Beiträge zur Algebra und Geometrie
9 (1980), 161 – 169

Die Homologiegruppen der Mannigfaltigkeit, die aus den linearen k-Räumen auf einer nicht-ausgearteten $2k$-Quadrik besteht

Ott-Heinrich Keller

Wir stellen uns eine nicht-ausgeartete Quadrik Q_{2k} in einem projektiven Raum P_{2k+1} vor. Koordinaten und Koeffizienten entnehmen wir dem Körper der komplexen Zahlen. Man weiß seit sehr langem, daß es auf Q_{2k} zwei Scharen von linearen k-Räumen gibt. Es bedurfte eines längeren Reifungsprozesses im algebraischen Bewußtsein, bis man in einer solchen Schar eine algebraische Varietät erkannte. In [5], § 9, wurde der Versuch gemacht, der jedoch stecken blieb. E. Cartan hat wohl schon 1913 den Zusammenhang dieses Gegenstandes mit der Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen entdeckt (vgl. etwa [2]). Dadurch angeregt, hat W. Burau [1], Kap. IX, eine solche Schar als algebraische Varietät untersucht und ein Modell $M_{(2k)}$ für sie in einem $(2^k - 1)$-Raum beschrieben.
In unseren Überlegungen werden wir dieses Modell nicht benutzen. Aber in seiner Konstruktion sind die wesentlichen Hilfsmittel bereitgelegt, die wir brauchen.
Wir wollen hier versuchen, auf dieser Varietät Geometrie zu treiben, d. h. Untervarietäten zu betrachten, sie zu klassifizieren und ihre Schnittzahlen zu berechnen, analog dem Bezoutschen Satz im projektiven Raum. Nach [5], Kap. 4, Anhang, oder [3], 1.2, können wir singularitätenfreie algebraische Varietäten als topologische Mannigfaltigkeiten auffassen. Die Untervarietäten sind Zyklen darauf. Für ihre Homologiegruppen wollen wir Basen aufstellen und die Schnittzahlen der Basiselemente bestimmen. Die Schnittzahlen aller anderen Varietäten bestimmen sich dann in bekannter Weise.
Wir können dabei topologisch homologe Varietäten nicht unterscheiden. Ob sie dann auch algebraisch äquivalent sind, bedarf einer weiteren Untersuchung.
Hinsichtlich der Dimension müssen wir die algebraische und die topologische Dimension unterscheiden. Die *algebraische Dimension* ist die Anzahl der unabhängigen komplexen Parameter. Die *topologische Dimension* ist doppelt so groß, weil wir jeden Parameter in Real- und Imaginärteil auseinander nehmen müssen.
Die Räume der ersten Schar seien mit S_k^{I}, ihre Varietät mit $\mathfrak{M}_k$ bezeichnet. Unter S_k, T_{k-1}, U_{k-2} seien lineare Räume der angegebenen Dimension auf der Q_{2k} verstanden.

1. Bekannte Sätze über Autokollineationen von Quadriken

Für unsere Überlegungen brauchen wir einige Eigenschaften der Autokollineationen einer quadratischen Form Q_{2k} in $2k + 2$ Unbestimmten. Ihre Gruppe sei mit $\mathcal{O}$ bezeichnet. Die Autokollineationen des Nullstellengebildes $Q_{2k} = 0$ erhalten wir aus $\mathcal{O}$, wenn wir noch die Gruppe der Multiplikationen aller Unbestimmten mit dem gleichen Faktor hinzufügen. Da dies aber bei homogenen Koordinaten keine Rolle spielt, können wir uns mit $\mathcal{O}$ begnügen.

E 11: $\mathcal{O}$ ist isomorph der Gruppe der orthogonalen Matrizen. Denn wählt man ein Polarsimplex von Q_{2k} zum Koordinatensimplex, so erscheint Q_{2k} bei geeigneter Normierung in der Form $\sum_{i=1}^{2k+2} x_i^2$.

E 12: Jede Kollineation von $\mathcal{O}$ hat die Determinante ± 1. Die Kollineationen mit der Determinante $+1$ mögen von erster Art heißen. Sie bilden einen Normalteiler $\mathcal{O}^+$ von $\mathcal{O}$. Die Kollineationen mit der Determinante -1 mögen von zweiter Art heißen. Sie bilden eine Nebengruppe $\mathcal{O}^-$.

E 13: $\mathcal{O}^+$ ist isomorph der Bewegungsgruppe in der nichteuklidischen Geometrie mit Q_{2k} als Fundamentalquadrik. $\mathcal{O}^-$ läßt sich den Umlegungen dieser Geometrie zuordnen.

E 14: Die Kollineationen erster Art transformieren die beiden Scharen von linearen k-Räumen auf Q_{2k} je in sich. Die Kollineationen zweiter Art vertauschen die beiden Scharen.

E 15: Die Kollineationen von $\mathcal{O}^+$ bilden eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Man kann jede in jede andere stetig überführen.

E 16: Für die Behandlung der linearen k-Räume haben sich nun kanonische, von den Polarsystemen verschiedene Koordinatensysteme als zweckmäßig erwiesen. Die Ecken des Koordinatensimplex seien Punkte $A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_k$, die sämtlich auf der Quadrik liegen, und zwar seien A_i und B_i zu allen A_j und B_j ($j \neq i$) konjugiert, A_i zu B_i aber nicht ($i = 0, \ldots, k$). Die Polarhyperebene von A_i sei $x_i = 0$, die von B_i sei $y_i = 0$. Bei geeigneter Normierung lautet dann die Gleichung der Quadrik:

$$\sum_{i=0}^{k} x_i y_i = 0. \tag{1}$$

Es seien nun (A_i, B_i) und (A_i', B_i') ($i = 0, \ldots, k$) zwei kanonische Punktsysteme, die durch eine Kollineation $L \in \mathcal{O}^+$ auseinander hervorgehen. Nach E 15 können wir für $0 \leqq t \leqq 1$ eine Schar $L(t)$ von Kollineationen aus $\mathcal{O}^+$ mit folgenden Eigenschaften zusammenstellen: $L(t)$ führt (A_i, B_i) in ein wieder kanonisches Punktsystem $\big(A_i(t), B_i(t)\big)$ über. $L(t)$ erhält die Form (1) der Quadrik. Es ist $L(0) =$ der identischen Abbildung, $L(1) = L$. Damit ist eine Homotopie der kanonischen Koordinatensysteme gegeben. Da nun bei dieser Homotopie die k-Räume jeder Schar mitgenommen werden, ist auch eine Homotopie auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ der Räume einer Schar induziert.

2. Besondere Typen von Untervarietäten

2.1. *Die Quasigeraden*

Eine solche sei die Gesamtheit aller S_k^{I}, die durch einen festen U_{k-2} gehen. Wir wollen uns eine solche Quasigerade auf zwei Weisen vor Augen stellen:

2.1.1. Es sei D_{k+2} der Polarraum des U_{k-2} hinsichtlich der Q_{2k}. Wir können D_{k+2} aufspannen mit Hilfe von U_{k-2} und einem dazu windschiefen E_3 (der nicht auf Q_{2k} liegt). Dieser Raum E_3 schneidet die Q_{2k} in einer nicht-ausgearteten Quadrik Q_2; und D_{k+2} schneidet Q_{2k} in einer Quadrik, die U_{k-2} als singulären Raum enthält und aus der

Verbindung von U_{k-2} mit Q_2 besteht. Die k-Räume der ersten Schar durch U_{k-2} schneiden auf Q_2 einen Regulus aus. Die Quasigerade besteht also aus den Verbindungsräumen von U_{k-2} mit diesem Regulus und hat die algebraische Dimension 1.

2.1.2. Wir legen durch U_{k-2} einen Raum C_k^{II} der zweiten Schar. Jeder Raum S_k^I durch U_{k-2} schneidet C_k^{II} in einem Raum ungerader Kodimension, also in einem T_{k-1}. Diese Räume bilden ein Büschel $\mathfrak{B}$ mit dem Träger U_{k-2}. Durch jeden T_{k-1} dieses Büschels geht genau ein Raum S_k^I, und dieser gehört der Quasigeraden an. Diese ist also eineindeutig auf dieses Büschel bezogen; sie ist eine rationale Varietät, und ein Büschelparameter λ ist auch für sie ein Parameter.

2.2. *Die Quasilineare*

Als Bausteine brauchen wir eine spezielle Klasse von Varietäten, die wir Quasilineare nennen: Es sei C_k^{II} ein Raum der zweiten Schar auf der Q_{2k}. Wir betrachten die Gesamtheit Π der Räume der ersten Schar, die C_k^{II} höchstdimensional, also je in einem T_{k-1} schneiden. Diese Gesamtheit fassen wir als Varietät auf und nennen sie ein Quasilinear. Im Burauschen Modell wird sie linear. C_k^{II} heiße der *Grundraum* von Π. Somit ist jedem Raum C_k^{II} ein Quasilinear $\gamma(C_k^{II})$ zugeordnet. Uns interessieren die folgenden Eigenschaften:

E 21: Durch jeden Raum $T_{k-1} \in C_k^{II}$ gibt es genau einen S_k^I. Der Polarraum von T_{k-1} in bezug auf die Q_{2k} hat die Dimension $k+1$ und schneidet Q_{2k} in einer Quadrik, für die T_{k-1} singulär ist, die also in zwei lineare Räume zerfällt. Der eine ist C_k^{II}, der andere der gesuchte S_k^I.

E 22: Durch die eineindeutige Abbildung $S_k^I \leftrightarrow T_{k-1}$ ist Π auf den dual-linearen Raum C_k^{II} bezogen. Π hat also die Struktur eines linearen Raumes, daher die Bezeichnung „quasilinear".

E 23: Π hat die Dimension k.

E 24: Jeder Raum ${}^1S_k^I \in \Pi$ wird von jedem anderen Raum ${}^2S_k^I \in \Pi$ je in einem U_{k-2} geschnitten; dabei liegt U_{k-2} in T_{k-1}, dem Schnittraum von ${}^1S_k^I$ und C_k^{II}.
Da ${}^1T_{k-1}$ und ${}^2T_{k-1}$ beide dem k-Raum C_k^{II} angehören, schneiden sie sich in einem U_{k-2}. Durch ihn gehen dann auch ${}^1S_k^I$ und ${}^2S_k^I$. Dies muß dann auch der ganze Schnittraum sein, denn einen Schnittraum höherer Dimension können zwei verschiedene Räume der gleichen Schar nicht haben.

E 25: Man kann Π auch auf folgende Art definieren: Man gehe aus von einem ${}^0S_k^I$ und einem ${}^0T_{k-1} \in {}^0S_k^I$ und betrachte die Gesamtheit Π' aller k-Räume der ersten Schar, die T_{k-1} je in einem U_{k-2} schneiden. Wir haben zu zeigen, daß Π' ein Quasilinear ist.
Es sei ${}^0C_k^{II}$ der eindeutig bestimmte Raum der zweiten Schar, der durch ${}^0T_{k-1}$ hindurchgeht, Π der zugehörige Quasilinear. Es ist ${}^0S_k^I \in \Pi$. Nach E 24 erfüllen alle Räume von Π die Bedingungen, die Π' definieren, und es ist $\Pi \subseteqq \Pi'$. Umgekehrt gehöre ${}^1S_k^I$ zu Π', es sei also ${}^1S_k^I \cap {}^0T_{k-1} = U_{k-2}$. Dieser U_{k-2} kann nicht der vollständige Schnitt eines ${}^1S_k^I$ und eines C_k^{II} sein, also ist $C_k^{II} \cap {}^1S_k^I = T_{k-1}$ und ${}^1S_k^I \in \Pi$ und $\Pi' \subseteqq \Pi$.

E 26: Gehen durch einen U_{k-2} zwei Räume ${}^1S_k^I$ und ${}^2S_k^{II}$ aus Π hindurch, so gehören alle Räume S_k, die durch U_{k-2} gehen, zu Π.
Nach E 24 liegt U_{k-2} auf C_k^{II}. Also schneiden sich ${}^1T_{k-1} = C_k^{II} \cap {}^1S_k^I$ und ${}^2T_{k-1} = C_k^{II} \cap {}^2S_k^I$ in U_{k-2}. Sie spannen in C_k^{II} ein Büschel von Räumen T_{k-1} auf. Jeder Raum S_k, der durch U_{k-2} geht, geht auch durch einen T_{k-1} dieses Büschels und gehört somit zu Π.

E 27: Durch jeden Punkt $A \in C_k^{II}$ gibt es genau einen Raum $S_k^I \in \Pi$.
Denn der Polarraum von A hinsichtlich der Q_{2k} schneidet C_k^{II} in einem T_{k-1}; der Verbindungsraum $S_k^I = AT_{k-1}$ liegt auf Q_{2k}, ist von der ersten Schar und gehört zu Π.

2.3. *Kegel*

Eine Varietät V von Räumen S_k^1 heiße ein *Kegel*, wenn alle Räume von V durch einen festen Punkt A gehen. Er heiße *vollständig*, wenn er aus allen Räumen S_k^1 besteht, die durch A hindurchgehen.
Schneiden wir mit einer Hyperebene (der Dimension $2k$), so erhalten wir eine Varietät von $(k-1)$-Räumen. Sie heiße eine *Leitvarietät* von V. Alle Leitvarietäten eines Kegels sind projektiv äquivalent.

2.4. *Regelvarietäten*

Eine Varietät V von Räumen S_k^1 heiße eine *Regelvarietät*, wenn jeder Raum von V einem Quasilinear angehört, das seinerseits Untervarietät von V ist. Man erkennt sie nach E 25 daran, daß es in jedem $S_k^1 \in V$ einen solchen Raum T_{k-1} gibt, daß alle Räume S_k^1, die T_{k-1} in einem U_{k-2} schneiden, ebenfalls zu V gehören.
Wir sagen, eine Regelvarietät V werde von einer Schar Σ von Quasilinearen *überdeckt*, wenn jedes Element von Σ ganz zu V gehört und wenn jeder Raum von V mindestens in einem Element von Σ liegt. Es kann sein, daß eine Regelvarietät von mehreren solchen Scharen überdeckt wird. Gibt es unter diesen Scharen eine solche, daß die Grundräume aller ihrer Elemente durch einen Punkt B gehen, so heiße die Schar und auch die Regelvarietät *ausgezeichnet*. Diese Grundräume bilden dann einen Kegel; seine Leitvarietät soll auch Leitvarietät der Schar und dann auch von V selbst heißen.
Der Begriff der Regelvarietät entspricht dem der Regelfläche; die Geraden sind dabei durch die Quasilineare ersetzt.
Es sei angemerkt, daß die Begriffe Kegel und Regelvarietät verschiedenen Verallgemeinerungsrichtungen entspringen. Die Kegelspitze ist ein Punkt, kein k-Raum, also kein Element unserer Varietäten. Die Regelvarietät hingegen besteht aus k-Räumen von $\mathfrak{M}_k$, also nicht aus Punkten. Ein Kegel kann niemals eine Regelvarietät sein.

3. Die Projektionsformel

In [4] hatte ich eine Projektionsformel abgeleitet: Es seien $\mathfrak{M}^n$ (in [3] hieß sie $\mathfrak{Q}$), $\mathfrak{Z}^t$, $\mathfrak{R}^r$ geschlossene unzerlegbare, orientierbare topologische Mannigfaltigkeiten. Es sei $\mathfrak{Z}, \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{R} = \emptyset$.
Bei der Projektion wird $\mathfrak{Z}$ das Projektionszentrum, $\mathfrak{R}$ der Projektionsschirm.
Es seien Projektionsstrahlen als topologische Bilder der Einheitsstrecke so definiert, daß es durch jeden Punkt aus $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{R}$ genau einen Projektionsstrahl gibt, der in $\mathfrak{Z}$ beginnt und in $\mathfrak{R}$ endet. Die Vereinigungsmenge aller Projektionsstrahlen, die von einem Punkt $\tau \in \mathfrak{Z}$ ausgehen, sei mit $S(\tau)$ bezeichnet. Wir setzen voraus, daß $S(\tau)$ für jedes τ eine unzerlegbare, geschlossene, orientierbare topologische Mannigfaltigkeit sei. Sie hat die Dimension $n-t$. Wir nennen $S(\tau)$ einen *projizierenden Raum*. Für eine Punktmenge $\bigcup \tau$ sei $S(\bigcup \tau)$ durch $S(\bigcup \tau) = \bigcup S(\tau)$ definiert. Jeder Kette c des zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Kettenkomplexes können wir dann eine Kette $S(c)$ von $\mathfrak{M}$ zuordnen, deren Träger gerade $S(c)$ ist. Wir wollen S als einen Operator auffassen, der auf den Kettenkomplex von $\mathfrak{Z}$ wirkt. Er ist mit dem Randoperator vertauschbar; daher induziert er auf den Homologiegruppen von $\mathfrak{Z}$ einen Operator S_*. Dann gilt die Formel

$$H_k(\mathfrak{M}) = i_* H_k(\mathfrak{R}) + S_*\big(H_{k-n+t}(\mathfrak{Z})\big). \tag{2}$$

Wir bekommen also eine Homologiebasis von $\mathfrak{M}$, wenn wir eine Homologiebasis von $\mathfrak{R}$ und eine Basis von $S_* H_{k-n+t}(\mathfrak{Z})$ aneinanderfügen, und diese letztere bekommen wir wieder, wenn wir auf eine Homologiebasis von $\mathfrak{Z}$ den Operator S anwenden.

Mit Hilfe der Formel (2) wollen wir nun eine Homologiebasis für die Varietät $\mathfrak{M}_k$ der k-Räume der ersten Schar auf einer nicht-singulären Quadrik Q_{2k} in einem projektiven R_{2k+1} aufstellen.
Wie schon in der Einleitung gesagt, können wir $\mathfrak{M}_k$ als topologische Mannigfaltigkeit auffassen. Die Elemente, also die „Punkte" der Topologie sind dabei die k-Räume der ersten Schar.
Wir greifen auf das in E 16 eingeführte Koordinatensystem zurück. Es seien insbesondere A_k und B_k zwei nicht-konjugierte Punkte auf der Q_{2k}; die Polarräume von A_k und B_k schneiden sich in einem $(2k - 1)$-Raum, und dieser schneidet die Q_{2k} in einer nicht-singulären Q_{2k-2}.
Wir wenden nun die Formel (2) auf unsere Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k$ an. Wir orientieren uns dabei an der Konstruktion, mit der W. Burau [1] sein Minimalmodell herstellte. Das *Projektionszentrum* $\mathfrak{Z}$ sei der vollständige Kegel mit der Spitze in A_k, der *Projektionsschirm* $\mathfrak{R}$ der vollständige Kegel mit der Spitze in B_k. Zur Definition der Projektionsstrahlen gehen wir aus von denjenigen Quasigeraden, bei denen der definierende Raum U_{k-2} auf der Q_{2k-2} liegt; wir nennen sie *besondere* Quasigeraden. Von ihnen merken wir drei wichtige Eigenschaften an.

E 31: Geht ein S_k^{I} weder durch A_k noch durch B_k, liegt er also weder im Polarraum von A_k noch in dem von B_k, so schneidet dieser S_k^{I} ihren Schnittraum und damit auch die Q_{2k-2} mindestens in einem U_{k-2}. Angenommen, er schnitte Q_{2k-2} in einem T_{k-1}. Durch T_{k-1} gibt es zwei k-Räume auf der Q_{2k}, nämlich die Verbindungsräume von T_{k-1} mit A_k und B_k. Einer davon müßte unser S_k^{I} sein, entgegen der Voraussetzung. S_k^{I} schneidet also die Q_{2k-2} genau in dem U_{k-2} und gehört der durch U_{k-2} bestimmten Quasigeraden an. Jeder Raum $S_k^{\mathrm{I}} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{R}$ gehört also genau einer besonderen Quasigeraden an.

E 32: Jede Quasigerade trifft $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R}$, d. h., es gibt auf ihr einen S_k^{I} durch A_k und einen durch B_k. Man findet sie, indem man U_{k-2} mit A_k und B_k verbindet und durch jeden der beiden Verbindungsräume den eindeutig bestimmten k-Raum der ersten Schar in Q_k legt.

E 33: Die Vereinigung V der Quasigeraden, die einen bestimmten $S_k^{\mathrm{I}} \in \mathfrak{Z}$ enthalten, ist ein Quasilinear. Denn S_k^{I} schneidet die Q_{2k-2} in einem Raum T_{k-1}. Dann besteht V aus allen S_k, die T_{k-1} in einem U_{k-2} schneiden, ist also nach E 25 ein Quasilinear.
Die Quasigeraden haben fast alle Eigenschaften, die wir von den Projektionsstrahlen gefordert haben, bis auf die eine: sie sind topologisch zweidimensional, während die Projektionsstrahlen Bilder der Einheitsstrecke sein sollten. Wir müssen also in die Quasigeraden noch geeignete Kurven einzeichnen. Dazu denken wir uns die komplexen Werte des Parameters λ einer Quasigeraden auf die Punkte einer Riemannschen Zahlenkugel bezogen. Den Räumen ${}^1S_k^{\mathrm{I}}$ durch A_k und ${}^2S_k^{\mathrm{I}}$ durch B_k mögen dabei die Parameterwerte λ_1 und λ_2 entsprechen. Wir legen nun auf der Kugel alle Kreise durch λ_1 und λ_2. Jeder solche Kreis wird durch λ_1 und λ_2 in zwei Kreisbögen geteilt. Durch jeden von λ_1 und λ_2 verschiedenen Punkt der Kugel gibt es genau einen solchen Kreisbogen. Die Mengen von k-Räumen der ersten Schar, die den Punkten dieser Kreisbögen entsprechen, seien nun die *Projektionsstrahlen.* Sie erfüllen alle in der Definition gegebenen Bedingungen. Sie sind freilich keine algebraischen Varietäten.
Die Vereinigungsmenge aller Projektionsstrahlen, die von einem bestimmten Raum $S_k^{\mathrm{I}} \in \mathfrak{Z}$ ausgehen, überdeckt zunächst jeweils die ganze Quasigerade und dann nach E 33 ein ganzes Quasilinear, also topologisch eine orientierbare, geschlossene, unzerlegbare Mannigfaltigkeit der topologischen Dimension $2k$. Die Voraussetzungen für eine Anwendung der Formel (2) sind also erfüllt.
Eine Homologieklasse von $H_h(\mathfrak{R})$ wird von einer Varietät — einem Zyklus — von $\mathfrak{R}$, also von einem Kegel mit der Spitze in B_k repräsentiert. Ebenso wird eine Homologie-

klasse von $H_{h-2k}(\mathfrak{Z})$ von einem Kegel mit der Spitze in A_k, die vermöge S zugehörige Homologieklasse von $S_*(H_{h-2k}(\mathfrak{Z}))$ von einer Regelvarietät repräsentiert. Diese ist ausgezeichnet, weil die Grundräume zweiter Art aller ihrer Quasilineare durch den Punkt B_k gehen. Wir kennen also die Homologiegruppen von $\mathfrak{M}_k$, wenn wir die von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ kennen.
Um das Folgende besser darstellen zu können, wollen wir in der Formel (2) die Gruppe $H_h(\mathfrak{N})$ durch $H_h(\mathfrak{Z})$ ersetzen. Daß beide Gruppen isomorph sind, ist selbstverständlich, denn die Kegel durch A_k sind denen durch B_k projektiv äquivalent. Jedoch reicht Isomorphie nicht hin, um die Ersetzbarkeit in (2) sicherzustellen, sondern wir müssen ausnützen, daß $i_*H_h(\mathfrak{N})$ und $i_*H_h(\mathfrak{Z})$ identisch sind. Nun gibt es eine Kollineation $L \in \mathcal{O}^+$, die A_k in B_k überführt, und nach E 16 ist L homotop zur identischen Kollineation. Jede Varietät $V \in \mathfrak{Z}$ ist daher ihrem Bild $L(V) \in \mathfrak{N}$ homolog. Da wir ebenso von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{Z}$ schließen können, gilt die behauptete Identität.

4. Die Homologiebasis

Wir haben nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, um durch Induktion und eine Kette von Burau-Projektionen eine Homologiebasis aufzustellen. Wir arbeiten in einem bestimmten kanonischen Koordinatensystem (A_i, B_j).
Für $k = 0$ zerfällt Q_0 in zwei Punkte A_0, B_0. Der einzige 0-Raum S_0 der ersten Schar $\{A_0\}$ enthält A_0 als einzigen Punkt. Die Schar $\mathfrak{M}_0 = \{\{A_0\}\}$ enthält $\{A_0\}$ als einzigen Raum. Die Homologieklasse $\{\{\{A_0\}\}\}$ schließlich enthält $\{\{A_0\}\}$ als einzigen Repräsentanten. Er repräsentiert dann auch das einzige Element der nullten Homologiegruppe und sei mit $F = (\ \ )$, der leeren Klammer bezeichnet. Beim i-ten Schritt arbeiten wir in dem von $A_0, \ldots, A_i$, $B_0, \ldots, B_i$ aufgespannten $(2i + 1)$-Raum. Er schneidet Q_{2k} in einer nicht-ausgearteten Quadrik Q_{2i}. Die i-Räume darauf seien so numeriert, daß der von $A_0, \ldots, A_i$ aufgespannte Raum $(A_0, \ldots, A_i)$ zur ersten Schar gehört. Dann gehört der Raum $(A_0, \ldots, A_{i-1}, B_i)$ zur zweiten Schar. Die Varietät der i-Räume der ersten Schar auf Q_{2i} sei $\mathfrak{M}_i$. Wir zerspalten die Quadrik vermöge der Punkte A_i und B_i. Ihre Polarräume schneiden dann eine Quadrik Q_{2i-2} aus. Für die Q_{2i} setzen wir wieder eine Burau-Projektion an. Das Projektionszentrum sei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_i$. Angenommen, wir hätten schon für die $\mathfrak{M}_{i-1}$ eine Basis aufgestellt. Jedes Basiselement sei durch ein $(i-1)$-Tupel von Zahlen $F = (f_1, \ldots, f_{i-1})$ dargestellt, wobei f_j der Werte 0 und 1 fähig sei. Die Dimension sei

$$\dim F = 2 \sum_j j \cdot f_j. \tag{3}$$

Um nun $H_h(\mathfrak{Z})$ in den Griff zu bekommen, betrachten wir die Zuordnung α, die jedem $(i-1)$-Raum auf Q_{2i-2} seinen Verbindungsraum mit A_i zuordnet. Nun zerfällt die Varietät der $(i-1)$-Räume auf Q_{2i-2} sowie die Varietät der i-Räume auf Q_{2i} durch A_i in je zwei irreduzible Varietäten, eben die beiden Scharen. α wird also der Varietät $\mathfrak{M}_{i-1}$ wieder eine Varietät von i-Räumen zuordnen, die alle der gleichen Schar angehören. Welche das ist, können wir durch Betrachtung eines speziellen Raumes erfahren. Nun ist $\alpha(A_0, \ldots, A_{i-1}) = (A_0, \ldots, A_i)$, und beide sind von der ersten Schar. Also ist $\alpha(\mathfrak{M}_{i-1}) = \mathfrak{Z}_i$ und $H_h(\mathfrak{Z}_i) \cong H_h(\mathfrak{M}_{i-1})$. Ist $F_1, F_2, \ldots$ eine Basis von $H_h(\mathfrak{M}_{i-1})$, so ist $\alpha(F_1), \alpha(F_2), \ldots$ eine Basis von $H_h(\mathfrak{Z}_i)$.
Dem Symbol $F = (f_1, \ldots, f_{i-1})$ wollen wir in $\alpha(F)$ noch eine Zahl $f_i = 0$ hinzufügen. Die Dimension hat sich nicht geändert, und die Formel (3) ist für diesen Fall bestätigt. Betrachten wir nun den Summanden $S_*(H_{h-2i}(\mathfrak{Z}_i))$ in der Formel (2). Es sei $S_k^{\mathrm{I}} \in \mathfrak{Z}_i$, also $A_i \in S_k^{\mathrm{I}}$. Um $S(S_k^{\mathrm{I}})$ zu bestimmen, haben wir S_k^{I} mit Q_{2i-2} in $\alpha^{-1}(S_k^{\mathrm{I}}) = T_{i-1}$ zu schneiden, dann T_{i-1} mit B_i durch einen Raum $C_k^{\mathrm{II}} \underset{\mathrm{def}}{=} \beta(T_{i-1})$ zu verbinden und

schließlich den Quasilinear $\gamma(C_k^{\mathrm{II}})$ gemäß 2.2. zu bilden. Dies können wir, weil C_k^{II} von der zweiten Schar ist. Durch T_{i-1} gehen nämlich zwei i-Räume auf der Q_{2i}, von jeder Schar einer. Da S_k^{I} von der ersten Schar ist, ist C_i^{II} von der zweiten Schar. Der Quasilinear $\gamma C_k^{\mathrm{II}} = \gamma\beta\alpha^{-1}S_k^{\mathrm{I}}$ ist $S(S_i^{\mathrm{I}})$.
Nun beachten wir, daß T_{i-1} ein Raum der ersten Schar von Q_{2i-2} ist. Dann ist $S\alpha = \gamma\beta$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}_{i-1}$ auf $S(\mathfrak{Z}_i)$. Sie induziert einen Isomorphismus $(\gamma\beta)_* H_{h-2i}(\mathfrak{M}_{i-1}) \to S_*(H_{h-2i}(\mathfrak{Z}_i))$. In diesem Isomorphismus entsprechen sich dann auch die Basiselemente. Dem Basiselement $F = (f_1, \ldots, f_{i-1})$ werde bei dieser Entsprechung noch die Zahl $f_i = 1$ hinzugefügt, so daß

$$\gamma\beta(f_1, \ldots, f_{i-1}) = (f_1, \ldots, f_{i-1}, 1)$$

wird. Diese Basiselemente sind Regelvarietäten, und zwar ausgezeichnete, weil alle Grundräume C_k^{II} durch B_i gehen. Die Dimension jedes Basiselementes hat sich dabei um $2i$, um die Dimension der Quasilineare erhöht. Die Formel (3) ist auch in diesem Fall bestätigt. Die Formel (2) besagt, daß wir mit diesen beiden Konstruktionen eine vollständige Basis von $H_k(\mathfrak{M}_i)$ gewonnen haben. Die Basis hängt freilich zunächst noch von der Wahl des Koordinatensystems ab. Wir haben aber in 1., E 16, gesehen, daß kanonische Koordinatensysteme, die durch eine Kollineation aus $\mathcal{O}^+$ auseinander hervorgehen, homotop sind. Daraus folgt, daß Varietäten, die in verschiedenen Koordinatensystemen mit demselben Klammersymbol bezeichnet sind, dieselbe Homologieklasse repräsentieren. Der Beweis dafür, daß verschiedene Klammersymbole nicht-homologe Varietäten bezeichnen, müssen wir noch verschieben.
Wir wollen uns nun die Varietäten noch etwas ansehen, die zu einigen speziellen Klammersymbolen gehören:

1. $(0, 0, \ldots, 0)$ ist die Varietät, die aus einem einzigen Raum besteht.

2. $(1, 1, \ldots, 1)$ ist die ganze Varietät $\mathfrak{M}_k$. Insbesondere ist (1) ein Regulus, d. h. die Gesamtheit der Geraden einer Schar auf einer Q_2.

3. $(0, \ldots, 0, 1)$ ist ein Quasilinear.

4. $(1, \ldots, 1, 0)$ ist ein vollständiger Kegel.

5. $(1, 0, \ldots, 0)$ ist eine Quasigerade, nämlich die Verbindung eines Regulus (1) mit $k-1$ Kegelspitzen, die einen U_{k-2} aufspannen.

Nun noch einiges über die Bettischen Zahlen: Die h-te Bettische Zahl von $H_h(\mathfrak{M}_k)$ sei mit (k, h) bezeichnet. Beachten wir, daß in Formel (2) $n-t$ durch $2k$ zu ersetzen ist, so ergibt Formel (2) die Rekursionsformel

$$(k, h) = (k-1, h) + (k-1, h-2k). \tag{4}$$

Denn es ist $H_h(\mathfrak{M}_{k-1}) = H_h(\mathfrak{T})$ nach Konstruktion; also ist $(k-1, h)$ die h-te Bettische Zahl von $H_h(\mathfrak{Z})$ und $(k-1, h-2k)$ die h-te Bettische Zahl von $S_*(H_{h-2k}(\mathfrak{Z}))$. Dieser Summand wird erst für $h \geqq 2k$ von 0 verschieden. Aus (3) ergibt sich noch $(k, h) = 0$ für ungerades h. Denn für $k = 0$ kommt nur $h = 0$ in Betracht, und zwischendurch kann kein ungerades h in die Induktionskette einsteigen.
Man kann die h-te Bettische Zahl auch erhalten als die Lösungsanzahl der Gleichung $2\sum_j j \cdot f_j = h$ mit Zahlen $f_j = 0$ oder 1.
Der Sinn der Bettischen Zahl ist für unsere Mannigfaltigkeit etwas fraglich, weil ja doch unter einer solchen geometrisch recht verschiedene Varietäten zusammengefaßt sind. Es ist ja nicht ausgemacht, ob eine Linearkombination von ihnen einen geometrischen Sinn hat.

5. Die Schnittzahlen

Da wir in diesem Abschnitt keine topologischen Methoden heranziehen wollen, sei es gestattet, mit algebraischen Dimensionen zu rechnen.

Die Dimension von $\mathfrak{M}_k$ ist $\frac{(k+1)\,k}{2}$. Wir fragen nach der Schnittzahl, d. h. nach der Anzahl gemeinsamer Räume zweier Varietäten der Dimensionen h_1 und h_2. Die Frage hat nur einen Sinn, wenn diese Dimensionen komplementär sind, d. h. sich zu $\frac{(k+1)k}{2}$ ergänzen. Wir ziehen den Satz heran, daß homologe Zyklen (Varietäten) die gleichen Schnittzahlen haben; wir können also die Repräsentanten der Homologieklassen so auswählen, wie es uns zweckmäßig scheint. In Spezialfällen kann die Schnittzahl größer sein, können insbesondere Varietäten zu kleiner Dimension dennoch gemeinsame Räume haben.

Wir fragen zunächst nach den Schnittzahlen der Basisvarietäten.

1. Zwei Kegel, deren Spitzen nicht konjugiert sind, haben keinen Raum gemein.

2. Wir fragen nach gemeinsamen Räumen zweier Regelvarietäten komplementärer Dimension und wollen zeigen, daß es sie im allgemeinen nicht gibt. Dazu genügt es, spezielle Regelvarietäten anzugeben, die keinen Raum gemein haben. Wir wählen zwei Regelvarietäten der Form $S(V_1)$ und $S(V_2)$ der komplementären Dimensionen h_1 und h_2 in einer bestimmten Aufspaltung durch die Punkte A_k und B_k. V_1 und V_2 sind dabei Kegel aus $\mathfrak{Z}$, deren Räume also durch A_k gehen. Angenommen, es gäbe einen gemeinsamen Raum von $S(V_1)$ und $S(V_2)$. Er schnitte die Polarhyperebene von B_k in einem $(k-1)$-Raum, und diesen könnten wir mit B_k durch einen Raum C_k^{II} verbinden. Dann gehörte das durch C_k^{II} bestimmte Quasilinear zu $S(V_1)$ und zu $S(V_2)$. Darin gäbe es einen k-Raum ${}^2S_k^{\mathrm{I}}$ durch A_k, und dieser gehörte jetzt zu V_1 und zu V_2, wir brauchen jetzt bloß noch zu zeigen, daß V_1 und V_2 im allgemeinen keinen Raum gemein haben. Dazu schneiden wir die Figur mit der Polarhyperebene von B_k in dem $(k-1)$-Raum ${}^2T_{k-1}$ und den Varietäten V_1' und V_2'. Sie liegen auf Q_{2k-2} und gehören zu $\mathfrak{M}_{k-1}$. Über V_1' und V_2' ist jetzt nichts mehr vorausgesetzt. Sie haben aber die Dimensionen h_1-k und h_2-k, und diese sind nicht mehr komplementär, sondern zu klein, und die Varietäten V_1' und V_2' sowie V_1 und V_2 sowie $S(V_1)$ und $S(V_2)$ haben im allgemeinen keinen Raum gemein.

3. Es bleibt noch zu untersuchen, wann ein Kegel und eine Regelvarietät komplementärer Dimension einen Raum gemein haben. Wieder wählen wir den Kegel K in $\mathfrak{Z}$, also mit der Spitze in A_k und die Regelvarietät als $S(V)$ mit $V \in \mathfrak{Z}$ mit den Dimensionen h_1 und h_2 und fragen nach einem gemeinsamen Raum ${}^1S_k^{\mathrm{I}}$. Wieder schneiden wir die Figur mit der Polarhyperebene von B_k in dem $(k-1)$-Raum ${}^1T_{k-1}$ und den Varietäten K' und V' aus $\mathfrak{M}_{k-1}$. Die Dimensionen von K' und V' sind jetzt h_1 und h_2-k, also wieder komplementär. K und $S(V)$ haben dann und nur dann einen Raum gemein, wenn K' und V' einen Raum gemein haben. Damit haben wir die Frage also um eine Dimension zurückgeschoben.

Wir behaupten nun: Die Schnittzahl $\varnothing(F, G)$ zweier Basisvarietäten $F=(f_1,\ldots,f_k)$ und $G=(g_1,\ldots,g_k)$ ist genau dann 1, wenn $f_i+g_i=1$ ist für alle i; sonst ist sie 0.

Für $k=0$ ist der Satz richtig; denn die einzige Basisvarietät $\{\{A_0\}\}$ hat mit sich selbst komplementäre Dimension, erfüllt trivialerweise die Voraussetzung und hat die Schnittzahl 1 mit sich selbst.

Angenommen, der Satz sei für $k-1$ bewiesen. Aus den Überlegungen 1., 2., 3. folgt dann, daß die Schnittzahl dann und nur dann nicht 0 ist, wenn $f_k+g_k=1$ ist und wenn die Leitvarietäten $(f_1,\ldots,f_{k-1})$ und $(g_1,\ldots,g_{k-1})$ die Schnittzahl 1 haben.

Wir benutzen jetzt die Abkürzung F für $(f_1, \ldots, f_k)$ und F' für $(1 - f_1, \ldots, 1 - f_k)$. Eine beliebige Varietät ist dann $V \sim \sum_F \alpha_F F$ $(\alpha_F \in Z)$. Zwei Varietäten $V \sim \sum_F \alpha_F F$ und $W \sim \sum_G \beta_G G$ haben dann die Schnittzahl $\sum_F \alpha_F \beta_{F'}$, nämlich

$$\varnothing(V, W) = \varnothing\Big(\sum_F \alpha_F F, \sum_G \beta_G G\Big) = \sum_{F,G} \alpha_F \beta_G \;\varnothing(F, G) = \sum_F \alpha_F \beta_{F'}.$$

6. Der Sonderfall $k = 3$

Wir wollen uns noch die Varietät der 3-Räume auf einer Q_6 ansehen. Bekanntlich ist das Burausche Minimalmodell $M_{(6)}$ eine Quadrik. Die Bettischen Zahlen von $\mathfrak{M}_3$ und dann auch für $M_{(6)}$ sind: 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, wie es ja auch nach VAN DER WAERDEN [6] sein muß. Auf $M_{(6)}$ gibt es zwei Scharen von 3-Räumen. Der einen entspricht auf $\mathfrak{M}_3$ die Varietät der vollständigen Kegel mit dem Symbol (1, 1, 0), der anderen die Varietät der quasilinearen Räume mit dem Symbol (0, 0, 1).
Nun sind Q_6 und $M_{(6)}$ nicht-ausgeartete Quadriken und als solche projektiv äquivalent. Die Versuchung liegt nahe, eine bestimmte projektive Beziehung auszuzeichnen und mit ihrer Hilfe Q_6 und $M_{(6)}$ zu identifizieren. Gibt man dieser Versuchung nach, so erhält man Mengen, die sich selbst als Element enthalten oder nicht enthalten. Ein Raum S_3^1 auf $M_{(6)}$ entspricht ja einer Menge von Räumen S_3^1 auf der Q_6.

LITERATUR

[1] BURAU, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

[2] CARTAN, E.: The Theory of Spinors, Herman, Paris 1967.

[3] KELLER, O.-H.: Vorlesungen über algebraische Geometrie. BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974.

[4] KELLER, O.-H.: Bestimmung von Homologiebasen durch Projektion. Math. Nachr. *45* (1970), 295–306.

[5] VAN DER WAERDEN, B. L.: Einführung in die algebraische Geometrie, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1973.

[6] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen in der Liniengeometrie. Math. Ann. *109* (1933), 7–12.

Manuskripteingang: 20. 12. 1977

VERFASSER:

OTT-HEINRICH KELLER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg