumpfen Dreieckswinkels  $\sphericalangle 124$  keinen Einfluß hat, so daß dieser Dreieckswinkel noch einmal durch Einziehen einer Wand zerlegt werden muß. Es ergibt sich somit  $a_T \geq 3$  und damit schließlich  $a_T = 3$ .

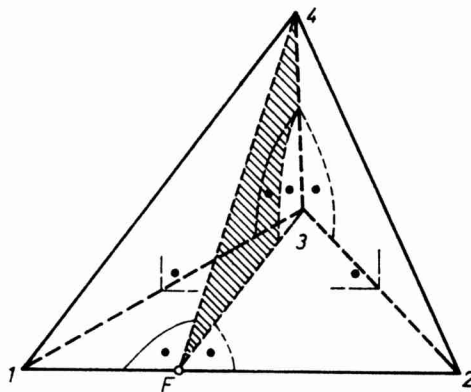


Abb. 12

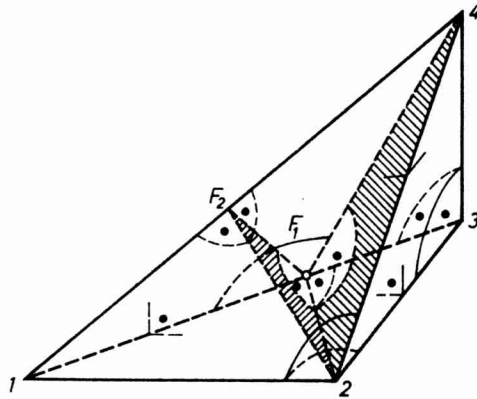


Abb. 13

## 6. Zerlegung in Orthogonal-Tetraeder

Für verschiedene Tetraedermengen  $\mathfrak{T}$  werden jetzt vollständige Zerlegungen in Orthogonal-Tetraeder mit minimaler Orthogonal-Tetraeder-Anzahl beschrieben. Zunächst muß aber erst eine Tetraedereigenschaft erklärt werden, die sich auf orthogonale Zwischenwände bezieht.

**Definition 8.** Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(W_1)$  genau dann, wenn es eine Kante  $i,k$  von  $T$  gibt, so daß die Lote' von  $i$  und  $k$  auf die Kante  $k_0$  von  $T$ , die der Kante  $i,k$  gegenüberliegt, einen gemeinsamen Lotfußpunkt  $F$  auf  $k_0$  haben

und wo darüber hinaus  $F$  nicht außerhalb von  $k_0$  liegt (Eigenschaft  $(W_1)$  bezüglich der Kante  $i, k$ ).

Hat das Tetraeder  $T$  die Eigenschaft  $(W_1)$  bezüglich der Kante  $i, k$ , dann steht die Wand  $i, k, F$  auf der Kante  $k_0$  senkrecht und zerlegt das Tetraeder  $T$  in zwei Fast-Orthoscheme mit senkrechten Kanten, die in  $k_0$  liegen.

**Definition 9.** Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(W_2)$  genau dann, wenn in  $T$  ein Paar sich gegenüberliegender Kanten  $k_1$  und  $k_2$  existieren, so daß  $T$  die Eigenschaft  $(W_1)$  bezüglich der Kanten  $k_1$  und  $k_2$  besitzt.

Durch Betrachtung der einzelnen Fälle der Dreieckswinkeltypen läßt sich zeigen, daß ein Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  nur dann die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzen kann, wenn es zu den folgenden Fällen von Dreieckswinkeltypen gehört: (1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (4), (5a), (5b), (9) und (14).

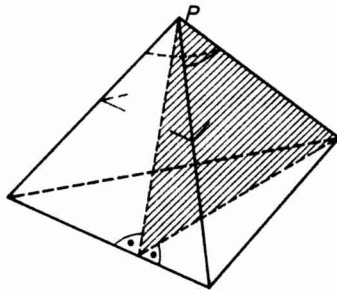


Abb. 14

$$(W_1) \wedge \neg (W_2)$$

Ein Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  kann nur dann die Eigenschaft  $(W_1) \wedge \neg (W_2)$  besitzen, wenn es zu den folgenden Fällen von Dreieckswinkeltypen gehört: (3b<sub>1</sub>), (3c), (6), (8) und (11). Ein solches Tetraeder besitzt immer die Eigenschaft  $(L_{1/2})$ . Wesentlich ist bei Tetraedern mit dieser Eigenschaft u. a., daß sie an einem Eckpunkt  $P$  (mindestens) zwei stumpfe Dreieckswinkel besitzen und (mindestens) zwei stumpfe Keilwinkel mit Scheitelkanten, die von diesem Eckpunkt  $P$  ausgehen. Falls  $P$  der Scheitel von genau zwei stumpfen Dreieckswinkeln ist, dann sind die Scheitelkanten der beiden stumpfen Keilwinkel gleichzeitig die Schenkel des nichtstumpfen Dreieckswinkels (vgl. Abb. 14).

Ist ein Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)}$  vollständig in Orthogonal-Tetraeder zerlegt, dann sind seine dreieckigen Wände in rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Ist eine nichtrechtwinklige Wand in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann ist dieses durch ein Lot in dieser Wand erfolgt. Eine Zerlegung einer nichtrechtwinkligen Wand in genau drei rechtwinklige Dreiecke kann nur durch ein Lot in der Wand und eine weitere Zerlegung des einen auf diese Weise entstandenen rechtwinkligen Dreiecks durch ein Lot, und zwar vom Scheitel des rechten Winkels aus, erfolgen. Für eine Zerlegung einer nichtrechtwinkligen Wand in genau vier rechtwinklige Dreiecke gibt es genau sieben wesentlich verschiedene Möglichkeiten. Entweder zerlegt eine Transversale das Dreieck in zwei Teildreiecke, die jeweils durch Lote nochmals zerlegt werden (drei verschiedene Fälle) oder es wird die Wand durch ein Lot in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt, und entweder werden dann beide Teildreiecke durch Lote nochmals zerlegt oder es wird das eine Teildreieck durch eine Transversale vom Scheitel des noch nicht zerlegten Dreieckswinkels aus oder durch ein Lot vom Scheitel des rechten Winkels aus in weitere zwei Teildreiecke und von diesen Teildreiecken noch einmal eins vom Scheitel seines stumpfen oder rechten Winkels aus in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt (vgl. Abb. 15).

Hat  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(W_2)$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel, dann muß bei einer vollständigen Zerlegung in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder jede Wand in mindestens zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt sein. Ein solches Orthogonal-Tetraeder kann niemals drei Wände haben, die jeweils auf dem Rand von  $T$  liegen, da die Auffangdreiecke für jeden Eckpunkt von  $T$  nach Voraussetzung keine rechtwinkligen Dreiecke sind und folglich mindestens noch einmal zerlegt werden müssen. Die kleinste Anzahl von rechtwinkligen Dreiecken, in die die vier Wände von  $T$  insgesamt zerlegt sein können, beträgt 8. Von diesen können wegen der eben gemachten Bemerkung höchstens jeweils zwei ein Orthogonal-Tetraeder ergeben. Das bedeutet, daß  $T$  in wenigstens vier Orthogonal-Tetraeder zerlegt ist. Es gibt aber eine Zerlegung von  $T$  bei der Eigenschaft  $(W_2)$  in genau vier Orthogonal-Tetraeder, indem  $T$  durch die beiden Wände, die auf gegenüberliegenden Kanten senkrecht stehen, zerlegt wird. Somit gilt hierbei  $a_T = 4$ .

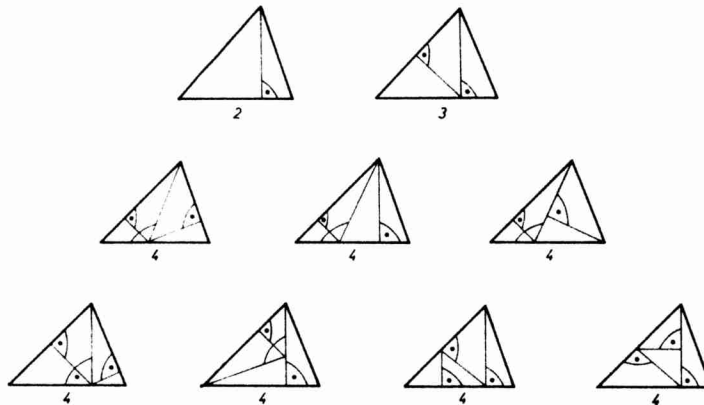


Abb. 15. Zerlegung eines Dreiecks in höchstens vier rechtwinklige Dreiecke

Hat  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(L_2)$  nicht die Eigenschaft  $(W_2)$ , dann gelten folgende Aussagen, wenn  $T$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel besitzt und in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt ist:

- (a) Kein Eckpunkt der Orthogonal-Tetraeder ist ein innerer Punkt von  $T$ .
- (b) Ein jedes Orthogonal-Tetraeder hat keine drei Wände, die auf dem Rand von  $T$  liegen.
- (c) Sind in einem Tetraeder  $T \in \mathfrak{Q}_2$  zwei Wände mit der gemeinsamen Kante  $k$  in genau je zwei rechtwinklige Teildreiecke durch ein Lot in den jeweiligen Wänden derart zerlegt, daß die Kante  $k$  gemeinsame Seite von zwei solchen rechtwinkligen Teildreiecken  $D_1$  und  $D_2$  ist, dann gilt, wenn man von der Voraussetzung der Eigenschaft  $(W_2)$  absieht:  $D_1$  und  $D_2$  sind die Wände ein und desselben Orthogonal-Tetraeders genau dann, wenn  $T$  die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzt.
- (d) Es gibt mindestens eine Wand von  $T$ , in der Wände von mehr als drei Orthogonal-Tetraedern liegen.
- (e) Es gibt mindestens eine Wand von  $T$ , die durch ein Lot in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist und wo ein jedes dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke eine Wand eines Orthogonal-Tetraeders ist.

Die Richtigkeit dieser Aussagen kann man sich folgendermaßen überlegen, wenn man noch ein Teilergebnis der Hilfssätze 5 und 6 beachtet, nach dem ein Tetraeder

aus  $\mathfrak{L}_{1/2}$  bzw. aus  $\mathfrak{L}_2$  stets in weniger als sieben bzw. acht Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt werden kann. Dafür wird dort eine Zerlegungsvorschrift angegeben, die auf LENHARD [5] zurückgeht.

Zu (a): Angenommen, es ist der Eckpunkt  $P$  eines Orthogonal-Tetraeders ein innerer Punkt von  $T$ . Ist  $P$  für alle Orthogonal-Tetraeder, denen er angehört, jeweils ein Eckpunkt, dann gibt er Anlaß zu mehr als acht Orthogonal-Tetraedern. Die Betrachtung der Auffangkugel um  $P$  zeigt dieses, weil jedes Auffangdreieck eines Orthogonal-Tetraeders weniger als den achten Teil der Kugeloberfläche einnimmt. Gibt es bei dieser Zerlegung ein Orthogonal-Tetraeder  $T_w$ , von dem  $P$  ein innerer Wandpunkt ist, und ein weiteres Orthogonal-Tetraeder  $T_k$ , von dem  $P$  ein innerer Punkt einer Kante ist, dann gehört  $P$  zu wenigstens fünf verschiedenen Orthogonal-Tetraedern. Dieses zeigt wiederum die Betrachtung der Auffangkugel um  $P$ . Das können aber bei einer vollständigen Zerlegung von  $T$  nicht alle Orthogonal-Tetraeder sein, weil  $T_k$  sowie  $T_w$  die anderen Orthogonal-Tetraeder nicht zu einem Tetraeder  $T$  mit nicht-

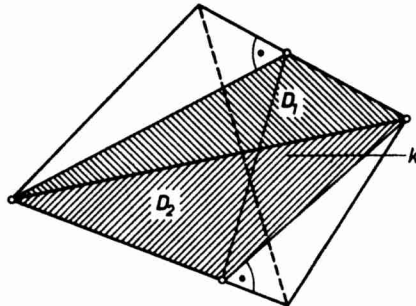


Abb. 16

rechtwinkligen Wänden ergänzen können. Denn sonst würden eine Wand von  $T_k$  und zwei Wände von  $T_w$  gleichzeitig jeweils Wände von  $T$  sein, was ein Widerspruch zur Nicht-Rechtwinkligkeit der Wände von  $T$  ist. Darum liegen in dem Halbraum bezüglich der Auffangkugel von  $P$ , in dem  $T_w$  liegt, wenigstens noch zwei und in dem entsprechenden Viertelraum von  $T_k$  wenigstens noch ein Orthogonal-Tetraeder. Gibt es keine solchen Tetraeder  $T_w$  bzw.  $T_k$ , dann haben weitere fünf bzw. zwei Orthogonal-Tetraeder den Eckpunkt  $P$  gemeinsam, so daß sich immer insgesamt mehr als sieben Orthogonal-Tetraeder hierbei ergeben.

Zu (b): Da  $T$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel besitzt, gilt die im Fall der Eigenschaft  $(W_2)$  angegebene Begründung für denselben Sachverhalt auch hier in gleicher Weise.

Zu (c): Um ein Orthogonal-Tetraeder zu erhalten, kann die Zerlegung der beiden Wände wegen (b) bei  $\neg(W_2)$  nicht so erfolgt sein, daß von ein und demselben Eckpunkt von  $T$  das Lot in den beiden Wänden gefällt wurde. Sind nun die Lote in den beiden Wänden von verschiedenen Eckpunkten von  $T$  aus gefällt worden, dann liegen die Lotfußpunkte auf sich gegenüberliegenden Kanten von  $T$  (vgl. Abb. 16). Diese Kanten stehen jeweils auf den im Inneren von  $T$  zu ergänzenden Wänden des Teiltetraeders mit den Wänden  $D_1$  und  $D_2$  aber genau dann senkrecht, wenn  $T$  die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzt. Die beiden Lote können andererseits auch nicht beide auf den im Inneren von  $T$  zu ergänzenden Wänden senkrecht stehen, da wegen  $(L_2)$   $T$  keine gegenüberliegenden Kanten hat, die Scheiteltanten von stumpfen Keilwinkeln sind.

Zu (d): Wäre jede Wand von  $T$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann ergeben sich insgesamt acht rechtwinklige Dreiecke, die wegen (a) und (b) zu genau vier Teiltetraedern Anlaß geben. Diese können aber nur genau dann Orthogonal-

Tetraeder sein, wenn  $T$  die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzt. Da  $T$  aber nicht die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzen soll, können nicht alle Wände in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt sein. Ist keine Wand von  $T$  in mehr als drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann gibt es nach den vorigen Ausführungen wenigstens eine Wand, die in genau drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist, wenn für  $T \neg (W_2)$  gilt. Wegen (a), (c) und der Struktur der Zerlegung einer Wand in drei rechtwinklige Dreiecke gibt das aber keine Zerlegung in Orthogonal-Tetraeder. Mindestens eine Wand von  $T$  muß in mehr als drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt sein.

Zu (e): Wäre eine Wand von  $T$  in genau vier und die anderen Wände in genau drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann ergibt das insgesamt 13 rechtwinklige Dreiecke in den Wänden von  $T$ . Wegen (a) und (b) gibt das zu wenigstens sieben Teiltetraedern Anlaß. Es gibt unter diesen Teiltetraedern zwei, die eine vollständige Kante von  $T$  gemeinsam haben und aber wegen (c) keine Orthogonal-Tetraeder sind. Das kann demzufolge keine minimale Zerlegung von  $T$  sein. Die Anzahl der Orthogonal-Tetraeder wird nicht verringert, wenn die Wände von  $T$  in mehr rechtwinklige Dreiecke, als bisher betrachtet, zerfallen.

Nunmehr läßt sich formulieren

*Hilfssatz 5. Hat das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  die Eigenschaft  $(L_{1/2})$ , dann ist es vollständig in Orthogonal-Tetraeder mit  $a_T \leq 6$  zerlegbar. Enthält  $T$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel und hat es nicht die Eigenschaft  $(W_2)$ , dann gilt  $a_T = 6$ .*

*Beweis.*  $T$  habe o.B.d.A. bezüglich der Ecke 4 die Eigenschaft  $(L_{1/2})$ . Durch das Lot von der Ecke 4 auf die Wand 1,2,3 mit dem Lotfußpunkt  $F$  läßt sich  $T$  in höchstens drei Fast-Orthoscheme mit der gemeinsamen senkrechten Kante  $F,4$  zerlegen. Diese lassen sich wiederum, falls sie nicht selbst schon Orthogonal-Tetraeder sind, wegen der Eigenschaft  $(L_{1/2})_4$  nach Hilfssatz 3 jeweils in zwei Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegen. Das entspricht dem Vorgehen von LENHARD und ergibt  $a_T \leq 6$ . Enthält  $T$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel, dann (aber nicht genau dann) ergeben sich hierbei die Fast-Orthoscheme 1,2, $F,4$ ; 2,3, $F,4$  und 3,1, $F,4$  und schließlich genau sechs Orthogonal-Tetraeder (vgl. Abb. 17).

Um zu zeigen, daß ein Tetraeder mit den oben genannten Eigenschaften in wenigstens sechs Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden muß, betrachtet man die Anzahl der rechtwinkligen Teildreiecke, in die die Wände von  $T$  insgesamt zerlegt werden. Diese Anzahl ist wegen (d) und (e) wenigstens  $4 + 2 + 2 + 2 = 10$ . Ist diese Anzahl größer als 10, dann geben diese Teildreiecke wegen (b) zu mindestens sechs Orthogonal-Tetraedern Anlaß. Folglich ist lediglich noch der Fall zu untersuchen, bei dem eine Wand von  $T$  in genau vier und die übrigen Wände jeweils in genau zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt sind. Diese in jeweils zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegten drei Wände geben aber wegen (a), (c) und  $\neg (W_2)$  zu mindestens sechs Orthogonal-Tetraedern Anlaß. Darum ist hier immer  $a_T \geq 6$ , und somit ergibt sich mit dem früheren Resultat  $a_T = 6$ .

Genau für die Fälle von Dreieckswinkeltypen (1)a), (1)b), (2)a), (3)a), (3)b<sub>1</sub>), (3)c), (5)a), (6), (8), (10)a), (10)b<sub>1</sub>), (10)c) und (11) ist jeweils die Eigenschaft  $(L_{1/2})$  erfüllt. Sie ergeben die Tetraedermenge  $\mathfrak{Q}_{1/2}$ , und gemäß Hilfssatz 5 gilt darum  $N_{\mathfrak{Q}_{1/2}} = 6$ .

*Hilfssatz 6. Hat das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  die Eigenschaft  $(L_2)$ , aber nicht die Eigenschaft  $(L_{1/2})$ , dann ist es vollständig in Orthogonal-Tetraeder mit  $a_T \leq 7$  zerlegbar. Enthält  $T$  keine rechten Keilwinkel, dann gilt  $a_T = 7$ .*

*Beweis.* In Frage kommt hier nur der Dreieckswinkeltyp (12) mit den Fällen (12)a), (12)b<sub>1</sub>) und (12)c<sub>1</sub>), die die geforderten Eigenschaften besitzen. In den in Abb. 2



angegebenen Repräsentanten hat  $T$  bezüglich der Ecke 2 die Eigenschaft  $(L_2)$ . Durch das Lot von der Ecke 2 auf die Wand 1,3,4 mit dem Lotfußpunkt  $F$  läßt sich  $T$  wie beim Beweis von Hilfssatz 5 in höchstens drei Fast-Orthoscheme mit der gemeinsamen senkrechten Kante  $F,2$  zerlegen. Da  $(L_{1,2})$  nicht gilt, läßt sich eines von diesen Fast-Orthoschemen nach Hilfssatz 4 in drei, die übrigen lassen sich nach Hilfssatz 3 in zwei Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegen. Auch das entspricht dem Vorgehen von LENHARD und ergibt  $a_T \leq 7$ . Enthält  $T$  keine rechten Keilwinkel, dann ergibt dieses Vorgehen die Fast-Orthoscheme  $1,4,F,2$ ,  $1,3,F,2$  und  $3,4,F,2$ , von denen das erste in drei und die anderen beiden in zwei Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden können, so daß hierbei genau sieben Orthogonal-Tetraeder entstehen (vgl. Abb. 18).

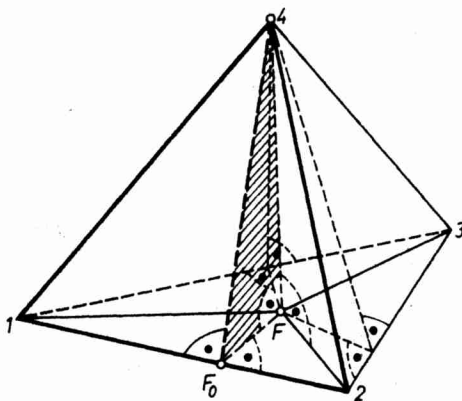


Abb. 17

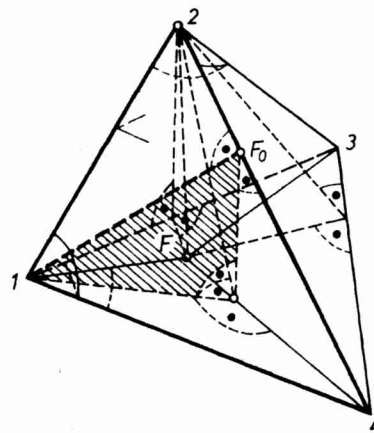


Abb. 18

Die Eigenschaft  $(W_1)$  und damit erst recht die Eigenschaft  $(W_2)$  kann ein solches Tetraeder  $T$  auf Grund der Lage der stumpfen Dreieckswinkel niemals besitzen. Ebenso können aus demselben Grunde in einem solchen Tetraeder niemals rechte Dreieckswinkel auftreten.

Enthält nun  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  mit der Eigenschaft  $(L_2) \wedge \neg (L_{1,2})$  keine rechten Keilwinkel, dann gibt es wiederum bei einer Zerlegung in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder wegen (d) eine Wand von  $T$ , die in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist. Da alle vier Wände stumpfwinklige Dreiecke sind, ist das zerlegende Lot dabei von dem Scheitel  $P$  des betreffenden stumpfen Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Kante dieser Wand gefällt. Es wird der in Abb. 1 angegebene Repräsentant betrachtet (vgl. auch Abb. 18). Sind wenigstens zwei Wände von  $T$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann läßt sich zeigen, daß sich bei einer minimalen Zerlegung stets die im ersten Teil dieses Beweises angegebene ergibt:

Sind die beiden Wände  $1'$  und  $4'$  oder  $2'$  und  $3'$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann kann ihre Ergänzung zu Orthogonal-Tetraedern, falls überhaupt möglich, nur durch einen gemeinsamen vierten Eckpunkt innerhalb der Wand  $2'$  bzw.  $1'$  erfolgen. Diese Wand wird dadurch in wenigstens sechs rechtwinklige Teildreiecke zerlegt, und es ergibt sich bei einer minimalen Zerlegung von  $T$  die oben beschriebene in sieben Orthogonal-Tetraeder. Sind die beiden Wände  $1'$  und  $2'$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann kann ihre Ergänzung zu Orthogonal-Tetraedern nur durch Punkte im Innern der Wände  $3'$  und  $4'$  bewerkstelligt werden. Dadurch werden diese beiden Wände in wenigstens vier rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Diese beiden Wände schließen aber immer einen stumpfen Keilwinkel ein, so daß diese jeweiligen vier rechtwinkligen Teildreiecke in diesen Wänden zu zweimal

vier Orthogonal-Tetraedern Anlaß geben. Das ist keine minimale Zerlegung von  $T$ . Sind die beiden Wände 1' und 3' oder 3' und 4' in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann läßt sich eine Ergänzung dieser zu Orthogonal-Tetraedern nur durch zwei verschiedene innere Punkte der Wand 2' erreichen, die für die beiden angegebenen Fälle jeweils übereinstimmen. Dadurch wird 2' in wenigstens sechs rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Bei minimaler Zerlegung von  $T$  ergibt sich wiederum die oben beschriebene in sieben Orthogonal-Tetraeder. Sind schließlich als sechster und letzter Fall die beiden Wände 2' und 4' in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann können diese vier rechtwinkligen Dreiecke nur zu Orthogonal-Tetraedern ergänzt werden, wenn  $T$  die Eigenschaft  $(L_2)_1$  besitzt. Die vierten Tetraeder-Eckpunkte liegen dabei innerhalb der Wand 1'. Da diese Orthogonal-Tetraeder keine inneren Punkte gemeinsam haben dürfen, kann die Möglichkeit einer Lage des vierten Eckpunktes in der Wand 3' zur Ergänzung der rechtwinkligen Dreiecke in der Wand 2' von  $T$  nicht realisiert werden. In völlig entsprechender Weise wie oben wird dann die Wand 1' in wenigstens sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt und damit eine Zerlegung in sieben Orthogonal-Tetraeder erreicht. Die Zerlegung stimmt mit der obigen Zerlegungsbeschreibung überein, wenn die Permutation (1,2) auf die Bezeichnung der Eckpunkte von  $T$  angewendet wird.

Ist genau eine Wand von  $T$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann dürfen von den anderen Wänden zwei in genau drei und eine in genau vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt sein, falls eine vollständige Zerlegung von  $T$  durch weniger als sieben Orthogonal-Tetraeder erreicht werden soll, da für die Gesamtanzahl der rechtwinkligen Dreiecke in den Wänden von  $T$  dann  $2 + 3 + 3 + 4 = 12$  gilt. Wegen (b) könnte dieses zu weniger als sieben Orthogonal-Tetraedern führen. Das ist die letzte noch zu untersuchende Möglichkeit. Sind die Wände 1' oder 2' in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann geben die  $3 + 4 = 7$  rechtwinkligen Dreiecke in den anderen beiden Wänden, die einen stumpfen Keilwinkel einschließen, zu wenigstens sieben Orthogonal-Tetraedern Anlaß. Ist die Wand 3' in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann kann eine Ergänzung dieser zu Orthogonal-Tetraedern nur durch einen gemeinsamen inneren Punkt in 1' oder 2' erfolgen. Da nur eine Wand in vier Teildreiecke zerlegt sein darf, muß es für die beiden Dreiecke in 3' ein gemeinsamer Punkt sein. Liegt dieser Punkt in 2', dann hat das eine dieser beiden Orthogonal-Tetraeder mit einer Wand in 3' nur eine seiner Wände auf dem Rand von  $T$  liegen, so daß in diesem Fall sich wenigstens sieben Orthogonal-Tetraeder ergeben. Es liegt bei dieser Zerlegung wiederum der oben beschriebene Zerlegungs-Algorithmus zugrunde. Liegt der Punkt, der die beiden rechtwinkligen Dreiecke der Wand 3' zu Orthogonal-Tetraedern ergänzt, in der Wand 1', dann muß  $T$  die Eigenschaft  $(L_2)_1$  besitzen. In den anderen beiden Wänden 2' und 4' gibt es bei deren Zerlegung in genau drei rechtwinklige Dreiecke je ein solches, was durch eine Unterteilung dieser Wände vermittels des einzigen inneren Lotes dieser Wand entsteht. Eine Ergänzung zu einem Orthogonal-Tetraeder kann ebenfalls nur durch je einen inneren Punkt in der Wand 1' erfolgen. Von diesen nunmehr drei entstandenen inneren Punkten fallen zwei zusammen und stellen den Lotfußpunkt vom Eckpunkt 1 auf die Wand 1' dar, der dritte ist von diesem verschieden. Die Wand 1' wird dadurch in mehr als vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Folglich kann es nicht vorkommen, daß genau eine Wand in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist und weniger als sieben Orthogonal-Tetraeder entstehen. Somit gilt hier immer  $a_T \geq 7$ , und mit dem früheren Ergebnis erhält man  $a_T = 7$ . Demzufolge kann man auch schreiben  $N_{\mathfrak{B}_1} = 7$ .

Schließlich sind noch zwei Spezialfälle zu betrachten.

*Hilfssatz 7. Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_{1/2})_P$ . Ferner kommen in  $T$  keine rechten Keilwinkel und genau ein rechter Dreieckswinkel vor, der nicht den Eck-*

*punkt  $P$  als Scheitel besitzt und nicht in der Wand  $P'$  gegenüber dem Eckpunkt  $P$  liegt. Dann ist die Minimalzahl  $a_T = 5$ .*

**Beweis.** Hat das Tetraeder  $T = 1,2,3,4$  mit der Eigenschaft  $(L_{1/2})_4$  genau einen rechten Dreieckswinkel, der den Eckpunkt 2 als Scheitel hat und in der Wand 3' liegt, und keinen rechten Keilwinkel, dann läßt es sich mittels des Lotfußpunktes  $F$  des Lotes vom Eckpunkt 4 auf die Wand 4' in drei Fast-Orthoscheme zerlegen, von denen das eine mit der Wand 3' bereits ein Orthogonal-Tetraeder ist, die anderen beiden können entsprechend Hilfssatz 3 in je zwei Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden, so daß sich  $a_T \leq 5$  ergibt (vgl. Abb. 19).

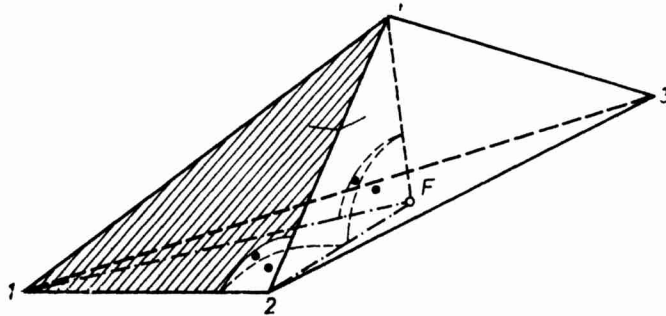


Abb. 19

Ein solches Tetraeder kann niemals die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzen, da auf Grund der Voraussetzungen die Wand 4' ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem Eckpunkt 2 als Scheitel des stumpfen Winkels ist. Um zu zeigen, daß  $a_T$  genau gleich 5 ist, wird angenommen, daß das Tetraeder  $T$  in höchstens vier Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt ist. Weiterhin gelten auch hier die Aussagen (a), (b) und (c) über die Zerlegung in Orthogonal-Tetraeder (vgl. S. 41). Bei einer solchen minimalen Zerlegung können nicht mehr als insgesamt acht rechtwinklige Dreiecke in den Wänden liegen. Bleibt die Wand 3' unzerlegt, da sie bereits ein rechtwinkliges Dreieck ist, und sind zwei andere Wände in genau zwei, die vierte in höchstens drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann erfolgt eine Ergänzung der Wand 3' zu einem Orthogonal-Tetraeder wegen der Eigenschaft  $(L_{1/2})_4$  nur, indem der vierte Eckpunkt ein innerer Punkt der Wand 4' oder der Wand 2' ist. Dadurch wird diese betreffende Wand in mehr als drei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Dieses ist aber gemäß Annahme nicht möglich. Demzufolge kann nur noch jede Wand in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt sein. Da aber  $\neg(W_2)$  gilt, ergeben jeweils zwei Wände niemals ein einziges Orthogonal-Tetraeder. Darum müssen bei einer vollständigen Zerlegung stets mehr als vier Orthogonal-Tetraeder auftreten. Mit dem früheren Ergebnis erhält man  $a_T = 5$ .

**Hilfssatz 8.** *Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat die Eigenschaft  $(L_2)_P$ . Ferner kommen in  $T$  keine rechten Dreieckswinkel und genau ein rechter Keilwinkel vor, der von den Wänden  $P'$  und  $Q'$  gegenüber den Ecken  $P$  bzw.  $Q$  als seine Schenkel gebildet wird. Dann ist, falls  $(L_{1/2})_P$  oder  $(L_{1/2})_Q$  erfüllt ist, die Minimalzahl  $a_T = 4$ ; sonst ist die Minimalzahl  $a_T = 5$ .*

**Beweis.** Hat das Tetraeder  $T$  mit dem einen rechten Keilwinkel zwischen den Wänden  $P'$  und  $Q'$  die Eigenschaft  $(L_2)_P$ , dann läßt es sich mittels des Lotfußpunktes  $F$  des Lotes vom Eckpunkt  $P$  auf die Wand  $P'$ , der auf der Scheitelkante des rechten

Keilwinkels liegt, durch Einziehen der Wand  $P, Q, F$  in zwei Fast-Orthoscheme zerlegen, die, da keine rechten Dreieckswinkel in  $T$  vorkommen, keine Orthogonal-Tetraeder sein können. Falls die Eigenschaft  $(L_{1/2})_P$  erfüllt ist, können diese beiden Fast-Orthoscheme nach Hilfssatz 3 in jeweils zwei, falls  $\neg (L_{1/2})_P$  gilt, kann das eine dieser beiden Fast-Orthoscheme nach Hilfssatz 3 in zwei, das andere nach Hilfssatz 4 in drei Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden, so daß sich für  $a_T$  keine größere Zerlegungszahl als 4 bzw. 5 ergeben kann. Wenn im Fall  $\neg (L_{1/2})_P$  jedoch für  $T$  die Eigenschaft  $(L_{1/2})_Q$  gilt, dann ergibt eine entsprechend modifizierte Zerlegung von  $T$  mit Hilfe einer Wand  $P, Q, E$ , wobei  $E$  der Lotfußpunkt des Lotes von  $Q$  auf die Wand  $Q'$  bezeichnet, wiederum eine Zerlegung in vier Orthogonal-Tetraeder.

Die Aussage (a) über die Zerlegung in Orthogonal-Tetraeder (vgl. S. 41) gilt hier auch und aus denselben Gründen. Die Aussage (b) ist zu modifizieren zu (b'): Enthält das Tetraeder  $T$  genau einen rechten Keilwinkel mit der Scheitellkante  $R, S$  und keine rechten Dreieckswinkel, dann kann es bei der gesuchten minimalen Zerlegung je ein Orthogonal-Tetraeder mit dem Eckpunkt  $R$  bzw.  $S$  geben, von denen je drei Wände auf dem Rand von  $T$  liegen. Sonst gilt (b). Die Ursache für diese Änderung ist in den Auffangdreiecken zu suchen, von denen diejenigen bezüglich  $R$  bzw.  $S$  wegen ihrer Rechtwinkligkeit nicht notwendig weiter zerlegt, aber diejenigen bezüglich der anderen beiden Eckpunkte von  $T$  wie in der Begründung von (b) stets weiter zerlegt werden müssen.

Hätte man nun eine minimale Zerlegung von  $T$  in genau drei Orthogonal-Tetraeder vorliegen, dann können von diesen höchstens  $3 + 3 + 2 = 8$  Wände auf dem Rand von  $T$  liegen. Das heißt, eine jede Wand von  $T$  ist in genau zwei rechtwinklige Dreiecke durch ein jeweiliges Lot in der betreffenden Wand zerlegt. Da keine rechten Dreieckswinkel in den Wänden vorkommen, muß jede Wand von  $T$  in mindestens zwei Teildreiecke zerlegt sein. Ist eine Wand in mehr als zwei Teildreiecke zerlegt, dann gibt das Anlaß zu mehr als drei Orthogonal-Tetraedern. Falls  $T$  die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzt, dann wird durch Einziehen der beiden existierenden orthogonalen Wände zu gegenüberliegenden Kanten das Tetraeder  $T$  in vier Orthogonal-Tetraeder zerlegt. Jedes der vier Auffangdreiecke wird dabei in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, und jedes Teiltetraeder hat genau zwei Wände auf dem Rand von  $T$  liegen. Hierbei wird der rechte Keilwinkel stets zerlegt und bleibt somit hierbei unberücksichtigt. Folglich ist unabhängig von der Eigenschaft  $(W_2)$  im Sinne eines indirekten Beweises das Tetraeder  $T$  mit den geforderten Winkeleigenschaften zu betrachten, bei dem jede Wand von  $T$  in genau zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt ist und wobei die Ecke  $R$  bzw.  $S$  zu jeweils genau einem Orthogonal-Tetraeder gehört. Die Zerlegung der Wände muß hierbei wegen der letzten Forderung so erfolgt sein, daß die zerlegenden Lote in den Wänden nicht von den Eckpunkten  $P$  und  $Q$  ausgehen. Unter diesen gibt es mindestens zwei, die von genau einem Eckpunkt von  $T$  ausgehen. Dann muß die diesem Eckpunkt in  $T$  gegenüberliegende Wand in mehr als zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden, da sie mindestens zwei weitere Eckpunkte von Orthogonal-Tetraedern enthält. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Zerlegung einer jeden Wand in genau zwei Teildreiecke. Es gilt folglich  $a_T > 3$  und, falls  $T$  die Eigenschaft  $(L_{1/2})_P$  oder  $(L_{1/2})_Q$  besitzt, somit  $a_T = 4$ . Solche Tetraeder können nur zu den folgenden Fällen von Dreieckswinkeltypen gehören: (1a), (1b), (2a), (3a), (5a) und (10a) (vgl. Abb. 20). Diese Aussagen über die Zugehörigkeit zu gewissen Dreieckswinkeltypen ergeben sich durch kombinatorische Betrachtungen hinsichtlich der Dreieckswinkeltypen.

Ein Tetraeder mit der Eigenschaft  $(L_1)_P$ , bei dem die Wände  $P'$  und  $Q'$  einen rechten Keilwinkel bilden und in dem sonst keine weiteren rechten Keil- und Dreieckswinkel vorkommen, und das die Eigenschaft  $\neg (L_{1/2})_P \wedge \neg (L_{1/2})_Q$  hat, kann nur zu den folgenden Fällen von Dreieckswinkeltypen gehören: (3a), (10a), (12a) und (12b)<sub>1</sub>

(vgl. Abb. 21). Ein solches Tetraeder kann niemals die Eigenschaft  $(W_2)$  besitzen.

Hat  $T$  eine doppelstumpfe Ecke bei  $P$ , dann ist das Auffangdreieck bezüglich  $P$  bei einer vollständigen Zerlegung von  $T$  in Orthogonal-Tetraeder in wenigstens vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt, wie sich unter Verwendung von Hilfssatz 2 ergibt (vgl. Abb. 22; dort sind diese Ecke und das zugehörige Auffangdreieck dargestellt). Da  $\neg(L_{1/2})_P$  gilt, gibt es mindestens eine Wand von  $T$  mit dem Eckpunkt  $P$ , die ein stumpfwinkliges Dreieck ist und wo der Scheitel des stumpfen Winkels nicht der

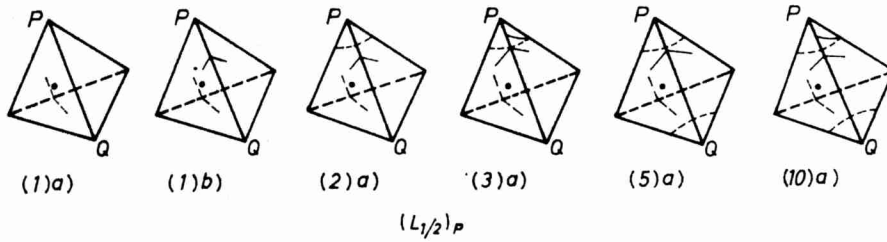
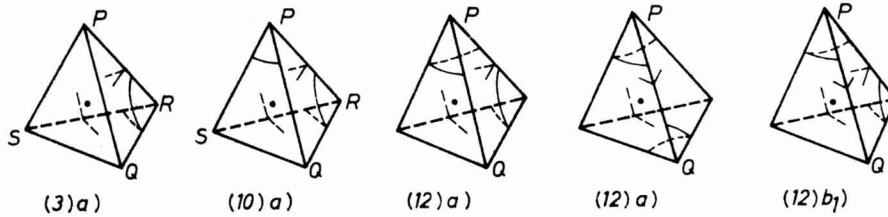


Abb. 20

Eckpunkt  $P$  ist. Darum können nicht alle Orthogonal-Tetraeder den Punkt  $P$  als einen Eckpunkt haben. Das bedeutet aber, daß mindestens vier Orthogonal-Tetraeder mit dem Eckpunkt  $P$  und wenigstens ein weiteres, das nicht den Eckpunkt  $P$  enthält, für eine vollständige Zerlegung von  $T$  in Orthogonal-Tetraeder nötig sind. Somit ist für diese Fälle immer  $a_T \geq 5$ .



$$(L_2)_P \wedge \neg(L_{1/2})_P \wedge \neg(L_{1/2})_Q$$

Abb. 21

Hat  $T$  keinen doppelstumpfen Eckpunkt bei  $P$ , dann hat es einen doppelstumpfen auf der Kante  $R,S$  (etwa bei  $R$ ), die Scheiteltkante des rechten Keilwinkels ist und gegenüber der Kante  $P,Q$  liegt. Es handelt sich hierbei dann um die restlichen Fälle (3)a, (10)a und (12)b<sub>1</sub>) (vgl. auch Abb. 21). Wird im Sinne eines indirekten Beweises angenommen, daß ein solches Tetraeder  $T$  in vier Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt ist, dann kann wegen des rechten Keilwinkels von  $T$  höchstens eines unter den Orthogonal-Tetraedern vorkommen, von dem drei Wände in Wänden von  $T$  liegen. Dieses muß mit  $T$  den Eckpunkt  $S$  gemeinsam haben (vgl. Abb. 21). Bei allen übrigen können höchstens zwei Wände in Wänden von  $T$  liegen. Darum liegen bei einer solchen Zerlegung in den Wänden von  $T$  insgesamt höchstens neun rechtwinklige Dreiecke. Da  $T$  hier nicht die Eigenschaft  $(W_2)$  haben kann, würden insgesamt acht rechtwinklige Dreiecke in den Wänden von  $T$  auf alle Fälle zu mehr als vier Orthogonal-Tetraedern Anlaß geben. Darum ist nur noch der Fall mit insgesamt neun rechtwinkligen Dreiecken in den Wänden von  $T$  zu betrachten. Das heißt aber, daß es eine Wand von  $T$  mit genau drei rechtwinkligen Dreiecken gibt. In allen anderen

Wänden liegen genau zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Ergänzung des Eckpunktes  $S$  von  $T$  zu einem Orthogonal-Tetraeder mit drei Wänden auf dem Rand von  $T$  kann nur so erfolgen, daß die Wände von  $T$  bis auf höchstens eine in nicht mehr als zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Das läßt sich nur bewerkstelligen, indem in den Wänden  $Q'$  und  $R'$  jeweils die Lote von  $P$  auf die gegenüberliegenden Kanten gefällt werden. Die Lotfußpunkte  $F_1 \in Q'$  und  $F_2 \in R'$  liegen auch gleichzeitig in  $P'$  (vgl.

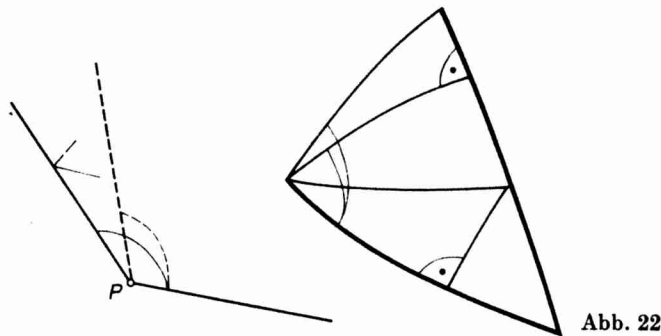


Abb. 22

Abb. 23). Dadurch entstehen in  $P'$  zwei neue Eckpunkte, die eine Zerlegung von  $P'$  in mehr als drei rechtwinklige Dreiecke bewirken. Denn bei der Zerlegung des restlichen Vierecks  $F_1, F_2, Q, R \subset P'$  sind zwei stumpfe Winkel mit den Scheiteln  $R$  und  $F_1$  zu zerlegen. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Es gilt demzufolge auch hierbei immer  $a_T = 5$ .

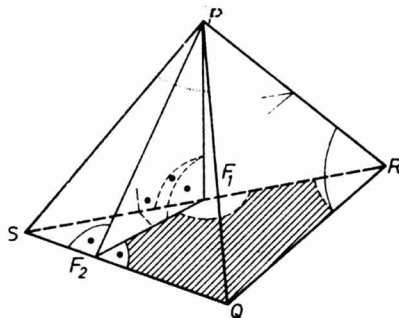


Abb. 23

Folgende allgemeine Anmerkung sei insbesondere zu den beiden Hilfssätzen 7 und 8 noch gemacht: Werden in dem Tetraeder  $T$  entgegen den Voraussetzungen der Hilfssätze noch weitere rechte Keil- und Dreieckswinkel zugelassen, dann kann die Minimalzahl  $a_T$  niemals größer ausfallen, als in dem betreffenden Hilfssatz angegeben.

Ein Tetraeder aus  $\mathfrak{B}^{(3)} \setminus \mathfrak{L}_2$  läßt sich nach Satz 3 in zwei Teiltetraeder  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit der Eigenschaft  $(L_2)_{P_i}$  zerlegen, wobei sich diese Zerlegung so einrichten läßt, daß in einem der Tetraeder  $T_i$  die Wand  $P_i$  einen rechten Keilwinkel mit einer anderen Wand von  $T_i$  bildet. Dann gilt unter Berücksichtigung der Hilfssätze 6 und 8 einschließlich der dort anschließend gemachten Anmerkung immer  $a_T \leq 5 + 7 = 12$ . Zusammen mit dem Ergebnis  $N_{\mathfrak{L}_2} = 7$  aus Hilfssatz 6 läßt sich darum die Aussage  $N = N_{\mathfrak{B}^{(3)}} \leq 12$  herleiten. Das ist im euklidischen Fall ein Resultat von LENHARD, was nun in den folgenden Ausführungen verschärft werden soll.

**Hilfssatz 9.** *Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat nicht die Eigenschaft  $(L_2)$ , in  $T$  kommen keine rechten Keil- und Dreieckswinkel vor, und  $T$  sei durch eine Zerlegung  $\mathfrak{Z}_0$  in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder zerlegt. Dann gibt es stets eine Wand  $w$ , die einen stumpfen Keilwinkel von  $T$  in zwei nichtstumpfe Keilwinkel derart zerlegt, daß  $T$  in genau zwei Teiltetraeder jeweils mit der Eigenschaft  $(L_2)$  zerlegt ist und dabei kein innerer Punkt der Orthogonal-Tetraeder, in die  $T$  bei  $\mathfrak{Z}_0$  zerlegt wurde, zur Wand  $w$  gehört.*

**Beweis.** Hat das Tetraeder  $T = 1,2,3,4$  die Eigenschaft  $\neg(L_2)$ , dann kommen entweder genau zwei stumpfe Keilwinkel vor, deren Scheiteltanten in  $T$  gegenüberliegende Kanten sind, oder es kommen genau drei stumpfe Keilwinkel vor, von denen zwei Keilwinkel ebenfalls sich in  $T$  gegenüberliegende Kanten als Scheitel besitzen. Die letzte Möglichkeit tritt nur im Fall  $(12)c_2$  ein, die andere Möglichkeit liegt genau für die Fälle der Dreieckswinkeltypen  $(1)c$ ,  $(2)b$ ,  $(3)b_2$ ,  $(4)$ ,  $(5)b$ ,  $(7)$ ,  $(9)$ ,  $(10)b_2$ ,  $(12)b_2$ ,  $(12)b_3$ ,  $(13)$  und  $(14)$  vor. Demzufolge kommen hier in  $T$  immer zwei gegenüberliegende Kanten vor, die Scheiteltanten von stumpfen Keilwinkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind, etwa die Kanten 1,3 und 2,4. Diese müssen auf alle Fälle durch Einziehen von Wänden in nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt worden sein, wenn eine vollständige Zerlegung von  $T$  in Orthogonal-Tetraeder erfolgt ist.

Hat das Tetraeder  $T$  die Eigenschaft  $(W_1)$ , dann hat es hier auch die Eigenschaft  $(W_2)$ . Es lassen sich dann, wie bereits früher ausgeführt, sogar zwei Wände einziehen, die  $T$  in genau vier Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegen. In einem solchen Fall ist die Aussage des Hilfssatzes richtig. Die Eigenschaft  $(W_2)$  können hier nur Tetraeder haben, die zu Fällen der Dreieckswinkeltypen  $(1)c$ ,  $(2)b$ ,  $(4)$ ,  $(5)b$ ,  $(9)$  und  $(14)$  gehören.

Es sei  $T$  in  $a_T$  ( $\leq 12$ ) Orthogonal-Tetraeder vollständig zerlegt. Wird nun im Sinne eines indirekten Beweises angenommen, daß dabei keiner der beiden stumpfen Keilwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  durch jeweils einen einzigen ebenen Schnitt zerlegt ist, so daß  $T$  in genau zwei Teiltetraeder zerfällt, dann sind diese beiden Keilwinkel durch mindestens je zwei Wände mit verschiedener Stellung in nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt, die zu Orthogonal-Tetraedern gehören. Man kann sich durch sukzessive Vergrößerung der Anzahl dieser die stumpfen Keilwinkel zerlegenden Wände klarmachen, daß dann keine minimale Zerlegung von  $T$  vorliegen kann. Zunächst sei eine einzige, etwa den Keilwinkel  $\alpha_1$  in einen rechten und einen spitzen Keilwinkel zerlegende Wand  $1,3,E_0$  ( $\perp 1,2,3$ ),  $E_0 \in 2,4$  eingezogen, so daß  $T$ , wie oben beschrieben, in nicht mehr als 12 Orthogonal-Tetraeder zerlegt wird. Dabei sei  $G \in 1,3$  der Lotfußpunkt von  $E_0$  auf die Kante 1,3. Durch  $E_{00} \in 2,4$ ,  $E_{00} \neq E_0$ ,  $H \in 1,3$  und  $E_{00}, H \perp 1,3,4$  werden daraus zwei den Keilwinkel  $\alpha_1$  zerlegende Wände, etwa o.B.d.A. die Wände  $1,G,E_0$  und  $3,G,E_{00}$ , gemacht (vgl. Abb. 24). Bei einer Zerlegung von  $T$  in Orthogonal-Tetraeder unter Verwendung der beiden eingezogenen Wände werden dann die zwei Tetraederwände  $2'$  und  $4'$  in wenigstens je sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die wegen des stumpfen Keilwinkels  $\alpha_1$  zu verschiedenen Orthogonal-Tetraedern Anlaß geben. Unter diesen rechtwinkligen Dreiecken gibt es darüber hinaus wenigstens eines, das zu mehr als einem Orthogonal-Tetraeder Anlaß gibt, da die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 erfüllt sind. Darum führt diese Zerlegung zu mehr als 12 Orthogonal-Tetraedern. Untersucht man die Verhältnisse genauer, dann zeigt sich folgendes: Falls der Winkel  $\sphericalangle 1G2$  spitz ist, dann liegt  $H$  im Innern der Kante 1, $G$ . Auf den verschiedenen Seiten der Wand  $1,G,E_0$  liegen wenigstens zwei bzw. fünf Orthogonal-Tetraeder, auf den verschiedenen Seiten der Wand  $3,G,E_{00}$  liegen wenigstens fünf bzw. sechs Orthogonal-Tetraeder, wobei bei möglichst wenig Orthogonal-Tetraedern auch noch die Annahme des indirekten Beweises verletzt wird. Deshalb kommt eine solche Zerlegung — auch wegen einer Zerlegungsanzahl von mehr als

12 Orthogonal-Tetraedern — hier nicht in Frage. Folglich muß der Winkel  $\sphericalangle 1G2$  stumpf sein, was sich durch geeignete Lage von  $E_0$  und  $E_{00}$  immer einrichten läßt. In diesem Falle liegt  $H$  im Innern der Kante  $G,3$ . Dann wird die Wand  $4'$  in wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mehr zerlegt, was auch Anlaß zu wenigstens einem weiteren Orthogonal-Tetraeder gibt. In der Wand  $2'$  ändert sich bei der Zerlegung in Dreiecke die Anzahl dieser nicht, aber eines dieser Dreiecke gibt Anlaß zu wenigstens drei Orthogonal-Tetraedern gegenüber ursprünglich einem Orthogonal-Tetraeder. Das sind also wenigstens zwei Orthogonal-Tetraeder mehr. Wegen des stumpfen Keilwinkels  $\alpha_1$  sind alle diese Orthogonal-Tetraeder voneinander verschieden, so daß insgesamt mindestens  $1 + 2 = 3$  Orthogonal-Tetraeder mehr entstehen und somit auch eine solche Zerlegung nicht zur minimalen Tetraederanzahl, sondern zu einer Vergrößerung der Anzahl der Orthogonal-Tetraeder führt. Eine Verringerung dieser Anzahl wird aber auch dann nicht erreicht, wenn  $E_0$  oder  $E_{00}$  in das Innere der Wände  $1'$  oder  $3'$  bzw. ganz in das Innere von  $T$  gelegt werden oder wenn  $G$  auf  $1,3$  variiert oder wenn weitere zerlegende Wände eingezeichnet werden.

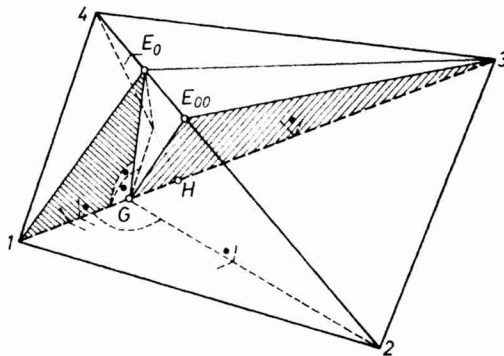


Abb. 24

Folglich kann das keine minimale Zerlegung sein, mindestens ein stumpfer Keilwinkel muß durch einen einzigen Schnitt zerlegt werden.

Würde die zerlegende Wand den stumpfen Keilwinkel nicht in zwei nichtstumpfe Keilwinkel zerlegen, dann hätte das eine Teiltetraeder, etwa  $T_2$ , wiederum zwei stumpfe Keilwinkel, die sich gegenüberliegen. Die beiden Teiltetraeder  $T_1$  und  $T_2$  besitzen nicht die Eigenschaft  $(W_2)$ , wenn  $T$  nicht die Eigenschaft  $(W_2)$  hat. Darum ist  $T_2$  weiter durch Einziehen einer Wand in zwei Teiltetraeder  $T'_2$  und  $T'_3$  zu zerlegen, so daß dann die Zerlegung von  $T$  mehr als 12 Orthogonal-Tetraeder ergibt, da mindestens eins dieser drei Teiltetraeder in mehr als vier, die anderen in wenigstens vier Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden müssen. Also muß der stumpfe Keilwinkel hierbei in zwei nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt sein, wenn eine minimale Zerlegung vorliegen soll.

Die Bedeutung dieses Hilfssatzes liegt darin, daß  $T$  in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden kann, indem es zunächst in zwei Teiltetraeder mit der Eigenschaft  $(L_2)$  durch eine geeignete Wand  $w$  zerlegt wird. Diese sind dann gemäß der Hilfssätze 3 bis 8 weiter zu zerlegen. Um eine Zerlegung von  $T$  in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder zu erhalten, muß die einen stumpfen Keilwinkel zerlegende einzuziehende Wand, etwa  $1,3,E_0; E_0 \in 2,4$ , rechte Keil- bzw. Dreieckswinkel erzeugen. Daher sind die folgenden sechs, allerdings nicht in jedem Falle realisierbaren Möglichkeiten zu betrachten. Es ist dann von diesen Möglichkeiten diejenige auszuwählen (evtl. gibt es mehrere), die den Keilwinkel  $\alpha_1$  in zwei nichtstumpfe Keilwinkel zerlegt



und für  $T$  eine Zerlegung  $\mathfrak{B}_1$  in möglichst wenig Orthogonal-Tetraeder ( $a_T^{(\mathfrak{B}_1)}$  Stück) liefert:

- |       |   |               |                 |   |     |
|-------|---|---------------|-----------------|---|-----|
| (I)   | $1,3,E_0 \perp 1,2,3$   | $(E_0 = F_1)$ | (vgl. Abb. 25), | } | (*) |
| (II)  | $1,3,E_0 \perp 1,4,3$   | $(E_0 = F_2)$ | (vgl. Abb. 25), |   |     |
| (III) | $1,3,E_0 \perp 1,2,4$   |               | (vgl. Abb. 26), |   |     |
| (IV)  | $1,3,E_0 \perp 2,3,4$   |               | (vgl. Abb. 26), |   |     |
| (V)   | $1,E_0 \perp 2,4 \vee 3,E_0 \perp 2,4$  |               | (vgl. Abb. 27), |   |     |
| (VI)  | $1,E_0 \perp 1,4 \vee 1,E_0 \perp 1,2,$<br>$\vee 3,E_0 \perp 2,3 \vee 3,E_0 \perp 3,4.$ |               |                 |   |     |

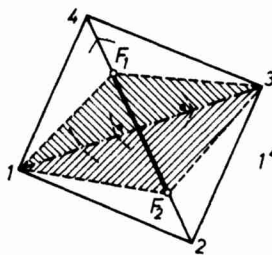


Abb. 25

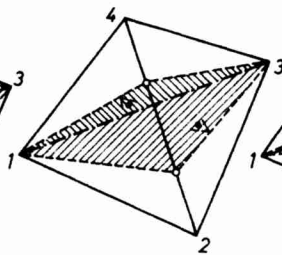


Abb. 26

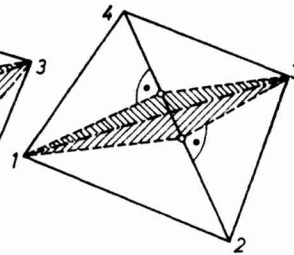


Abb. 27

Es kann (VI) überhaupt nur dann zur Diskussion stehen, wenn in  $T$  zwei stumpfe Dreieckswinkel dieselbe Ecke als Scheitel haben. Dieses liegt bei den Fällen (3) $b_2$ , (7), (10) $b_2$ , (12) $b_2$ , (12) $b_3$ , (12) $c_2$  und (13) vor.

Falls eine minimale Zerlegung von  $T$  durch eine Wand erreicht wird, die den Keilwinkel  $\alpha_2$  in der oben beschriebenen Weise zerlegt, dann sind die analogen Betrachtungen hinsichtlich des stumpfen Keilwinkels  $\alpha_2$  vorzunehmen. Die minimale Anzahl von Orthogonal-Tetraedern sei hierbei  $a_T^{(\mathfrak{B}_1)}$ . Kommt in dem Tetraeder  $T$  außer den beiden gegenüberliegenden stumpfen Keilwinkeln ein weiterer stumpfer Keilwinkel  $\alpha_3$  vor (Fall (12) $c_2$ ), dann führt keine Zerlegung von  $\alpha_3$  durch eine Wand entsprechend den eben angegebenen Möglichkeiten auf zwei Teiltetraeder, die beide die Eigenschaft  $(L_2)$  besitzen. Es ergibt sich sogar, daß stets beide Teiltetraeder wiederum je zwei stumpfe Keilwinkel enthalten, deren Scheiteltanten in dem jeweiligen Teiltetraeder sich gegenüberliegen. Diese Zerlegung des Keilwinkels  $\alpha_3$  braucht somit nicht noch zusätzlich betrachtet zu werden. Darum gilt für das Tetraeder  $T$  dann insgesamt  $a_T = \min(a_T^{(\mathfrak{B}_1)}, a_T^{(\mathfrak{B}_2)})$ .

Daraus ergibt sich nunmehr

**Hilfssatz 10.** *Das Tetraeder  $T \in \mathfrak{B}^{(3)}$  hat nicht die Eigenschaft  $(L_2)$ , es kommen in  $T$  keine rechten Keil- und Dreieckswinkel vor, und  $T$  hat auch nicht die Eigenschaft  $(W_2)$ . Dann gilt:*

- A)  $a_T = 10$ , wenn  $T$  zu den Fällen der Dreieckswinkeltypen (1)c), (2)b), (4), (5)b), (9) und (14) gehört,
- B)  $10 \leq a_T \leq 11$ , wenn  $T$  zu den Fällen der Dreieckswinkeltypen (3) $b_2$ , (7), (10) $b_2$  und (13) gehört,

- C)  $a_T = 11$ , wenn  $T$  zum Fall (12)c<sub>2</sub> gehört,
- D)  $10 \leq a_T \leq 12$ , wenn  $T$  zum Fall (12)b<sub>2</sub> gehört,
- E)  $11 \leq a_T \leq 12$ , wenn  $T$  zum Fall (12)b<sub>3</sub> gehört.

Beweis. Bis auf C) und D) ergeben sich die Minimalzahlen  $a_T$  bereits nach der Möglichkeit (I) bzw. (II) aus (\*), die auf LENHARD zurückgehen. Die Minimalzahl unter C) wird nur vermöge der Möglichkeit (V) erhalten (nach LENHARD ergibt sich hier immer 12).

Die kleinste der Minimalzahlen unter D) wird für ganz spezielle Tetraeder mit  $\neg(Z)$  vermöge der Möglichkeit (VI) erhalten, wenn nämlich die eingezogene Wand mit zwei geeigneten in  $T$  gegenüberliegenden Kanten je einen rechten Dreieckswinkel bildet, so daß nach Hilfssatz 7 die zwei Teiltetraeder von  $T$  in jeweils fünf Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden können. In B) und E) kann  $a_T$  sowohl den kleineren als auch den größeren Wert annehmen. Der größere Wert wird angenommen, wenn  $T$  die Winkelzerlegungseigenschaft (Z) besitzt. Diese Winkelzerlegungseigenschaft (Z) hat zur Folge, daß bei B) und D) das Teiltetraeder  $T_2$  in nicht weniger als sieben Orthogonal-Tetraeder zerlegt werden kann. Desgleichen gilt bei D) für die Minimalzahlen 11 bzw. 12. Auch die anderen Möglichkeiten (III) bis (VI) ergeben, falls sie sich überhaupt realisieren lassen, bis auf den Sonderfall unter D) hier keine Verringerung der Zahlen  $a_T$ . In einigen Fällen kann sogar eine Vergrößerung bei diesen anderen Möglichkeiten eintreten.

Somit kann nur ein Tetraeder, das zu den Fällen der Dreieckswinkeltypen (12)b<sub>2</sub> und (12)b<sub>3</sub> gehört und die Eigenschaft (Z) besitzt, die Maximalzahl  $a_T = 12$  annehmen. Es genügt darum, ein solches Tetraeder anzugeben, das etwa zu (12)b<sub>3</sub> gehört. Diese Forderungen erfüllen z. B. die euklidischen Tetraeder  $T_0 = 1,2,3,4$  mit den

$$\text{Winkelgrößen } |\sphericalangle 314| = |\sphericalangle 123| = \frac{3}{4}\pi, |\alpha_{24}| = \frac{3}{4}\pi, |\alpha_{14}| = |\alpha_{23}| = \frac{\pi}{6} \quad (\alpha_{ik} \text{ ist der}$$

Keilwinkel zwischen den Wänden  $i'$  und  $k'$ ). Aus der Menge dieser zueinander ähnlichen Tetraeder könnte etwa dasjenige mit der Kantenlänge  $|1,2| = 1$  ausgewählt werden. Es ergibt sich dann  $|\sphericalangle 142| = |\sphericalangle 132| = y_0$  und  $|\alpha_{12}| = v_0$ . Für den elliptischen bzw. hyperbolischen Fall kann anstelle der Dreieckswinkel- und Keilwinkelgrößen  $y_0$  bzw.  $v_0$  gesetzt werden:  $|\sphericalangle 142| = |\sphericalangle 132| = y_0 \pm \varepsilon_1$  bzw.  $|\alpha_{12}| = v_0 \pm \varepsilon_2$  mit geeigneten  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_i > 0$ ). Damit ist schließlich folgender Satz bewiesen:

Satz 4.  $\mathfrak{R}^{(3)}$  ist ein  $\mathfrak{B}^{(3)}$ -Baukasten mit  $N = 12$ .

Die Vermutung von LENHARD, daß  $N = 12$  beträgt, ist damit als richtig nachgewiesen und auf den elliptischen Fall (mit der Einschränkung auf  $\mathfrak{B}^{(3)}$ ) und den hyperbolischen Fall übertragen worden. Der Zerlegungsalgorithmus von LENHARD liefert für (12)b<sub>3</sub> bei der Eigenschaft (Z) die Maximalzahl  $N = 12$ , die in gleicher Weise der Zerlegungsalgorithmus entsprechend der Möglichkeit (V) ergibt.

## LITERATUR

- [1] BÖHM, J.: Einige kombinatorisch-topologische Eigenschaften von allgemeinen  $r$ -dimensionalen Orthoschemen. Math. Nachr. 61 (1974), 51–67.
- [2] BÖHM, J.: Über die Struktur von Simplexen in  $r$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung unter besonderer Berücksichtigung des elliptischen Falles. Beitr. Alg. Geom. 6 (1977), 105–129.
- [3] BÖHM, J.: Typisierung und Angabe eines Baukastens für Tetraeder in Räumen konstanter Krümmung. Beitr. Alg. Geom. 7 (1978), 25–38.

- [4] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- [5] LENHARD, H.-CHR.: Zerlegung von Tetraedern in Orthogonaltetraeder. *Elem. Math.* 61 (1960), 106—107.
- [6] SCHLÄFLI, L.: Theorie der vielfachen Kontinuität (1852), *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. I, Birkhäuser-Verlag, Basel—Stuttgart 1950, S. 227 ff.

Manuskripteingang: 30. 8. 1977

VERFASSER:

JOHANNES BÖHM, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena