

## Werk

**Titel:** Über verknottete Polygone mit kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln

**Autor:** KRÖTENHEERDT, O.; WILDGRUBE, E.

**Jahr:** 1980

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0009|log16](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0009|log16)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Über verknotete Polygone mit kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln

OTTO KRÖTENHEERDT und ECKHARD WILDGRUBE

### 1. Problemstellung und Resultate

Wir wollen die Frage untersuchen, wieviel Ecken ein geschlossener Polygonzug  $(PZ)$  mindestens besitzen muß, wenn wir verlangen, daß dieser

- a) aus kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln besteht und
- b) im Sinne der Knotentheorie isotop zu einem nichttrivialen Knoten ist.

Ein solcher Polygonzug kann als topologisches Bild einer Kreislinie angesehen werden. Daraus folgt, daß bei einem derartigen Polygonzug Doppelpunkte nicht auftreten dürfen. Der einfachste nichttriviale Knoten ist die sogenannte Kleeblattschlinge. Deshalb ist es naheliegend, wenn wir bei der Konstruktion verknoteter Polygonzüge aus kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln eine Realisierung als Kleeblattschlinge bevorzugen. Von einem trivialen Knoten wird gesprochen, wenn dieser isotop zur Kreislinie ist.

Ein geschlossener Polygonzug  $(PZ)$  mit kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln möge mit  $(PZ)^n$  bezeichnet werden, wobei  $n$  die Anzahl der Ecken bedeutet. Die von uns gestellte Frage ist also die Frage nach dem kleinsten  $n$ , so daß  $(PZ)^n$  keine Doppelpunkte besitzt und verknotet ist. Die kongruenten Strecken sind hier im Sinne der Kongruenzgeometrie zu verstehen; topologische Deformationen der Strecken sind also auszuschließen. Als Winkel meinen wir stets den Winkel zwischen den zwei Strecken an einer Ecke.

Beginnen wir unsere Betrachtungen mit der Eckenanzahl 3. Jeder  $(PZ)^3$  ist doppel­punktfrei und eben und somit nicht verknotet; dabei folgt die Kongruenz der Strecken bereits aus der Kongruenz der Winkel und umgekehrt; die Summe der Winkel­größen beträgt  $180^\circ$ .

Jeder  $(PZ)^4$  ist gleichfalls doppel­punktfrei und unverknotet; denn jeder  $(PZ)^4$  kann isotop in eine Kreislinie deformiert werden (Winkel der Größe  $0^\circ$  sollen hier und im folgenden ausgeschlossen werden). Wenn wir die Größe jedes Winkels mit  $\alpha$  bezeichnen, so gilt in jedem  $(PZ)^4$  für die Summe der Winkelgrößen  $0^\circ < 4 \cdot \alpha \leq 360^\circ$ . Das Gleichheitszeichen gilt offensichtlich nur im Falle eines ebenen  $(PZ)^4$ , d. h. bei einem Quadrat. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß ein geschlossener 4eckiger Polygonzug auch nicht verknotet sein kann, wenn die Kongruenz der Strecken oder die Kongruenz der Winkel nicht gefordert wird.

Jeder  $(PZ)^5$  ist eben. Einen Beweis für diese bemerkenswerte Eigenschaft hat u. a. B. L. VAN DER WAERDEN in [3] gegeben. (Es muß erwähnt werden, daß diese Eigenschaft weder für  $(PZ)^4$  noch für  $(PZ)^n$  mit irgendeinem  $n \geq 6$  zutrifft.) Ein  $(PZ)^5$  ist somit entweder ein konvexes reguläres 5-Eck, bei dem die Summe der Winkelgrößen

$5 \cdot \alpha = 540^\circ$  beträgt, oder ein 5eckiges Sternpolygon, bei dem man als Summe der Winkelgrößen  $5 \cdot \alpha = 180^\circ$  erhält. Das Sternpolygon der Abb. 1b besitzt Doppelpunkte. Das konvexe reguläre 5-Eck ist zwar doppelpunktfrei, aber es ist zur Kreislinie isotop. Also kann ein  $(PZ)^5$  niemals verknotet sein.

Ein geschlossener 5eckiger Polygonzug kann auch nicht verknotet sein, wenn die Forderung nach der Kongruenz der Strecken oder der Kongruenz der Winkel fallengelassen wird. Das folgt aus dem bekannten Satz der Knotentheorie, wonach ein Polygonknoten aus fünf Strecken stets nur ein trivialer Knoten sein kann (vgl. etwa [1], S. 11). Abb. 1c zeigt einen Knoten vom Typ einer Kleeblattschlinge, aber dabei muß mindestens eine Verbindung von aufeinanderfolgenden Punkten als krummlinig zugelassen werden; mit fünf Strecken im Sinne unserer Betrachtungen ist dieser Knotentyp nicht realisierbar.

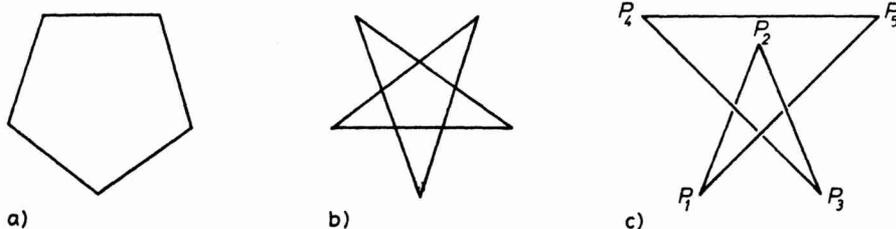


Abb. 1

Wir betrachten nun geschlossene 6eckige Polygonzüge. Zunächst überlegen wir uns, daß verknotete 6eckige Polygonzüge existieren; dazu braucht man nur in Abb. 1c den Zweierstreckenzug  $P_1P_2P_3$  durch einen geeigneten Dreierstreckenzug  $P_1P_2P'_2P_3$  zu ersetzen. Das Ergebnis unserer Untersuchungen über verknotete 6eckige Polygonzüge fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

**Satz 1.** *Es existiert kein verknoteter 6eckiger Polygonzug aus kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln; aber es gibt verknotete 6eckige Polygonzüge aus kongruenten Winkeln, und es gibt auch verknotete 6eckige Polygonzüge aus kongruenten Strecken.*

Über die Existenz eines verknoteten  $(PZ)^7$  kann zur Zeit nichts ausgesagt werden; es ist ein offenes Problem, ob ein solcher existiert oder nicht existiert.

**Satz 2.** *Es existieren verknotete 8eckige Polygonzüge aus kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln.*

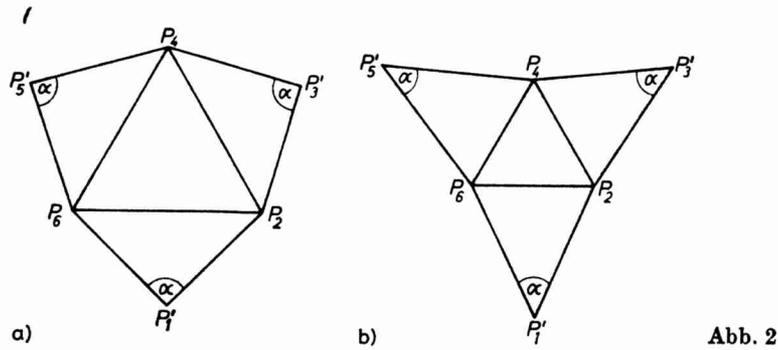
*(Aus den Überlegungen zum Beweis kann leicht gefolgert werden, daß als Winkelgröße  $\alpha$  eine beliebige Größe aus dem offenen Intervall von  $45^\circ$  bis  $\arccos \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{13} - 1) \approx 49,35^\circ$  gewählt werden kann. Ob auch noch für andere Winkelgrößen verknotete  $(PZ)^8$  existieren, bleibt dabei offen.)*

Die Existenz verknoteter  $(PZ)^9$  ist ebenfalls gesichert; einen solchen hat beispielsweise S. VEIT in [2], S. 71–74, beschrieben. In den bekannten Beispielen für verknotete 9eckige Polygonzüge aus kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln kann als Winkelgröße u. a. auch  $\alpha = 90^\circ$  auftreten.

Mit den bekannten Beispielen für verknotete  $(PZ)^9$  bereitet es keine Schwierigkeiten, auch verknotete  $(PZ)^n$  für jedes  $n > 9$  zu konstruieren.

2. Ein Hilfssatz und Beweise der Sätze 1 und 2

Hilfssatz. Gegeben sei ein einfacher Rotationskegel mit der Spitze  $S$ , dem Mantel  $M$  und mit dem von  $S$  ausgehenden Strahl  $s$  als Kegelachse; die Größe des Winkels zwischen  $s$  und jeder Mantellinie, d. h. jedem Strahl, der von  $S$  ausgeht und auf  $M$  liegt, sei  $\varphi$ . Wenn ein ebenfalls von  $S$  ausgehender Strahl  $t$ , der nicht auf der Trägergeraden von  $s$  liegt, mit einer Mantellinie  $m$  einen Winkel der Größe  $\psi$  bildet, gibt es auf  $M$  entweder genau eine weitere Mantellinie  $m'$  oder keine weitere Mantellinie, die mit  $t$  ebenfalls einen Winkel der Größe  $\psi$  bildet; im ersten Fall liegen  $m$  und  $m'$  spiegelbildlich zu der von  $s$  und  $t$  aufgespannten Ebene, und im zweiten Fall liegen  $s, t, m$  in einer Ebene.



Beweis. Wir betrachten die von  $s$  und  $t$  aufgespannte Ebene  $E$ . Wenn  $m$  auch in  $E$  liegt, ist  $m$  diejenige von allen auf  $M$  liegenden Mantellinien, die mit  $s$  entweder den kleinsten oder den größten Winkel bildet. Wenn  $m$  nicht in  $E$  liegt, kann man  $m$  auch als eine Mantellinie eines Rotationskegels um  $t$  mit der Spitze in  $S$  betrachten, und dieser hat mit dem vorgegebenen Kegel außer der gemeinsamen Mantellinie  $m$  noch genau eine weitere Mantellinie  $m'$ , wobei  $m$  und  $m'$  spiegelbildlich zu der durch  $s$  und  $t$  aufgespannten Ebene liegen.

Beweis zu Satz 1. Wir betrachten alle möglichen geschlossenen 6eckigen Polygonzüge mit kongruenten Strecken und kongruenten Winkeln und zeigen, daß von diesen keiner verknottet sein kann. Die Ecken jedes solchen  $(PZ)^6$  mögen von einer beliebigen Ecke beginnend in einer beliebigen Durchlaufrichtung der Reihe nach mit  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  bezeichnet sein. Dabei stellen wir fest, daß wegen der Kongruenz der Strecken und wegen der Kongruenz der Winkel die Dreiecke  $P_1P_3P_5$  und  $P_2P_4P_6$  zwei kongruente gleichseitige Dreiecke sind.

Für die folgenden Untersuchungen denken wir uns das gleichseitige Dreieck  $P_2P_4P_6$  in einer Ebene  $E$  gelegen.  $P_2P_4$  ist Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $P_2P_3P_4$  mit den gleichlangen Schenkeln  $P_2P_3, P_4P_3$ . Entsprechend ist  $P_4P_6$  Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $P_4P_5P_6$ , und  $P_6P_2$  ist Basis des gleichschenkligen Dreiecks  $P_6P_1P_2$ .

Nun betrachten wir zunächst einen ebenen 6eckigen Polygonzug  $P'_1P_2P'_3P_4P'_5P_6P'_1$  mit kongruenten Strecken, bei dem lediglich die Winkel  $\sphericalangle P_6P'_1P_2, \sphericalangle P_2P'_3P_4, \sphericalangle P_4P'_5P_6$  gleiche Größe  $\alpha$  besitzen mögen (vgl. Abb. 2a, b). Durch geeignete Drehungen der Dreiecke  $P_6P'_1P_2, P_2P'_3P_4$  und  $P_4P'_5P_6$  jeweils um ihre Basis kann man

alle paarweise inkongruenten 6eckigen Polygonzüge mit kongruenten Strecken gegebener Länge  $l$  und kongruenten Winkeln gegebener Größe  $\alpha$  erhalten. Die noch nicht fixierten Ecken  $P_1, P_3, P_5$  liegen auf Kreisbahnen orthogonal zu  $E$ , und wie bereits gesagt, müssen diese Ecken ein gleichseitiges Dreieck bilden, welches zum Dreieck  $P_2P_4P_6$  kongruent ist; damit ist also auch die Forderung verbunden, daß die Winkel  $\sphericalangle P_1P_2P_3, \sphericalangle P_3P_4P_5, \sphericalangle P_5P_6P_1$  die gleiche Größe  $\alpha$  besitzen.

Wenn  $(PZ)^6$  verknotet sein soll, dann müssen die drei Ecken  $P_1, P_3, P_5$  im gleichen Halbraum bezüglich  $E$  (wir sagen „über“  $E$ ) liegen; denn andernfalls würde es einen oder mehrere Doppelpunkte geben, oder man könnte einen von den drei Zweierstreckenzügen  $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ ,  $i = 1, 3, 5$ , wobei  $P_0 := P_6$  sein möge, durch die Strecke  $P_{i-1}P_{i+1}$  ersetzen und würde einen geschlossenen verknoteten 6eckigen Polygonzug erhalten, und das wäre ein Widerspruch zur Unmöglichkeit eines solchen. Wir dürfen also unsere weiteren Überlegungen auf solche  $(PZ)^6$  beschränken, bei denen  $P_1, P_3, P_5$  über  $E$  liegen. Nun behaupten wir, von dem gesuchten gleichseitigen Dreieck  $P_1P_3P_5$  liegt mindestens eine Seite parallel zu  $E$  und symmetrisch zu einer Ebene  $S$ , welche auf  $E$  senkrecht steht und gleichzeitig auch Symmetrieebene des Dreiecks  $P_2P_4P_6$  ist. Wäre es anders, so hätten die drei Ecken  $P_1, P_3, P_5$  über  $E$  entweder paarweise unterschiedliche Abstände von  $E$ , oder zwei dieser Ecken hätten zwar gleichen Abstand von  $E$ , aber die Symmetrieebene dieser beiden Ecken wären nicht gleichzeitig auch Symmetrieebene des Dreiecks  $P_2P_4P_6$ . In keinem dieser beiden Fälle könnten aber die drei Winkel  $\sphericalangle P_1P_2P_3, \sphericalangle P_3P_4P_5, \sphericalangle P_5P_6P_1$  gleiche Größe besitzen, weil sich sonst ein Widerspruch zu dem Hilfssatz ergäbe.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die Ecken  $P_3$  und  $P_5$  symmetrisch zu  $S$  liegen. Die Ebene  $S$  geht dann durch  $P_1$  und  $P_4$  und ist auch Symmetrieebene für die Strecke  $P_2P_6$ . Wegen der Kongruenz der gleichseitigen Dreiecke  $P_2P_4P_6$  und  $P_1P_3P_5$  müssen  $P_2, P_3, P_5, P_6$  von  $S$  den gleichen Abstand  $\frac{1}{2} |P_2P_6| = \frac{1}{2} |P_3P_5|$  besitzen.

Es ist nun möglich, daß die Ecken  $P_2, P_3$  (und zwangsweise dann auch die Ecken  $P_5, P_6$ ) in verschiedenen Halbräumen bezüglich  $S$  liegen; für jeden Winkel  $\alpha$  mit  $0^\circ < \alpha < 60^\circ$  gibt es genau zwei solche Polygonzüge, für  $\alpha = 60^\circ$  unendlich viele und für  $\alpha > 60^\circ$  keinen. In jedem solchen Polygonzug  $(PZ)^6$  existiert mindestens ein Doppelpunkt; ein solcher Punkt ist stets der auf  $S$  liegende gemeinsame Mittelpunkt der Strecken  $P_2P_3$  und  $P_5P_6$ . Von derartigen Polygonzügen kann also im Sinne unserer Problemstellung keiner verknotet sein.

Somit bleiben noch die Polygonzüge zu betrachten, bei denen die Ecken  $P_2, P_3$  in einem Halbraum und die Ecken  $P_5, P_6$  im anderen Halbraum bezüglich  $S$  liegen; für jeden Winkel der Größe  $\alpha$  mit  $0^\circ < \alpha < 120^\circ$  gibt es genau zwei solche Polygonzüge, für  $\alpha = 120^\circ$  genau einen und für  $\alpha > 120^\circ$  keinen. Jeder derartige Polygonzug wird durch die Symmetrieebene  $S$  in zwei Dreierstreckenzüge  $P_1P_2P_3P_4, P_4P_5P_6P_1$  zerlegt, die bezüglich  $S$  in verschiedenen Halbräumen liegen, und damit kann auch ein solcher Polygonzug  $(PZ)^6$  nicht verknotet sein.

Einen verknoteten 6eckigen Polygonzug aus kongruenten Winkeln und zwei Sorten kongruenter Strecken erhält man nach dem folgenden Konstruktionsverfahren. Man wählt die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks  $P_1P_3P_5$ , dreht dieses Dreieck um seinen Mittelpunkt um einen Winkel der Größe  $\beta$  mit  $0^\circ < \beta < 60^\circ$  und führt anschließend noch eine Translation orthogonal zur Dreiecksfläche durch. In dem erhaltenen Bild-dreieck  $P'_1P'_3P'_5$  ändern wir die Bezeichnungen durch  $P_4 := P'_1, P_6 := P'_3, P_2 := P'_5$  und erhalten mit  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$  einen verknoteten 6eckigen Polygonzug mit kongruenten Winkeln und zwei Sorten kongruenter Strecken (vgl. Abb. 3a).

Einen verknoteten 6eckigen Polygonzug aus kongruenten Strecken (aber nicht kongruenten Winkeln) erhält man beispielsweise, wenn man entsprechend Abb. 3b

für die Ecken die folgenden Koordinaten wählt:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (-0,45; 0; 0), \\
 P_2 &= (0; y_2; 0) \text{ mit } y_2 = \sqrt{1 - 0,45^2} \approx 0,893, \\
 P_3 &= (0,45; 0; 0) \\
 P_4 &= (x_4; 0,2; -0,1) \text{ mit } x_4 = -\sqrt{1 - 0,2^2 - 0,1^2} + 0,45 \approx -0,525, \\
 P_5 &= (x_5; 0,2; 0,5) \text{ mit } x_5 = \sqrt{1 - 0,6^2} + x_4 \approx 0,275, \\
 P_6 &= (x_6; 0,1; z_6) \text{ mit } x_6 \approx 0,419 \quad \text{und} \quad z_6 \approx -0,485.
 \end{aligned}$$

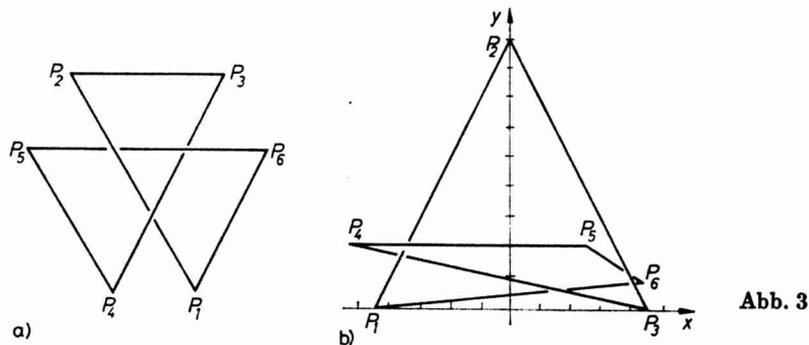


Abb. 3

Bei  $P_6$  erfüllen  $x_6$  und  $z_6$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 (x_6 - x_5)^2 + (z_6 - 0,5)^2 &= 0,99, \\
 (x_6 + 0,45)^2 + (z_6)^2 &= 0,99.
 \end{aligned}$$

Der so konstruierte Polygonzug  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$  ist ein Polygonknoten vom Typ einer Kleeblattschlinge mit sechs kongruenten Strecken der Länge 1.

Beweis zu Satz 2. Motiviert durch ein Modell, wurde der folgende Ansatz entsprechend der Abb. 4 nahegelegt (in Abb. 4 haben wir als Koordinaten der Eckpunkte bereits die Werte gewählt, die sich aus der nachstehenden Rechnung im Sonderfall  $\alpha = 49^\circ$  ergeben). Wir wählen die Ecken

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left(0, -d, \frac{1}{2}\right), \quad P_2 = \left(a, \frac{1}{2}, -b\right), \\
 P_3 &= \left(a, -\frac{1}{2}, -b\right), \quad P_4 = (-c, d, -e), \quad P_5 = (c, d, e), \\
 P_6 &= \left(-a, -\frac{1}{2}, b\right), \quad P_7 = \left(-a, \frac{1}{2}, b\right), \quad P_8 = \left(0, -d, -\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

und betrachten die Vektoren

$$\begin{aligned}
 v(P_1P_2) &= \left(a, \frac{1}{2} + d, -\frac{1}{2} - b\right), \quad v(P_2P_3) = (0, -1, 0), \\
 v(P_3P_4) &= \left(-a - c, \frac{1}{2} + d, b - e\right), \quad v(P_4P_5) = (2c, 0, 2e),
 \end{aligned}$$

$$v(P_5P_6) = \left(-a - c, -\frac{1}{2} - d, b - e\right), \quad v(P_6P_7) = (0, 1, 0),$$

$$v(P_7P_8) = \left(a, -\frac{1}{2} - d, -\frac{1}{2} - b\right), \quad v(P_8P_1) = (0, 0, 1).$$

Nun fragen wir, ob es möglich ist, die Koordinaten  $a, b, c, d, e$  so zu bestimmen, daß der Betrag jedes Vektors gleich 1 und das skalare Produkt jedes Vektors mit dem folgenden Vektor gleich  $-\cos \alpha$  ist; dabei denken wir uns die Aufeinanderfolge der Vektoren im Sinne des Durchlaufens des Polygonzuges  $P_1P_2 \dots P_8P_1$ . Wenn es eine Möglichkeit gibt, die Koordinaten unter den geforderten Bedingungen zu wählen, dann besitzt jede Strecke des Polygonzuges die Länge 1, und der Winkel zwischen je zwei Strecken, die von einer Ecke ausgehen, hat die Größe  $\alpha$ , wobei wir  $\alpha > 0^\circ$  voraussetzen.

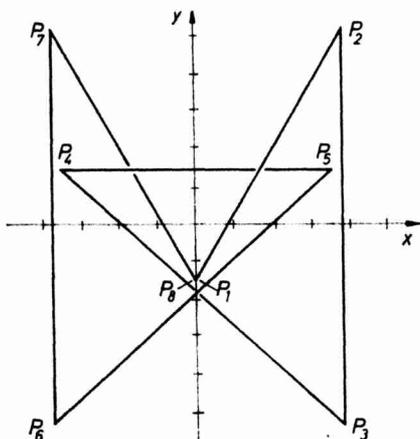


Abb. 4

Das gestellte Ziel kann offensichtlich erreicht werden, wenn es gelingt, die nachfolgenden Gleichungen zu erfüllen:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2} + d\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + b\right)^2 = 1, \quad (1)$$

$$(a + c)^2 + \left(\frac{1}{2} + d\right)^2 + (b - e)^2 = 1, \quad (2)$$

$$4 \cdot c^2 + 4 \cdot e^2 = 1, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} - b = -\cos \alpha, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} - d = -\cos \alpha, \quad (5)$$

$$-2 \cdot c \cdot (a + c) + 2 \cdot e \cdot (b - e) = -\cos \alpha. \quad (6)$$

Aus (4) und (5) folgt

$$b = d = \cos \alpha - \frac{1}{2}.$$

Wir wollen uns auf positive Werte für  $b$  und  $d$  beschränken und wählen deshalb  $\alpha < 60^\circ$ . Aus (1) folgt mit (4) und (5) und bei Beschränkung auf positive  $a$ -Werte für  $45^\circ < \alpha < 60^\circ$

$$a = \sqrt{1 - 2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Aus (6) folgt

$$2ac - 2be + 2 \cdot c^2 + 2 \cdot e^2 = \cos \alpha$$

und daraus mit (3) unter Beachtung von (4)

$$2ac - 2be = b, \quad \text{d. h.} \quad ac - \frac{1}{2} \cdot b = be. \quad (*)$$

Durch Quadrieren und unter nochmaliger Beachtung von (3) erhält man

$$a^2 \cdot c^2 - abc + \frac{1}{4} \cdot b^2 = b^2 \cdot \left( \frac{1}{4} - c^2 \right),$$

d. h.

$$c^2 \cdot (a^2 + b^2) = abc.$$

Da wir  $a > 0$  und  $b > 0$  vorausgesetzt haben, ist auch  $c > 0$ , und es gilt

$$c = a \cdot b : (a^2 + b^2).$$

Mit  $c < 1/2$  und bei Beschränkung auf positive  $e$ -Werte folgt aus (3)

$$e = \sqrt{\frac{1}{4} - c^2}.$$

Damit haben wir  $a, b, c, d, e$  jeweils in Abhängigkeit von  $\alpha$  dargestellt, und es sind die Gleichungen (1), (3), (4), (5), (6) erfüllt. Es ist noch zu überprüfen, ob auch die Gleichung (2) befriedigt wird. Das ist der Fall; denn wenn man von der Gleichung (2) die Gleichung (1) subtrahiert und dann noch (3) beachtet, so erhält man

$$2ac + \frac{1}{4} - 2be - \frac{1}{4} - b = 0, \quad \text{d. h.} \quad 2ac - 2be = b,$$

also eine Übereinstimmung mit (\*), und damit wird auch (2) von  $a, b, c, d, e$  befriedigt.

Nun kommt es darauf an, für  $45^\circ < \alpha < 60^\circ$  eine Winkelgröße  $\alpha$  zu finden, so daß ein verknoteter (PZ)<sup>8</sup> entsteht. Das wird erreicht, wenn man beispielsweise  $\alpha = 49^\circ$  wählt. Denn dann erhält man (bei Berücksichtigung von fünf Stellen nach dem Komma)

$$a \approx 0,37305, \quad b \approx 0,15606, \quad c \approx 0,35601, \quad d \approx 0,15606, \quad e \approx 0,35107.$$

Die Kontrollrechnung mit diesen Näherungswerten ergibt

$$\begin{aligned} &\text{bei (1) den Wert } 0,99999, && \text{bei (4) den Wert } \cos 48,9999^\circ, \\ &\text{bei (2) den Wert } 0,99997, && \text{bei (5) den Wert } \cos 48,9999^\circ, \\ &\text{bei (3) den Wert } 1,00014, && \text{bei (6) den Wert } \cos 48,9956^\circ. \end{aligned}$$

Mit den errechneten Koordinaten entsteht der geschlossene seckige Polygonzug  $P_1P_2 \dots P_6P_1$  der Abb. 4. Die Strecke  $P_3P_4$  liegt offensichtlich „unter“ der Strecke  $P_5P_6$ . Zweifel könnten aber aufkommen, ob die  $y$ -Koordinate  $-d \approx -0,15606$  von

$P_8$  und  $P_1$  wirklich größer ist als die  $y$ -Koordinate  $y_s$  des Schnittpunktes  $S$  der in die  $x, y$ -Ebene projizierten Strecken  $P_3P_4$  und  $P_5P_6$ . Der Wert  $y_s$  errechnet sich aus

$$(d - y_s) : \left(d + \frac{1}{2}\right) = c : (c + a);$$

daraus folgt

$$y_s = d - \frac{c \cdot \left(d + \frac{1}{2}\right)}{a + c} \approx -0,16430, \quad (**)$$

also ein kleinerer Wert als  $-d$ .

Nun überprüfen wir, ob die Strecke  $P_1P_2$  „über“ der Strecke  $P_4P_5$  liegt. Dazu bestimmen wir die  $x$ -Koordinate  $x_s$  des Schnittpunktes der in die  $x, y$ -Ebene projizierten Strecken  $P_1P_2$  und  $P_4P_5$ . Es gilt

$$(a - x_s) : x_s = \left(\frac{1}{2} - d\right) : 2d,$$

d. h.

$$x_s = \frac{2ad}{\frac{1}{2} + d} \approx 0,17747.$$

Wir vergleichen nun an der Stelle  $(x_s, d)$  die  $z$ -Koordinate  $z_1$  der Strecke  $P_1P_2$  mit der  $z$ -Koordinate  $z_2$  der Strecke  $P_4P_5$ . Es gilt

$$\left(\frac{1}{2} - z_1\right) : \left(\frac{1}{2} + b\right) = x_s : a,$$

d. h.

$$z_1 = \frac{1}{2} - x_s \cdot \frac{\frac{1}{2} + b}{a} \approx 0,18789,$$

und es gilt

$$z_2 : e = x_s : c, \quad \text{d. h.} \quad z_2 = x_s \cdot \frac{e}{c} \approx 0,17500.$$

Es ist also  $z_1 > z_2$ , und damit liegt an der Stelle  $(x_s, d)$  die Strecke  $P_1P_2$  tatsächlich „über“ der Strecke  $P_4P_5$ ; und aus Symmetriegründen liegt an der Stelle  $(-x_s, d)$  die Strecke  $P_7P_8$  „unter“ der Strecke  $P_4P_5$ .

Der Polygonzug  $P_1P_2 \dots P_8P_1$  ist also ein verknöteter  $(PZ)^8$ , welcher zur Kleeblattschlinge isotop ist.

Wie man leicht überprüfen kann, entsteht für jede Winkelgröße  $\alpha$  mit  $45^\circ < \alpha < \arccos \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1) \approx 49,35^\circ$  ein verknöteter  $(PZ)^8$  vom Typ einer Kleeblattschlinge. Wenn  $\alpha = \arccos \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1)$  ist, schneiden die Strecken  $P_3P_4$  und  $P_5P_6$  die Strecke  $P_8P_1$ , und für  $\arccos \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1) < \alpha < 60^\circ$  entsteht mit dem vorliegenden Ansatz ein unverknöteter  $(PZ)^8$ . Die Winkelgröße  $\arccos \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1)$  ergibt sich aus (\*\*), wenn  $y_s = -d$  gesetzt wird. Daraus folgt  $c \cdot \left(d + \frac{1}{2}\right) = 2d(a + c)$  und unter Beachtung von  $a, b, c, d$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  nach einigen Zwischenrechnungen

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0, \quad \text{d. h.} \quad (\cos \alpha)_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot \sqrt{13}.$$

LITERATUR

- [1] CROWELL, R. H., and FOX, R. H.: Introduction to Knot theory. Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin 1977.
- [2] VEIT, S.: Zur Theorie massiver Knoten. Dissertation an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg, 1977 (unveröffentlicht).
- [3] VAN DER WAERDEN, B. L.: Ein Satz über räumliche Fünfecke. Elem. Math. 25 (1970), 73—78.

Manuskripteingang: 20. 12. 1977

VERFASSER:

OTTO KRÖTENHEERDT und ECKHARD WILDGRUBE, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg