

Werk

Titel: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit ei...

Autor: STAMMLEB, L.; MATTE, Ü.

Jahr: 1980

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0009|log14

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval

LUDWIG STAMMLER und UDO MATTE

1. Motivierung der Fragestellungen, Zusammenstellung der Ergebnisse

In der Arbeit [2] wurde zur Untersuchung der symmetrischen Differenz von *Ovalen* (ebenen, beschränkten, abgeschlossenen konvexen Punktfolgen mit inneren Punkten) folgender Weg eingeschlagen: Die Randkurve c eines Ovals M hat in einem φ, r -Polarkoordinatensystem (Anfangspunkt Z sei ein innerer Punkt von M) eine Gleichung

$$r = \varrho(\varphi) \quad (1)$$

mit 2π -periodischer, überall positiver und überall (mindestens) einseitig differenzierbarer Funktion $\varrho(\varphi)$. Ebenso hat die Randkurve $k(1)$ eines Ovals $K(1)$, das gleichfalls Z als inneren Punkt besitzt, eine Gleichung

$$r = \sigma(\varphi) \quad (2)$$

mit denselben Eigenschaften für $\sigma(\varphi)$. Daher läßt sich

$$t = t(\varphi) := \int_0^{\varphi} \sigma(v)^2 dv \quad (\varphi \in [0, 2\pi]) \quad (3)$$

umkehren zu einer im t -Intervall $[0, T]$ ($T := t(2\pi)$) definierten Funktion $\varphi = \varphi(t)$ mit überall positiver Ableitung, und die Kurve c erhält die Parameterdarstellung

$$\varphi = \varphi(t), \quad r = \varrho(\varphi(t)) \quad (t \in [0, T]); \quad (4)$$

ferner erhält jeweils die durch Streckung mit dem Zentrum Z und einem Streckfaktor $s > 0$ aus $k(1)$ entstehende Kurve $k(s)$ (= Randkurve des aus $K(1)$ entstehenden Ovals $K(s)$) die Parameterdarstellung

$$\varphi = \varphi(t), \quad r = s\varrho(\varphi(t)) \quad (t \in [0, T]). \quad (5)$$

In [2] wurde nun als Funktion $\alpha(s)$ (in [2] mit $m(s)$ bezeichnet) das Maß der Menge $A(s)$ aller derjenigen $t \in [0, T]$ betrachtet, für die der Punkt (5) der Kurve $k(s)$ außerhalb M liegt. (Abb. 1 und 2 zeigen die aus (3) resultierende geometrische Bedeutung von $\alpha(s)$ als doppelten Flächeninhalt sektorförmiger Mengen für zwei Exemplare $K(s_1), K(s_2)$ der Ovalenschar aller $K(s)$, die das Oval M schneidet.) Definiert man hiernach

$$f(t) := \frac{\varrho(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))} \quad (t \in [0, T]), \quad (6)$$

so ist

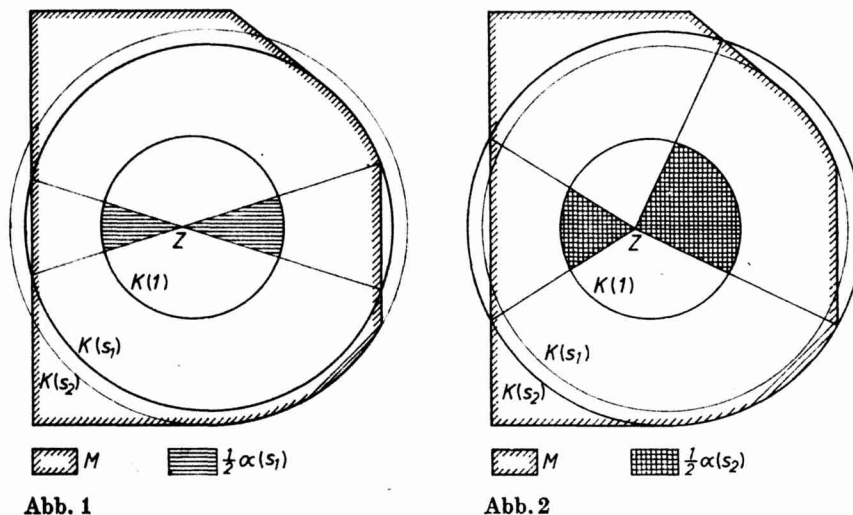
$$A(s) = \{t \in [0, T]: f(t) < s\}. \tag{7}$$

Aus (7) und der Stetigkeit von $f(t)$ wurden in [2] Monotonieaussagen über $\alpha(s)$ erhalten und zur Diskussion der symmetrischen Differenz $(M \cup K(s)) \setminus (M \cap K(s))$ verwendet. Insbesondere ergab sich für minimalen Flächeninhalt der symmetrischen Differenz ein notwendiges und hinreichendes *Halbierungskriterium*; dieses war so definiert, daß es genau dann von einer Zahl s^* erfüllt wird, wenn die Schlüsse

$$s < s^* \Rightarrow \alpha(s) < \frac{1}{2} T, \tag{8}$$

$$s > s^* \Rightarrow \alpha(s) \geq \frac{1}{2} T \tag{9}$$

gelten. (In Abb. 1 und 2 erfüllt s_2 diese Bedingungen, dagegen wird (9) von s_1 nicht erfüllt.)



Ein solches Kriterium vereinfacht sich nun offensichtlich, sobald die Funktion $\alpha(s)$ selbst wieder stetig ist, wie dies etwa im „elementargeometrischen Fall“ (M Polygon, $K(s)$ Kreise) zutrifft. (In Abb. 1 und 2 ist $\alpha(s)$ bei s_1 und s_2 unstetig.) Daher ist es von Interesse, genauere *Bedingungen für Stetigkeitsaussagen über $\alpha(s)$* zu kennen, wobei für die Funktion $f(t)$, die man gemäß (7) der Definition von $\alpha(s)$ zugrunde legt, gerade solche Eigenschaften als Voraussetzung herangezogen werden sollen, die in Zusammenhang mit der obigen Beschreibung bedeutsam sind. So wollen wir schrittweise von der bloßen Voraussetzung der Stetigkeit von $f(t)$, aus der sich zunächst nur ein allgemeiner Rahmen für die weiteren Schritte ergibt, dann immer genauer zur Klasse derjenigen Funktionen übergehen, die man speziell auf dem Wege (1)–(6) erhält. In diesem Sinne vorbereitend (also für sich selbst noch nicht mit dem Anspruch auf besonderes Interesse oder Neuartigkeit), seien zunächst die folgenden Sätze 1 und 2 genannt, für die wir in Abschnitt 2 vollständigshalber kurz Beweise anführen:

Satz 1. *Ist $f(t)$ eine in einem Intervall $[0, T]$ ($T > 0$) stetige Funktion, so ist die als Maß $\alpha(s)$ der Menge (7) definierte Funktion an jeder Stelle s_0 unterhalbstetig.*

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen gilt: Genau dann ist $\alpha(s)$ an einer Stelle s_0 oberhalbstetig (also stetig), wenn die Menge*

$$G(s_0) := \{t \in [0, T]: f(t) = s_0\}$$

das Maß 0 hat.

In diesem Rahmen bietet sich die — z. B. wiederum im „elementargeometrischen Fall“ stets erfüllte — zusätzliche Voraussetzung an, daß die Funktion $f(t)$ in keinem Teilintervall von $[0, T]$ konstant sei. Wie der folgende Satz 3 zeigen wird, ist das Hinzufügen dieser Voraussetzung zur Stetigkeit von $f(t)$ nicht hinreichend für die Stetigkeit von $\alpha(s)$, und zwar wird diese Feststellung (an sich ebenfalls noch vom Vorbereitungs- oder Rahmencharakter der Sätze 1, 2) in Satz 3 durch Gegenbeispiele sogar unter weitergehenden „geometrischen“ Voraussetzungen erbracht. Welcher Art solche hier interessierenden Voraussetzungen sein können, sei zuvor am Beispiel ganz einfacher Aussagen demonstriert: Offenbar gestattet Satz 2 nämlich die

Folgerungen. *Ist $f(t)$ in $[0, T]$ stetig, in keinem Teilintervall von $[0, T]$ konstant und*

- (a) *monoton oder*
 - (b) *von unten oder von oben konvex,*
- so ist $\alpha(s)$ stetig.*

Dabei heißt $f(t)$ von unten bzw. von oben konvex, wenn für alle $t_1 < \tau < t_2$ die durch $g(t_i) = f(t_i)$ ($i = 1, 2$) festgelegte lineare Funktion $g(t)$ die Eigenschaft $f(\tau) \leq g(\tau)$ bzw. $f(\tau) \geq g(\tau)$ hat. In der Tat folgt ja aus (a) der Monotonie bzw. (b) der so definierten Konvexität zusammen mit der Stetigkeit und der Voraussetzung des in keinem Teilintervall konstanten Verlaufs, daß für jedes s_0 höchstens ein bzw. höchstens zwei verschiedene t mit $f(t) = s_0$ existieren.

Diese Voraussetzungen, insbesondere die Konvexität, erinnern bereits an die „geometrische“ Kennzeichnung von Funktionen, die vermittels (1)–(6) aus Ovalen zu erhalten sind. Etwas mehr nähert man sich diesem Motiv an, wenn man nun von einer Funktion $f(t)$ die Eigenschaft voraussetzt, daß durch

$$r = f(\varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi]; f(0) = f(2\pi); \text{ alle } f(\varphi) > 0) \tag{10}$$

in einem φ, r -Polarkoordinatensystem die Randkurve eines Ovals gegeben werde. Man könnte Funktionen mit dieser Eigenschaft etwa *polarkonvex* nennen. Hierfür zeigen wir nun aber in Abschnitt 3, daß im Unterschied zu Folgerung (b) eine negative Aussage gilt:

Satz 3. *Es gibt Ovale mit Randkurven (10), wobei $f(t)$ in keinem Teilintervall von $[0, T]$ ($T := 2\pi$) konstant ist und wobei das Maß $\alpha(s)$ der Menge (7) eine unstetige Funktion von s ist.*

Noch genauer entspricht es dem obengenannten geometrischen Vorgehen, $f(t)$ nicht durch (10), sondern (aus Ovalen $M, K(1)$ mit Z als gemeinsamen inneren Punkt) durch (1), (2) und

$$f(\varphi) := \frac{\varrho(\varphi)}{\sigma(\varphi)} \quad (\varphi \in [0, 2\pi]) \tag{11}$$

zu definieren, also als *Quotient polarkonvexer Funktionen*. Hierfür erhält man aus Satz 3 sogleich auch die

Folgerung. *Es gibt Ovale mit Randkurven (1), (2) so, daß auch die Funktion (11) die in Satz 3 genannten Eigenschaften hat.*

Zum Beweis braucht man nur als $\varrho(\varphi)$ ein $f(\varphi)$ aus Satz 3 selbst zu nehmen und konstant $\sigma(\varphi) = 1$ zu setzen.

Schließlich kann man dasselbe nun auch genau in den Formeln (1)–(6) tun, wodurch eine entsprechende Folgerung für Funktionen (6) entsteht, die als *Quotient aus polarkonvexen $\varrho(\varphi)$ und $\sigma(\varphi)$ nach Übergang zum doppelten Flächeninhalt (3) als Parameter t* definiert sind. In dem hier herangezogenen Beispiel $\sigma(\varphi) = 1$ ist nämlich einfach $t = \varphi$.

Da allgemein in die Definition der Eigenschaft von $f(t)$, nach Wahl einer Transformation $t = t(\varphi)$, $\varphi = \varphi(t)$ sich vermöge (6) durch polarkonvexe $\varrho(\varphi)$, $\sigma(\varphi)$ darstellen zu lassen, eben diese Parameterwahl eingeht, so sind die vorliegenden Feststellungen noch abzurunden durch die Frage, in welcher Weise die Stetigkeit von $\alpha(s)$ allgemein durch einen derartigen Wechsel der in $f(t)$ auftretenden unabhängigen Variablen t beeinflußt wird. Man bildet also unter Verwendung einer in $[0, T]$ definierten Funktion $u = u(t)$, zu der die Existenz der Umkehrfunktion

$$t = t(u) \quad (u \in [V, W]; V := u(0), W := u(T)) \quad (12)$$

vorausgesetzt wird, aus $f(t)$ die neue Funktion

$$h(u) := f(t(u)) \quad (u \in [V, W]) \quad (13)$$

und betrachtet außer dem Maß $\alpha(s)$ der Menge (7) noch das Maß $\vartheta(s)$ der Menge

$$R(s) := \{u \in [V, W]: h(u) < s\}. \quad (14)$$

Hierzu zeigen wir in Abschnitt 4 zwei Aussagen, eine negative (Satz 4) wieder mehr vorbereitend als allgemeinen Rahmen und eine positive (Satz 5), die insbesondere dann anwendbar ist, wenn man für (12) die geometrisch motivierte Parametertransformation (3) wählt (Zusatz 1):

Satz 4. *Es gibt stetige, in keinem Teilintervall konstante Funktionen $f(t)$ und streng monotone stetige Funktionen $u = u(t)$ so, daß die als Maß von (7) definierte Funktion $\alpha(s)$ unstetig, aber die nach (12), (13) als Maß von (14) definierte Funktion $\vartheta(s)$ stetig ist.*

Natürlich gibt es dann auch Beispiele mit vertauschten Prädikaten „stetig“, „unstetig“ bei α und ϑ .

Satz 5. *Erfüllt eine streng monotone stetige Funktion $u = u(t)$ überdies eine Lipschitz-Bedingung, so gilt (für beliebige stetige Funktionen $f(t)$): Ist $\alpha(s)$ stetig, so ist auch $\vartheta(s)$ stetig.*

Zusatz 1. *Satz 5 ist sowohl auf Transformationen (3) als auch auf ihre Umkehrung $\varphi = \varphi(t)$ anwendbar.*

Dieser Zusatz folgt daraus, daß $t(\varphi)$ in (3) die in $[0, 2\pi]$ stetige und überall positive, also zwischen zwei positive Schranken einschließbare Ableitung $\sigma(\varphi)^2$ besitzt. Es gilt auch ein analoger

Zusatz 2. *Satz 5 ist auch auf den Übergang vom Winkel φ zur Bogenlänge von $k(1)$ als Parameter und auf den umgekehrten Übergang anwendbar.*

Es genüge, einen möglichen Beweisweg zu skizzieren: In Anlehnung an die bei (schlechthin) differenzierbarem $\sigma(\varphi)$ gültige Formel

$$\int_0^\varphi \sqrt{(\sigma(v) dv)^2 + (d\sigma(v))^2} \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

für die Bogenlänge ist zu ersehen, wie man (erstens Sehnenzüge des Ovalrandes $k(1)$ nach oben abschätzt und damit die Bogenlänge als existent nachweist sowie zweitens) den Differenzenquotient der Bogenlänge nach oben und unten abschätzt, wenn man außer der oberen und der positiven unteren Schranke für $\sigma(\varphi)$ auch die Beschränktheit der einseitigen Ableitungen zur Verfügung hat. Wäre aber eine der einseitigen Ableitungen unbeschränkt, so gäbe es auch eine konvergente Punktfolge auf $k(1)$ mit unbeschränkten Werten dieser Ableitung, und man erhielte den Widerspruch, daß $K(1)$ Stützgeraden mit beliebig kleinem Abstand von Z besäße.

Die hier behandelten Stetigkeitsfragen stehen, wie sich vor allem nach Satz 2 ergeben wird, in Beziehung zu einem weiteren Aspekt aus [2], auf den wir abschließend eingehen wollen. Es seien M, K irgend zwei Ovale. Jedem Punkt Z aus dem Inneren J von $M \cap K$ werde diejenige Schar (5) mit Z als Streckzentrum (und als Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems) zugeordnet, die K enthält; nach Wahl eines Exemplars dieser Schar als $K(1)$ sei etwa

$$K(s^*) = K. \quad (15)$$

Die hiermit von (M, K) und Z gemäß (1)–(7) abhängende Funktion $\alpha(s)$ ist, je nach der Wahl von $K(1)$, bis auf einen positiven Faktor λ eindeutig bestimmt. Der Wert $\alpha(s^*)$ ist bis auf diesen Faktor λ (oder auch einfach bei der Wahl von K als $K(1)$, also $s^* = 1$) der doppelte Flächeninhalt derjenigen sektorförmigen Menge, die durch Vereinigung aller Verbindungsstrecken von Z mit den außerhalb M liegenden Punkten des Randes k von K entsteht. Analog ist das in Satz 2 (für $s_0 = s^*$) auftretende Maß von $G(s^*)$ der doppelte Flächeninhalt der Vereinigungsmenge aller Verbindungsstrecken von Z mit den Punkten auf $c \cap k$. Nach Satz 2 und Satz 5 (sowie dessen Zusätzen) sind hierfür folgende Aussagen (i)–(v) einander äquivalent:

- (i) Das Maß von $G(s^*)$ ist gleich Null.
- (ii) Die Funktion $\alpha(s)$ ist an der Stelle s^* stetig.
- (iii) Die Punktmenge $c \cap k$, eindimensional gemessen mit dem Winkelmaß φ bezüglich des Scheitels Z , hat das Maß Null.
- (iv) Die Punktmenge $c \cap k$, gemessen mit der Bogenlänge auf k , hat das Maß Null.
- (v) Die Aussagen (i)–(iii) gelten bezüglich irgendeines anderen Punktes $Z \in J$.

In [2] wurde nun definiert: Hat ein Punkt $Z \in J$ die Eigenschaft, daß die ihm (bis auf den Faktor λ eindeutig) zugeordnete Funktion $\alpha(s)$ für den Wert s^* mit (15) die Halbierungsbedingung (8), (9) erfüllt, so heißt Z ein *Halbierungszentrum* von K bezüglich M . (In Abb. 1 und 2 ist Z bezüglich M Halbierungszentrum von $K(s_2)$, aber nicht von $K(s_1)$.) Sodann wurde in [2] gezeigt: Besteht $c \cap k$ nur aus endlich vielen Punkten, so ist die Menge aller Halbierungszentren der Durchschnitt von J mit einer linearen Mannigfaltigkeit. Diese Aussage verallgemeinern wir in Abschnitt 5 zu folgendem

Satz 6. *Erfüllen Ovale M, K die Stetigkeitsbedingungen (i)–(v), so ist die Menge H aller Halbierungszentren von K bezüglich M der Durchschnitt $J \cap L$ von J (= Inneres von $M \cap K$) mit einer linearen Mannigfaltigkeit L .*

Wie der Beweis — auch [2] präzisierend — ergeben wird, scheiden für L sogar noch die in J gelegenen Punkte (nulldimensionalen Mannigfaltigkeiten) aus, d. h., es gilt der

Zusatz. *Die Menge H in Satz 6 ist stets entweder gleich J oder gleich einer J durchquerenden Strecke oder leer.*

Auch für den Fall, daß die Bedingungen (i)–(v) nicht (notwendig) erfüllt sind, werden wir H beschreiben:

Satz 7. Sind M, K beliebige Ovale, so ist die Menge H aller Halbierungszentren von K bezüglich M der Durchschnitt $J \cap Y$ von J (= Inneres von $M \cap K$) mit einer konvexen Winkelfläche Y (Durchschnitt zweier abgeschlossener Halbebenen), die auch leer, zur Geraden oder zum Parallelstreifen entartet sein kann, und die, wenn keiner dieser Entartungsfälle vorliegt, ihren Scheitel außerhalb J hat.

Insbesondere wird sich zeigen:

Zusatz. Die Entartung von Y zur (nicht von J disjunkten) Geraden ist nur möglich, wenn (i)–(v) gelten.

Darüber hinaus jedoch kann man beim Vergleich von Satz 6 und Satz 7 (durch Betrachtung geeigneter Beispiele) erkennen, daß und in welcher Weise Satz 6 nicht umkehrbar ist: Wenn entweder $H = \emptyset$ oder $H = J$ gilt, so könnte sowohl der Fall des Satzes 6 als auch der des Satzes 7 mit nichtverschwindendem Maß von $G(s^*)$ vorliegen.

2. Unterhalbstetigkeit und Bedingung für Stetigkeit von α

Beweis zu Satz 1. Es seien s_0 und $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist die Existenz von $\delta > 0$ mit

$$|s - s_0| < \delta \Rightarrow \alpha(s) > \alpha(s_0) - \varepsilon. \quad (16)$$

Als offene Menge ist $A(s_0)$ die Vereinigungsmenge abzählbar vieler disjunkter offener Intervalle $E_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ ($a_\nu < b_\nu$; ν durchläuft eine abzählbare Indexmenge I). Für die Längen $e_\nu = b_\nu - a_\nu$ der E_ν gilt

$$\sum_{\nu \in I} e_\nu \leq T,$$

also gibt es eine endliche Untermenge $\Delta \subseteq I$ mit

$$\sum_{\nu \in \Delta} e_\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Hier wie im folgenden werden durch die Festsetzung, eine Summe bzw. Vereinigungsmenge über die leere Indexmenge sei 0 bzw. \emptyset , auch die einschlägigen Sonderfälle mit erfaßt.) Sodann gibt es ein n größer als die Mächtigkeit $|\Delta|$ von Δ und eine positive

Zahl η , die kleiner als $\frac{\varepsilon}{4n}$ und als alle $\frac{e_\nu}{2}$ ($\nu \in \Delta$) ist. In jedem der Intervalle $[a_\nu + \eta, b_\nu - \eta]$ ($\nu \in \Delta$) hat $f(t)$ ein Maximum p_ν , das (wie alle Funktionswerte in den E_ν) kleiner als s_0 ist. Also gibt es ein $\delta > 0$ so, daß $p_\nu < s_0 - \delta$ für alle $\nu \in \Delta$ gilt.

Ist nun s mit $|s - s_0| < \delta$ beliebig, so gilt (mindestens) für alle $t \in [a_\nu + \eta, b_\nu - \eta]$ ($\nu \in \Delta$) die Ungleichung $f(t) \leq p_\nu < s_0 - \delta < s$, also ist

$$\bigcup_{\nu \in \Delta} [a_\nu + \eta, b_\nu - \eta] \subseteq A(s)$$

und daher

$$\sum_{\nu \in \Delta} (e_\nu - 2\eta) \leq \alpha(s).$$

Daraus folgt

$$\alpha(s_0) = \sum_{v \in \Delta} (e_v - 2\eta) + |\Delta| \cdot 2\eta + \sum_{v \in \Gamma \setminus \Delta} e_v < \alpha(s) + \varepsilon,$$

also die Behauptung (16).

Beweis zu Satz 2. Hat $G(s_0)$ ein Maß $\gamma > 0$, so gilt für jedes $s > s_0$ bereits $\alpha(s) \geq \alpha(s_0) + \gamma$. Daher ist $\alpha(s)$ an der Stelle s_0 nicht oberhalbstetig.

Hat dagegen $G(s_0)$ das Maß 0, so betrachten wir für jedes s auch das Maß $\beta(s)$ der Menge

$$B(s) := \{t \in [0, T]: f(t) > s\}.$$

Es folgt dann $\beta(s_0) = T - \alpha(s_0)$; ferner ergibt Satz 1, angewandt auf $(-f(t))$ und $(-s_0)$ statt $f(t)$ bzw. s_0 , den Schluß: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß für alle $|s - s_0| < \delta$ die Ungleichung $\beta(s) > \beta(s_0) - \varepsilon = T - \alpha(s_0) - \varepsilon$ gilt, woraus dann $\alpha(s) \leq T - \beta(s) < \alpha(s_0) + \varepsilon$ folgt. Daher ist $\alpha(s)$ an der Stelle s_0 oberhalbstetig.

3. Ein polarkonvexes f ohne Konstanzintervalle, aber mit unstetigem α

Beweis zu Satz 3. In bekannter Weise definiere man zunächst für reelles $w > 0$ und ganzes $n \geq 3$ ein Diskontinuum C_{wn} : Aus dem Intervall $[0, w]$ löscht man das mittlere offene Intervall der Länge $\frac{w}{n}$, aus den verbleibenden abgeschlossenen Intervallen jeweils das mittlere offene Intervall der Länge $\frac{w}{n^2}$ usw. Die Vereinigungsmenge C'_{wn} der gelöschten Intervalle hat das Maß $\frac{w}{n} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2^2}{n^2} + \dots\right) = \frac{w}{n-2}$, die Menge C_{wn} also das Maß $\frac{w(n-3)}{n-2}$.

Sodann definieren wir eine Funktion (10) wie folgt (Abb. 3): Für alle $\varphi \in C_{\pi_4}$ sei $f(\varphi) := 1$. Ist ferner (a, b) ein bei der Bildung von C_{π_4} zu löschendes Intervall, so definieren wir $f(\varphi)$ für alle $\varphi \in (a, b)$ so, daß die Funktion $r = f(\varphi)$ ($\varphi \in [a, b]$) in Polarkoordinaten die geradlinige Verbindungsstrecke der Punkte mit $\varphi = a$, $r = 1$

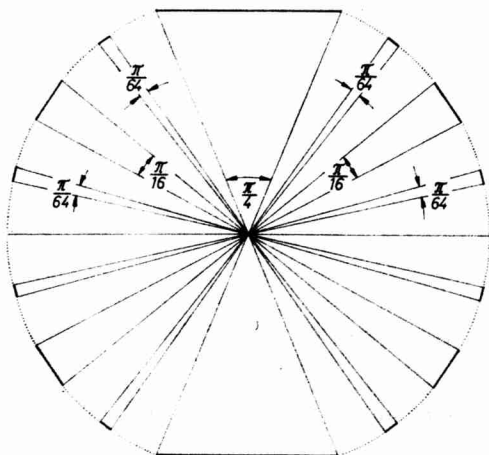


Abb. 3

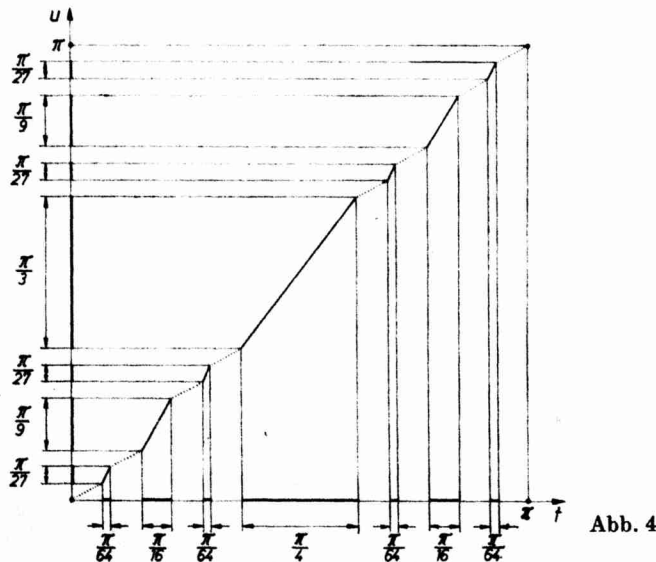
und mit $\varphi = b, r = 1$ darstellt. Für alle $\varphi \in (\pi, 2\pi]$ schließlich setzen wir $f(\varphi) := f(\varphi - \pi)$.

Diese Funktion ist polarkonvex, denn sie stellt in Polarkoordinaten die Randkurve eines Bereiches dar, der aus dem Einheitskreis durch geradliniges Abschneiden von Segmenten entsteht. Sie ist in keinem Intervall ihres Definitionsbereiches $[0, T] = [0, 2\pi]$ konstant, da sie in allen Intervallen von $C'_{\pi 4}$ und von $\{\varphi + \pi: \varphi \in C'_{\pi 4}\}$ nichtkonstant definiert wurde und da die Menge $C_{\pi 4} \cup \{\varphi + \pi: \varphi \in C_{\pi 4}\}$, auf der sie den Wert 1 annimmt, keine Intervalle enthält. Schließlich hat (für diese Funktion)

diese Menge $G(1)$ das Maß $2 \cdot \frac{\pi(4-3)}{4-2} = \pi$, nach Satz 2 ist daher $\alpha(s)$ an der Stelle 1 unstetig.

4. Der Einfluß von Transformationen bei f auf die Stetigkeit von α

Beweis zu Satz 4. Es sei $f(t)$ die soeben definierte Funktion, der Einfachheit halber auf den Definitionsbereich $[0, \pi]$ eingeschränkt. Für $u = u(t)$ wählen wir die etwa in [1], S. 188, angegebene Abbildung von $C_{\pi 4}$ auf $C_{\pi 3}$ (Abb. 4): $u(t)$ wird zunächst in den Intervallen definiert, die nach der obigen Beschreibung von $C_{\pi 4}$ sukzessive zu löschen sind, und zwar so, daß diese Intervalle jeweils linear und steigend auf die der Reihe nach entsprechenden Intervalle abgebildet werden, die nach der gleichen Beschreibung von $C_{\pi 3}$ zu löschen sind. Die dadurch erhaltene Abbildung von $C'_{\pi 4}$ auf $C'_{\pi 3}$ kann zur damit definierten stetigen und streng monoton steigenden Abbildung von $[0, \pi]$ auf sich fortgesetzt werden (die insbesondere $C_{\pi 4}$ auf $C_{\pi 3}$ abbildet).



Hiernach ergibt sich einerseits zu $f(t)$ die Menge $G(1) = C_{\pi 4}$ mit dem Maß $\frac{\pi}{2}$, andererseits hat mit den Bezeichnungen (12), (13) die zu $h(u)$ (entsprechend) gebildete Menge $Q(1) := \{u \in [0, \pi]: h(u) = 1\} = C_{\pi 3}$ das Maß 0. Nach Satz 2 ist damit Satz 4 bewiesen.

Beweis zu Satz 5. Aus den angegebenen Voraussetzungen haben wir zu schließen: Wenn für ein s_0 die Menge $G(s_0)$ das Maß 0 hat, so auch ihr Bild $Q(s_0)$ bei $u(t)$. Stellen wir hierzu wieder die offene Menge $A(s_0) \cup B(s_0)$ als Vereinigungsmenge abzählbar vieler disjunkter offener Intervalle E_ν , ($\nu \in I$) dar, so gilt für deren Längen e_ν , diesmal

$$\sum_{\nu \in I} e_\nu = T.$$

Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Untermenge $A \subseteq I$ mit

$$\sum_{\nu \in A} e_\nu > T - \varepsilon,$$

wonach die Menge

$$[0, T] \setminus \bigcup_{\nu \in A} E_\nu, \tag{17}$$

sich als Vereinigungsmenge endlich vieler abgeschlossener Intervalle erweist, die einerseits $G(s_0)$ überdeckt und andererseits ein Maß $< \varepsilon$ hat. Ist κ die vorausgesetzte Lipschitz-Konstante, so hat das Bild von (17) bei der Abbildung $u(t)$, das seinerseits $Q(s_0)$ überdeckt, ein Maß $< \kappa\varepsilon$. Hieraus folgt die Behauptung.

5. Aussagen über die Menge der Halbierungszentren

Beweis von Satz 6 und 7 mit ihren Zusätzen. Wir betrachten zunächst zwei beliebige Ovale M, K und für jedes $Z \in J$ den zur Deutung von $\alpha(s^*)$ (im Anschluß an (15) mit $s^* = 1$) genannten Flächeninhalt, den wir ab jetzt auch unter Weglassen des Faktors 2 kurz mit α bezeichnen. Ebenso betrachten wir (wieder für $s^* = 1$ und unter Weglassen des Faktors 2 als Flächeninhalt gedeutet) die Maße β und γ von $B(s^*)$ bzw. $G(s^*)$. Diese Flächeninhalte α, β, γ hängen von den (in irgendeinem festen kartesischen Koordinatensystem verstandenen) Koordinaten x, y des Punktes Z ab, und zwar, wie sich sogleich zeigt, linear:

Die Menge $A(s^*)$ ist die Vereinigungsmenge abzählbar vieler Intervalle, dementsprechend ist α entweder eine endliche Summe oder eine (im üblichen elementaren Sinn) unendliche konvergente Reihe von Flächeninhalten der in Abb. 5 dargestellten Art. Hierbei ist nun jeder Summand zusammensetzbar aus dem Flächeninhalt eines segmentförmigen Flächenstücks, das (bei variablem Z) konstant bleibt, und dem Flächeninhalt eines Dreiecks. Den Segmentinhalt rechnen wir dabei stets positiv; das Dreieck orientieren wir so, daß sein Flächeninhalt positiv ist, wenn Z nicht in dem Segment liegt. Das Dreieck hat eine konstante Gegenseite zu Z , und damit ergibt sich die Linearität in x, y für jeden Summanden von α . Ebenso argumentiert man für β , wonach auch für γ die Behauptung aus $\alpha + \beta + \gamma = T$ (Gesamtinhalt von K) folgt.

Stellt man die Funktionen α und $\alpha + \gamma$ von x, y (mit dem Definitionsbereich J für $Z = (x, y)$) in einem räumlichen kartesischen x, y, z -Koordinatensystem dar, so ergeben sich also zwei ebene Flächenstücke Φ, Ψ . Da $0 \leq \alpha \leq \alpha + \gamma \leq T$ für alle Z gilt, durchqueren sie den über J errichteten Zylinderkörper \mathfrak{B} der Höhe T , wobei ihre Randkurven (die wir, da sie nicht mehr über J liegen, nicht zu Φ bzw. Ψ rechnen) sämtliche Mantellinien des Zylinderkörpers \mathfrak{B} schneiden (Abb. 6). Genauer ist wegen der Äquivalenz der bei (15) genannten Aussagen (i), (v) ihre Lage zueinander so, daß entweder, nämlich im Falle der Gültigkeit von (i)–(v),

$$\alpha = \alpha + \gamma \quad \text{für alle } Z \tag{18}$$

gilt oder aber

$$\alpha < \alpha + \gamma \quad \text{für alle } Z. \tag{19}$$

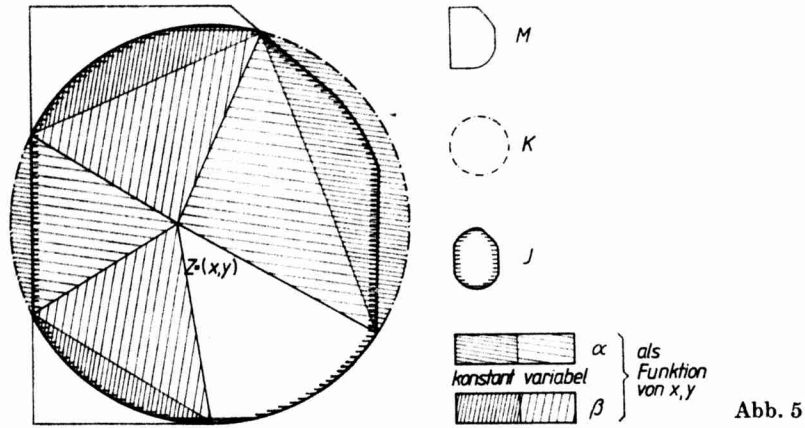


Abb. 5

Ein Punkt $Z = (x, y) \in J$ erfüllt nun genau dann die Bedingung (8), wenn der zugehörige Punkt $(x, y, \alpha) \in \Phi$ die Eigenschaft $\alpha \leq \frac{1}{2}T$ hat, und er erfüllt genau dann (9), wenn der zugehörige Punkt $(x, y, \alpha + \gamma) \in \Psi$ die Eigenschaft $\alpha + \gamma \geq \frac{1}{2}T$ hat. (Dies folgt aus Monotonieeigenschaften sowie der Unterhalbstetigkeit (Satz 1) der ursprünglichen, für festes Z gebildeten Funktion $\alpha(s)$ und der im Beweis von

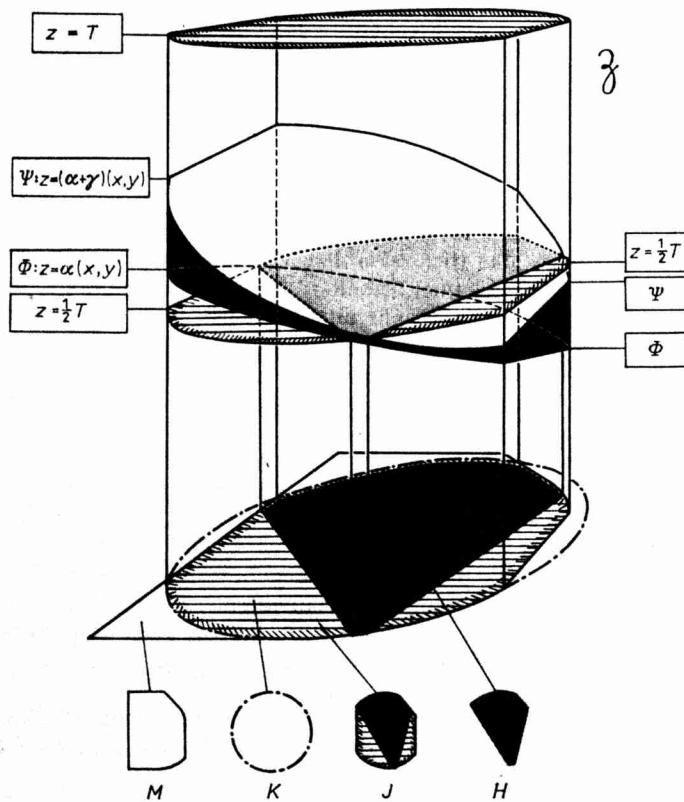


Abb. 6

Satz 2 entsprechend gebildeten Funktion $\beta(s)$.) Damit ergibt sich die gesuchte Menge H aller Halbierungszentren unmittelbar, indem man das zwischen Φ und Ψ im Zylinder \mathfrak{J} gelegene Raumstück (einschließlich der Randflächen Φ , Ψ verstanden und im Fall (18) zur Fläche $\Phi = \Psi$ entartet) mit der Ebene $z = \frac{1}{2}T$ zum Schnitt bringt und das resultierende Schnittgebilde auf die x, y -Ebene projiziert. Hieraus erhält man, je nach Gültigkeit oder Ungültigkeit von (i)–(v) und damit je nach Vorliegen von (18) oder (19), die einzelnen Aussagen der Sätze 6, 7 und ihrer Zusätze.

LITERATUR

- [1] MAYRHOFER, K.: Inhalt und Maß. Springer-Verlag, Wien 1952.
- [2] STAMMLER, L., und B. WEISSBACH: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beiträge zur Algebra und Geometrie 8 (1977), 55–65.

Manuskripteingang: 19. 12. 1977

VERFASSER:

LUDWIG STAMMLER und UDO MATTE, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg

