Beiträge zur Algebra und Geometrie
9 (1980), 131–147

Über die totale Absolutkrümmung verknoteter Sphären

PETER WINTGEN

Es sei K eine geschlossene verknotete Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum. Eine Vermutung von K. BORSUK [2], die von I. FARY und J. MILNOR bewiesen wurde, besagt, daß die Integralkrümmung von K der Ungleichung

$$\frac{1}{\pi}\int kds \geqq 4$$

genügt. Diese Ungleichung ist von D. FERUS auf den Fall höherer Dimension verallgemeinert worden: Ist N eine verknotete, differenzierbar eingebettete n-Sphäre im euklidischen Raum E^{n+2}, so gilt für die *totale Absolutkrümmung* von N

$$\tau(N) \geqq 4. \tag{1}$$

Hier kann $\tau(N)$ als die mittlere Anzahl von Punkten von N definiert werden, in denen ein zufällig gewählter Einheitsvektor senkrecht auf N steht. In dieser Arbeit geben wir verschiedene Verbesserungen von (1) an, wobei wir zusätzliche Voraussetzungen über die Art der Verknotung von N machen. Das erste Ergebnis in dieser Richtung stammt von R. FOX [7], der $\tau(K) \geqq 2\varrho$ für Knoten in E^3 zeigte, wobei ϱ die minimale Erzeugendenzahl der Knotengruppe von K bezeichnet. Dieses Resultat wurde von D. SUNDAY [24] auf verknotete n-Sphären in E^{n+2} verallgemeinert. Weitere Beziehungen zwischen Integralkrümmung und Verknotung von Flächen findet man bei R. LANGEVIN, H. ROSENBERG [14], H. MORTON [20] und P. WINTGEN [27]. Der Inhalt dieser Arbeit läßt sich kurz wie folgt beschreiben: Mit $\tau_{\inf}(N)$ bezeichnen wir das Infimum aller totalen Absolutkrümmungen $\tau(N')$, wobei N' den Isotopietyp einer gegebenen n-dimensionalen geschlossenen Untermannigfaltigkeit N von E^{n+2} durchläuft. Dieses Infimum läßt sich ausdrücken als minimale Anzahl der kritischen Punkte aller Morse-Funktionen auf N, welche sich mit nur zwei (nicht ausgearteten) kritischen Punkten auf $S^{n+2} = E^{n+2} - \{\infty\}$ ausdehnen lassen (Satz 9). Mit Hilfe solcher Morse-Funktionen kann man den Homotopietyp von $S^{n+2} - N$ beschreiben. Es ergibt sich dabei, daß $S^{n+2} - N$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist, dessen Zellenanzahl diese minimale Anzahl kritischer Punkte ist (Folgerung 2). Die Zellenanzahlen lassen sich gegen geeignete topologische Invarianten von $S^{n+2} - N$ nach unten abschätzen (Satz 4). Die Umgebungsränder komplexer algebraischer Singularitäten liefern uns Beispiele verknoteter Sphären, bei denen diese Invarianten nicht trivial ausfallen. Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von Beispielen verknoteter n-Sphären in E^{n+2}, für die sich $\tau_{\inf}$ explizit angeben läßt (Folgerung 11). Beispiele von R. FOX [7] (zusammenhängende Summen von Kleeblattschlingen in E^3) und von D. FERUS [6] (Kervaire-Sphären in der Kodimension 2), zwischen denen kaum ein Zusammenhang zu bestehen schien, ergeben sich als Spezialfälle dieser Beispielreihe.

Die vorliegende Arbeit ist eine leicht veränderte Version der Dissertation (B) des Verfassers. Den Gutachtern der Dissertation Prof. R. DUDA, Prof. N. H. KUIPER und Prof. R. SULANKE danke ich für ihre Hinweise, welche mir bei der Abfassung dieser Arbeit von großem Nutzen waren. Außerdem danke ich Herrn Dr. H. BOTHE, von dem der Beweis von Hilfssatz 9 stammt.

1. Morse-Funktionen auf Paaren von Mannigfaltigkeiten

Es ist bekannt, daß eine Morse-Funktion auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit einen bestimmten Aufbau der Mannigfaltigkeit aus Henkeln induziert. Wir wollen die folgende Verallgemeinerung für Paare von Mannigfaltigkeiten zeigen:

Satz 1. *Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und N eine geschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension $q \geqq 1$. Ist f eine Morse-Funktion auf M, deren Einschränkung auf N ebenfalls eine Morse-Funktion ist, dann besitzt das Komplement einer (offenen) Tube von N einen Aufbau aus Henkeln, wobei die Anzahl der Henkel gleich der Anzahl der kritischen Punkte von f und $f \mid N$ ist. Genauer: Bezeichnet A_i die Anzahl der Henkel vom Index i und $C_i(f)$ (bzw. $C_i(f \mid N)$) die Anzahl der kritischen Punkte von f (bzw. $f \mid N$) vom Index i, so gilt*

$$A_i = C_i(f) + C_{i-q+1}(f \mid N), \qquad i = 0, \dots, \dim M. \tag{1}$$

Vor dem Beweis stellen wir einige Bezeichnungen und bekannte Tatsachen zusammen, die wir benötigen werden. Mit D^i bezeichnen wir die i-dimensionale Vollkugel. Es sei W eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂W. Man kann an W den Henkel $H_i = D^i \times D^{m-i}$ vom Index i anbringen, indem man über eine identifizierende Einbettung $\varphi\colon S^{i-1} \times D^{m-i} \to \partial W$ die Mannigfaltigkeit $W \times_\varphi H_i$ bildet. Die differenzierbare Struktur von $W \times_\varphi H_i$ ergibt sich durch Glätten der Winkel. Ist h eine reelle Funktion auf W und $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so daß $h^{-1}[a, b]$ mit ∂W disjunkt ist, sich auf $h^{-1}(a)$ und $h^{-1}(b)$ keine kritischen Punkte befinden und die kritischen Punkte zwischen diesen beiden Niveauflächen nicht ausgeartet sind, dann entsteht $h^{-1}(-\infty, b]$ aus $h^{-1}(-\infty, a]$ durch Anbringen von Henkeln, wobei die Anzahl der Henkel vom Index i gleich der Anzahl der kritischen Punkte vom Index i ist (vgl. J. MILNOR [17], Anhang).

Zum Beweis von Satz 1 werden wir eine Funktion h auf dem Komplement $W = M - T$ einer Tube T von N angeben, die die folgenden Eigenschaften hat: h ist auf ∂W konstant und nimmt dort das Maximum an. Die kritischen Punkte von h sind alle nicht ausgeartet und liegen im Innern von W. Für die Anzahl der kritischen Punkte vom Index i gilt $C_i(h) = C_i(f) + C_{i-q+1}(f \mid N)$. Es ist klar, daß damit die Behauptung des Satzes bewiesen sein wird. Die Funktion h werden wir durch schrittweise Abänderung der Einschränkung von f auf W gewinnen, was leicht mit Hilfe der von TH. FRIEDRICH [9] entwickelten Technik durchgeführt werden kann. Zunächst studieren wir das lokale Verhalten von f in der Umgebung eines kritischen Punktes von $f \mid N$, der kein kritischer Punkt von f sei.

Hilfssatz 1. *Es sei $p \in N$ ein nicht ausgearbeiteter kritischer Punkt von $f \mid N$, der kein kritischer Punkt von f sei. Es gibt dann in einer gewissen Umgebung U von p Koordinaten x_i ($i = 1, \dots, \dim M$), so daß $N \mid U$ durch $x_\alpha = 0$ ($\alpha \leqq q$) definiert ist und f*

in U durch

$$f(x) = x_q + \sum_{j>q} \varepsilon_j x_j^2, \qquad \varepsilon_j = \pm 1,$$

gegeben wird.

Beweis. Wir benutzen zunächst ein beliebiges Koordinatensystem, y_i, in dem N lokal durch $y_\alpha = 0$ ($\alpha \leqq q$) beschrieben wird. Die Einschränkungen von y_j, $j > q$, auf N liefern ein lokales Koordinatensystem von N. Da p ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von $f \mid N$ ist, können wir eine Koordinatentransformation $x_j = x_j(y_{q+1}, \ldots, y_m)$ ($q < j \leqq m = \dim M$) durchführen, so daß $f \mid N$ in einer Umgebung von p durch $f(p) + \sum_{j>q} \varepsilon_j x_j^2$ gegeben wird. Wir ergänzen nun x_j ($j > q$) zu einem Koordinatensystem x_i ($i = 1, \ldots, m$), wobei wir $x_q = f - f(p) - \sum_{j>q} \varepsilon_j x_j^2$ wählen. Dies ist möglich, weil p kein kritischer Punkt von f ist. Es gibt daher ein $\alpha < q$ mit $\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}(p) \neq 0$, woraus $\frac{\partial x_q}{\partial y^\alpha}(p) \neq 0$ folgt. Das neue Koordinatensystem hat die geforderten Eigenschaften.

Wir wollen von nun an stets voraussetzen, daß f auf N keine kritischen Punkte hat. Dies läßt sich leicht durch eine kleine Isotopie von N erreichen, ohne die Anzahlen der kritischen Punkte von f und $f \mid N$ zu ändern. Aus technischen Gründen setzen wir auf M eine Riemannsche Metrik als gegeben voraus. Zu einem gegebenen kleinen $r > 0$ haben wir die zugehörige Tubenumgebung T von N mit dem Radius r. Die geodätische Projektion von T auf N schränken wir auf $\partial T = S$ ein und bezeichnen sie mit $\pi\colon S \to N$. Der folgende Hilfssatz gilt in leicht modifizierter Form für alle Riemannsche Metriken. Der Bequemlichkeit halber begnügen wir uns mit einer speziellen angepaßten Metrik.

Hilfssatz 2. *Es gibt eine Riemannsche Metrik auf M, so daß für jede genügend kleine geodätische Tube T von N gilt: Zu jedem kritischen Punkt x von $f \mid N$ gibt es zwei kritische Punkte von $f \mid S$ in $\pi^{-1}(x)$, wobei der Gradient von f in dem einen Punkt x_+ in die Tube hinein und in dem anderen x_- aus der Tube heraus zeigt. Für die Morse-Indizes gilt*

$$\begin{aligned} \text{Index}_{x_-}(f \mid S) &= \text{Index}_x(f \mid N) + q - 1, \\ \text{Index}_{x_+}(f \mid S) &= \text{Index}_x(f \mid N). \end{aligned} \tag{2}$$

$f \mid S$ ist nicht ausgeartet in diesen kritischen Punkten und besitzt keine weiteren kritischen Punkte.

Beweis. Wir wählen auf M eine Metrik, so daß für die kritischen Punkte von $f \mid N$ Koordinatenumgebungen gewählt werden können, in denen die Metrik euklidisch ist und f die in Hilfssatz 1 angegebene Gestalt hat. f wird also durch

$$f = x_q + \sum_{\alpha>q} \varepsilon_\alpha x_\alpha^2, \qquad \varepsilon_\alpha = \pm 1,$$

gegeben, und S hat die Gleichung

$$\sum_{j \leqq q} x_j^2 = r^2 .$$

(r Tubenradius). In einer solchen Umgebung hat $f \mid S$ genau dann einen kritischen Punkt, wenn die Gradienten von f und $\sum_{j \leqq q} x_j^2 - r^2$ linear abhängig sind, und dies führt unmittelbar auf die Bedingungen $x_i = 0$ ($i \neq q$) und $x_q = \pm r$. Um die Morse-Indizes in den kritischen Punkten $x_+ = (0, \ldots, \underset{(q)}{-r}, \ldots, 0)$ und $x_- = (0, \ldots, \underset{(q)}{r}, \ldots, 0)$ zu bestimmen, entwickeln wir $f \mid S$ nach den Potenzen der lokalen Koordinaten x_i $(i \neq q)$ von S. Dabei ergibt sich

$$f \mid S = \varepsilon_q r - \frac{\varepsilon_q}{2r} \sum_{j<q} x_j^2 + \sum_{\alpha>q} \varepsilon_\lambda x_\alpha^2 + \cdots,$$

wobei wir $\varepsilon_q = -1$ in x_+ und $\varepsilon_q = 1$ in x_- einsetzen. Damit ist (2) gezeigt. Wir müssen noch nachweisen, daß $f \mid S$ keine weiteren kritischen Punkte besitzt. Dazu betrachten wir auf T die Funktion $\sigma(y)$, welche als die Länge der nach $\pi(y)$ parallelverschobenen Projektion von $\operatorname{grad}_y f$ auf $T_{\pi(y)}(N)$ definiert ist. σ ist stetig und außerhalb der kritischen Punkte von $f \mid N$ auf N positiv. Andererseits hat $f \mid S$ keine kritischen Punkte, wo σ positiv ist. Es ist nun klar, daß wir r nur genügend klein wählen müssen, damit $f \mid S$ keine kritischen Punkte außerhalb der betrachteten Koordinatenumgebungen hat.

Wir können annehmen, daß alle kritischen Punkte von f außerhalb von T liegen. Schränken wir f auf die Mannigfaltigkeit $W = M - T$ ein, dann erhalten wir eine Funktion g auf W mit den folgenden Eigenschaften: Alle kritischen Punkte von g liegen im Innern von W und sind nicht ausgeartet. Für die Anzahl der kritischen Punkte vom Index i gilt $C_i(g) = C_i(f)$. Die Einschränkung von g auf den Rand ∂W ist eine Morse-Funktion. Wir bezeichnen einen kritischen Punkt von $g \mid \partial W$ vom Index i als kritischen Punkt vom Index $(i, +)$, wenn der Gradient von f aus W heraus zeigt, und als kritischen Punkt vom Index $(i, -)$, wenn der Gradient von f nach W hinein zeigt. Die Anzahl der kritischen Punkte vom Index $(i, +)$ (bzw. $(i, -)$) bezeichnen wir mit $C_i^+(g)$ (bzw. $C_i^-(g)$). Es gilt dann $C_i^+(g) = C_i(f \mid N)$ und $C_i^-(g) = C_{i-q+1}(f \mid N)$. Wir wollen nun von g zu der gewünschten Funktion h, welche die oben genannten Eigenschaften haben wird, übergehen. Für die strengen Beweise der dabei benutzten Hilfssätze verweisen wir auf Bemerkung 5.

Hilfssatz 3. *Ist x ein kritischer Punkt vom Index $(i, -)$, so kann man g in einer beliebig kleinen Umgebung von x so abändern, daß g statt x zwei kritische Punkte mit den Indizes i und $(i, +)$ erhält.*

Um sich Hilfssatz 3 plausibel zu machen, denke man sich W in einen euklidischen Raum mit g als Höhenfunktion eingebettet und biege dann W in einer Umgebung von x nach oben um.

Durch mehrmalige Anwendung von Hilfssatz 3 beseitigen wir alle kritischen Punkte von g mit eintretendem Gradienten und erhalten eine Funktion g_1 mit $C_i(g_1) = C_i(g) + C_i^-(g)$.

Hilfssatz 4. *Eine Funktion auf W, die auf ∂W nur kritische Punkte vom Index $(i, +)$ $(i \geq 0)$ besitzt, kann auf einem beliebig kleinen Kragen von ∂W so abgeändert werden, daß sie keine neuen kritischen Punkte erhält und auf ∂W konstant ihr Maximum annimmt.*

Hilfssatz 4 wird plausibel, wenn man wie oben eine Einbettung von W mit g als Höhenfunktion betrachtet und den Rand ∂W auf ein konstantes Niveau nach oben zieht. Wenn wir g_1 gemäß Hilfssatz 4 abändern, erhalten wir die Funktion h mit den gewünschten Eigenschaften.

Das Anbringen eines Henkels vom Typ i ist bis auf Homotopieäquivalenz gleichwertig mit dem Anheften einer i-dimensionalen Zelle e_i vermöge einer Abbildung des Randes ∂e_i. Somit ergibt sich

Folgerung 1. *Ist f eine Morse-Funktion auf M, deren Einschränkung auf die Untermannigfaltigkeit N der Kodimension q ebenfalls eine Morse-Funktion ist, so ist $M - N$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, wobei die Anzahl der i-dimensionalen Zellen des Komplex gleich $C_i(f) + C_{i-q+1}(f \mid N)$ ist.*

Aus dieser Folgerung ergeben sich auf die übliche Weise Relationen zwischen den Anzahlen der kritischen Punkte und den Bettischen Zahlen $\beta_i(M - N)$ (bezüglich eines beliebigen Koeffizientenkörpers, vgl. J. MILNOR [17], M. M. POSTNIKOV [21]):

$$C_i(f) + C_{i-q+1}(f \mid N) \geqq \beta_i(M - N), \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \big(C_j(f) + C_{j-q+1}(f \mid N) - \beta_j(M - N)\big) \geqq 0, \tag{4}$$

$$\chi(M - N) = \sum_{j \geqq 0} (-1)^j \big(C_j(f) + C_{j-q+1}(f \mid N)\big). \tag{5}$$

Bemerkung 1. Im wesentlichen kommt es auf die Relation (4) an. (3) erhält man durch Addition zweier Ungleichungen von (4), und (5) ist nichts weiter als die einfache Beziehung $\chi(M - N) = \chi(M) + (-1)^{1-q}\chi(N)$ zwischen den Eulerschen Charakteristiken von M, N und $M - N$, welche auch leicht direkt bewiesen werden kann: Aus der Additivität von χ folgt $\chi(M) = \chi(T) + \chi(M - T) - \chi(\partial T) = \chi(N) + \chi(M - N) - \chi(\partial T)$. ∂T ist ein $(q - 1)$-Sphärenbündel über N, und daraus folgt $\chi(\partial T) = \chi(N) \cdot \chi(S^{q-1}) = \big(1 + (-1)^{q-1}\big)\chi(N)$.

Bemerkung 2. Folgerung 1 kann man auch unter Vermeidung der Hilfssätze 3 und 4 erhalten, indem man Sätze von A. JANKOWSKI und R. RUBINSZTEIN [12] direkt auf die Funktion g anwendet.

Wir können die Aussage von Satz 1 noch etwas verstärken, indem wir die obersten kritischen Punkte der Funktionen g und $g \mid \partial W$ gegeneinander reduzieren:

Hilfssatz 5. *Es sei p ein kritischer Punkt von g vom Index m ($m = \dim M$) und q ein kritischer Punkt vom Index $(m - 1, -)$. Dann kann man g in einer beliebig kleinen zusammenhängenden Umgebung von p und q so abändern, daß g statt p und q einen kritischen Punkt vom Index $(m - 1, +)$ bekommt.*

Hilfssatz 5 wird plausibel, wenn man sich W wie oben eingebettet denkt und dann W bei q in Richtung von p über p hinaus in sich zurückschiebt.
Nach Konstruktion von g sind kritische Punkte vom Index m und $(m - 1, -)$ wirklich vorhanden, und wir können Hilfssatz 5 anwenden. Damit ergibt sich

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 besitzt $M - T$ einen Henkelaufbau, wobei für die Anzahl A_i der Henkel vom Typ i gilt:*

$$\begin{aligned} A_i &= C_i(f) + C_{i-q+1}(f \mid N), & i &= 0, \dots, m-2, \\ A_{m-1} &= C_{m-1}(f) + C_n(f \mid N) - 1 & (n &= \dim N), \\ A_m &= C_m(f) - 1 & (m &= \dim M). \end{aligned} \tag{6}$$

Folgerung 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist $M - N$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, dessen Zellenanzahlen A_i durch die Relationen* (6) *gegeben werden.*

(Natürlich können auch die Morse-Relationen (4), (5), (6) entsprechend geändert werden.)

Bemerkung 3. Satz 2 ist tatsächlich stärker als Satz 1. Wir können nämlich aus dem Henkelaufbau von Satz 2 den von Satz 1 herstellen, indem wir zwei Henkel vom Typ m und $m - 1$ anbringen, ohne den Diffeomorphietyp von $M - T$ zu ändern. In gewissem Sinne dual zu Satz 1 ist der folgende

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 kann man M aus einer (abgeschlossenen) Tube von N durch Anbringen von Henkeln erhalten, wobei die Anzahl der Henkel vom Typ i gerade $C_i(f) + C_{i-1}(f \mid N)$ beträgt.*

Der **Beweis** kann analog zum Beweis von Satz 1 geführt werden. Wir gehen wie oben von f zu der Funktion g auf $W = M - T$ über. Dann beseitigen wir die kritischen Punkte von $g \mid \partial W$ mit austretendem Gradienten. Dabei benutzen wir

Hilfssatz 6. *Ist p ein kritischer Punkt vom Index $(i, +)$, dann kann man g in einer Umgebung von p so abändern, daß man statt p zwei kritische Punkte vom Index $i+1$ und $(i, -)$ erhält.*

Anschließend machen wir die Funktion konstant und minimal auf ∂W unter Benutzung von

Hilfssatz 7. *Ist eine Funktion auf W gegeben, die auf ∂W nur kritische Punkte mit eintretendem Gradienten hat, so kann man die Funktion auf einem Kragen von ∂W so abändern, daß sie keine neuen kritischen Punkte erhält und auf ∂W konstant das Minimum annimmt.*

Damit übersehen wir, wie sich $M - T$ aus einem Kragen von ∂W durch Anbringen von Henkeln aufbauen läßt. Wenn wir in $M - T$ die Tube wieder einkleben, erhalten wir die Behauptung von Satz 3.

Folgerung 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist M homotopieäquivalent zu einem Raum, den man aus N durch Anheften von Zellen erhält, wobei die Anzahl der i-dimensionalen Zellen gerade $C_i(f) + C_{i-1}(f \mid N)$ beträgt.*

Es folgen hieraus ebenfalls Relationen zwischen den Anzahlen der kritischen Punkte und den Bettischen Zahlen $\beta_i(M, N) = \dim_K H_i(M, N; K)$ bezüglich eines beliebigen Koeffizientenkörpers K:

$$C_i(f) + C_{i-1}(f \mid N) \geqq \beta_i(M, N), \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \bigl(C_j(f) + C_{j-1}(f \mid N) - \beta_i(M, N)\bigr) \geqq 0, \tag{8}$$

$$\chi(M, N) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \bigl(C_j(f) + C_{j-1}(f \mid N)\bigr). \tag{9}$$

Bemerkung 4. (7) *läßt sich aus* (8) *herleiten, und* (9) *liefert nur die bekannte Gleichung $\chi(M) - \chi(N) = \chi(M, N)$. Außerdem bemerken wir, daß* (7) *eine Folgerung von* (3) *ist, wenn M als orientierbar (über K zumindest) vorausgesetzt wird. Man kann dann nämlich in* (3) *die Funktion $-f$ einsetzen und den Lefschetzschen Dualitätssatz auf das Paar (M, N) anwenden.*

Wir können auch hier die Aussage noch etwas verstärken und einen Henkelaufbau von M aus T mit den Henkelanzahlen

$$A_0 = C_0(f) - 1,$$
$$A_1 = C_1(f) - C_0(f \mid N) - 1,$$
$$A_i = C_i(f) - C_{i-1}(f \mid N), \qquad i > 1,$$

bekommen, indem wir den folgenden Hilfssatz anwenden:

Hilfssatz 8. *Es sei p ein kritischer Punkt der Funktion g vom Index 0 und q ein kritischer Punkt vom Index $(0, +)$, dann kann man g in einer zusammenhängenden Umgebung von p und q so abändern, daß g statt p und q einen kritischen Punkt vom Index $(0, -)$ bekommt.*

Bemerkung 5. Die vollständigen Beweise von Hilfssatz 6 und Hilfssatz 7 findet man bei Th. Friedrich [9] (Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2). Die zum Beweis von Hilfssatz 8 erforderliche Konstruktion ist dort ebenfalls durchgeführt (zweiter Teil des Beweises von Hilfssatz 3). Die Hilfssätze 3, 4 und 5 ergeben sich aus den Hilfssätzen 6, 7 und 8, indem man dort das Vorzeichen der betrachteten Funktion umkehrt.

2. Invarianten zyklischer Überlagerungen

Es sei X ein endlicher zusammenhängender CW-Komplex. Zwischen der Anzahl der i-dimensionalen Zellen A_i und der i-ten Bettischen Zahl β_i besteht bekanntlich die Ungleichung

$$A_i \geqq \beta_i .$$

Da diese Ungleichung für unsere Zwecke nicht ausreicht, wollen wir unter Benutzung feinerer topologischer Invarianten diese Abschätzungen der Zellenanzahlen verbessern. Ist beispielsweise ϱ die minimale Anzahl von Erzeugenden der Fundamentalgruppe von X, so gilt

$$A_1 \geqq \varrho . \tag{10}$$

Dies folgt leicht daraus, wie man die Fundamentalgruppe von X aus dem 2-Skelett berechnen kann: Man kontrahiere einen maximalen Baum B des 1-Skelett X^1 auf eine 0-Zelle x_0. Die restlichen 1-Zellen in $X - B$ liefern ein Erzeugendensystem von $\pi_1(X, x_0)$, denn wir haben die Isomorphien $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^2, x_0) = \pi_1(X^1, x_0)/R$, wobei R für gewisse von den 2-Zellen induzierte Relationen steht, und es gilt $\pi_1(X^1, x_0) = \pi_1(X^1/B)$. X^1/B ist ein Bukett von Kreisen, wobei jeder Kreis jeweils einer 1-Zelle von $X^1 - B$ entspricht.

Um ähnliche Abschätzungen für die Anzahlen der höherdimensionalen Zellen zu erhalten, werden wir zyklische Überlagerungen von X betrachten. Dazu setzen wir voraus, daß ein surjektiver Homomorphismus $\gamma\colon \pi_1(X) \to \mathbf{Z}$ der Fundamentalgruppe von X auf die Gruppe der ganzen Zahlen gegeben sei. (Wir werden in der Regel den Basispunkt der Fundamentalgruppe weglassen.) Es sei $p\colon Y \to X$ die zugehörige Überlagerung mit $p_{\#}\pi_1(Y) = \operatorname{Ker}\gamma$, auf der $\mathbf{Z}$ als Gruppe von Decktransformationen wirkt. Mit x bezeichnen wir eine der beiden erzeugenden Decktransformationen und mit $\Gamma = K[x, x^{-1}]$ den Hauptidealring der Laurent-Polynome in x mit Koeffizienten in einem Körper K. Vermöge der Wirkung von x auf den Homologiegruppen von Y können wir $H_i(Y; K)$ als Modul über Γ auffassen. Man sieht leicht, daß $H_i(Y; K)$ über Γ endlich erzeugt ist (vgl. den Beweis von Satz 4). Mit $\varrho_i(X)$ bezeichnen wir die minimale Anzahl von Erzeugenden des Γ-Moduls $H_i(Y; K)$. (Wir setzen $\varrho_i = 0$, wenn $H_i(Y; K)$ trivial ist.)

Satz 4. *Es sei X ein endlicher zusammenhängender CW-Komplex, der einen surjektiven Homomorphismus $\gamma\colon \pi_1 X \to \mathbf{Z}$ besitzt. Für die Anzahlen der i-dimensionalen Zellen von X gelten die Ungleichungen*

$$A_i \geqq \varrho_i(X), \qquad i \geqq 1, \tag{11}$$

$$A_1 \geqq \varrho_1(X) + 1. \tag{12}$$

Beweis. Wir können die Zellen von X auf Y liften und Y zum CW-Komplex machen. Es sei $C_i(Y; K)$ der formale Kettenkomplex von Y mit Koeffizienten in K. Wir haben eine natürliche Γ-Wirkung auf $C_i(Y; K)$. Der entsprechend definierte Γ-Modul ist frei über Γ und von der Dimension A_i. Man erhält nämlich eine Basis, wenn man über jeder i-Zelle von X eine i-Zelle von Y wählt. $Z_i(Y; K)$ sei der Untermodul der Zyklen von $C_i(Y; K)$. Da Γ ein Hauptidealring ist, gilt für die minimalen Erzeugendenzahlen $\varrho(Z_i(Y; K)) \leqq \varrho C_i(Y; K)$. Außerdem gilt $\varrho(H_i(Y; K)) \leqq \varrho(Z_i(Y; K))$, da $H_i(Y; K)$ ein Faktormodul von $Z_i(Y; K)$ ist. Damit ist (11) gezeigt. Um (12) zu beweisen, fixieren wir eine 0-Zelle $x_0 \in X$ und Erzeugende $u_1, \ldots, u_\varrho$ von $\pi_1(X, x_0)$ der minimalen Anzahl ϱ. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\gamma(u_\varrho) = 1$ und $\gamma(u_i) = 0$ für $i < \varrho$ voraussetzen. Indem wir nämlich gegebenenfalls zu den inversen Elementen übergehen und die Reihenfolge abändern, können wir zunächst

$$0 \leqq \gamma(u_1) \leqq \cdots \leqq \gamma(u_\varrho) \tag{13}$$

voraussetzen. Gilt $\gamma(u_{\varrho-1}) > 0$, dann ersetzen wir u_ϱ durch $u_\varrho u_{\varrho-1}^{-1}$ und stellen die Reihenfolge wie in (13) wieder her. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir $\gamma(u_i) = 0$ für $i < \varrho$, und es muß dann $\gamma(u_\varrho) = 1$ gelten, da γ surjektiv ist. Es sei nun $u \in \operatorname{Ker} \gamma$ beliebig. Wir können u in der Gestalt

$$u = u_{i_1}^{\pm 1} \cdots u_{i_k}^{\pm 1} \tag{14}$$

schreiben. Wegen $\gamma(u) = 0$ kommen u_ϱ und u_ϱ^{-1} in gleicher Anzahl vor. Wir können daher das Produkt (14) in Faktoren der Gestalt $u_\varrho^\mu u_i u_\varrho^{-\mu}$ mit $0 < i < \varrho$ und $\mu \in \mathbf{Z}$ zerlegen. Diese Elemente erzeugen also $\operatorname{Ker} \gamma$. Es sei nun $a\colon \pi_1(Y, y_0) \to H_1(Y)$ der kanonische Homomorphismus, der $\pi_1(Y, y_0)$ abelsch macht. (y_0 sei eine 0-Zelle von Y über x_0.) Die Wirkung der Decktransformation x auf $H_1(Y)$ läßt sich dann durch

$$xa(u) = a \cdot (u_\varrho u u_\varrho^{-1})$$

beschreiben. (Hier identifizieren wir $\operatorname{Ker} \gamma$ mit $\pi_1(Y, y_0)$.) Die Elemente $a(u_i)$, $i = 1, \ldots, \varrho - 1$, bilden also ein Erzeugendensystem des Γ-Moduls $H_1(Y; K) = H_1(Y) \otimes K$. Daraus folgt für die minimale Erzeugendenzahl $\varrho = \varrho\pi_1(X)$ der Fundamentalgruppe von X die Ungleichung $\varrho \geqq \varrho_1 + 1$, und aus (10) folgt daher die Behauptung.

Bemerkung 6. Die Ungleichung (12) ist zwar nicht schärfer als (10), aber $\varrho_1(X)$ läßt sich im allgemeinen leichter berechnen als $\varrho\pi_1(X)$. Wir weisen noch darauf hin, daß wir etwas mehr als (12) gezeigt haben. Es gilt sogar $A_1 \geqq \varrho H_1(Y) + 1$, wobei wir $H_1(Y)$ als Modul über dem Gruppenring von $\mathbf{Z}$ auffassen und ϱ wie oben die minimale Erzeugendenzahl bezeichnet.

Wir geben nun Beispiele für X an, in denen man gute Informationen über die ϱ_i hat:

Beispiel 1. *Faserungen über S^1.* Es sei $\pi\colon X \to S^1$ eine lokal triviale Faserung über S^1. Wir können dann X in der Gestalt $F \times [0, 1]/\sim$ mit der Identifikation $(f, 0) \sim (h(f), 1)$ schreiben, wobei $h\colon F \to F$ ein Autohomöomorphismus der Faser F ist, die als zusammenhängend vorausgesetzt sei. Dann ist $\pi_\#\colon \pi_1 X \to \pi_1 S^1$ surjektiv. Die Invarianten $\varrho_i(X)$ sind also wohldefiniert. (Wir setzen voraus, daß X zu einem endlichen CW-Komplex homotopieäquivalent ist.) Die Überlagerung Y ist hier durch $F \times \mathbf{R}$ gegeben und die Decktransformation durch $x(f, t) = (h(f), t + 1)$. Wir können also $H_i(Y; K) = H_i(F; K)$ setzen und die Wirkung von x durch $h_*\colon H_i(F; K) \to H_i(F; K)$ beschreiben. Ist eine Vektorbasis von $H_i(F; K)$ gegeben und A_i die Matrix von h_*, so erhalten wir als Erzeugenden-Relationenmatrix des Γ-Moduls $H_i(Y; K)$ gerade $A_i - x \cdot E$. Aus dieser Matrix können wir ϱ_i als Anzahl der Elementarteiler bestimmen.

Beispiel 2. *Knotenaußenräume.* Es sei N eine geschlossene orientierbare n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Sphäre S^{n+2} und $X = S^{n+2} - N$ ihr Komplement. Wir wählen eine Orientierung von N und definieren den Homomorphismus γ:

$\pi_1(X) \to \mathbf{Z}$ durch die Verschlingungszahlen der Wege mit N. Die zugehörige zyklische Überlagerung bezeichnen wir wieder mit p: $Y \to X$. Da X den Homotopietyp eines endlichen CW-Komplex hat (vgl. z. B. Abschnitt 1 dieser Arbeit) sind die Invarianten $\varrho_i(X)$ wohldefiniert. Ist $N \subset S^{n+2}$ die zusammenhängende Summe zweier Untermannigfaltigkeiten N_1 und N_2, so gilt für die zugehörigen Γ-Moduln

$$H_i(Y; K) = H_i(Y_1; K) \oplus H_i(Y_2; K), \tag{15}$$

wobei Y_1 (bzw. Y_2) die zu $X_1 = S^{n+2} - N_1$ (bzw. $X_2 = S^{n+2} - N_2$) gehörende zyklische Überlagerung ist. (Vgl. J. LEVINE [15]. Dort ist diese Beziehung etwas spezieller formuliert. Der Beweis läßt sich jedoch ungeändert übertragen, um die allgemeinere Form zu erhalten.) Die Struktur der Γ-Moduln $H_i(Y; K)$ wurde von J. LEVINE [15] für den Fall, daß N eine topologische n-Sphäre und K der Körper der rationalen Zahlen ist, untersucht. Unter anderem zeigte er, daß $H_{2(k+1)}(Y; \mathbf{Q})$ nicht trivial ist, wenn N eine exotische Sphäre der Dimension $n = 4k + 1$ ist. Es gilt also in diesem Fall

$$\varrho_{2(k+1)} > 0. \tag{16}$$

Beispiel 3. *Umgebungsränder komplexer Singularitäten.* Es sei $f(z_0, \ldots, z_k)$ ein komplexes Polynom in $k + 1$ Veränderlichen und $p_0 = (z_0^0, \ldots, z_k^0)$ ein isolierter kritischer Punkt von f. Die Gleichung $f = 0$ definiert eine komplexe Hyperfläche H, und die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{k} (z_j - z_j^0)(\bar{z}_j - \bar{z}_j^0) = r^2$$

definiert eine reelle Hypersphäre S mit dem Radius r und dem Mittelpunkt p_0. Für genügend kleines $r > 0$ ist der Durchschnitt $N = H \cap S$ eine reelle orientierbare Untermannigfaltigkeit in S von der Kodimension 2. Nach J. MILNOR [18] besitzt $X = S - N$ eine lokal triviale Faserung über S^1, welche durch $\varphi(p) = f(p)/|f(p)|$ definiert wird. Dabei ist der Fasertyp homotopieäquivalent zu einem Bukett von k-Sphären, wobei die Anzahl dieser Sphären mindestens gleich 1 ist. Die Invarianten ϱ_i sind also wohldefiniert, und es gilt

$$\begin{aligned} &\varrho_i = 0 \quad \text{für} \quad i \geqq 1, \quad i \neq k, \\ &\varrho_k \neq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Bemerkung 7. Es ist egal, ob wir hier den Homomorphismus γ nach Beispiel 1 oder Beispiel 2 definieren. Aus der Lage der Fasern $\varphi^{-1}(s)$, $s \in S^1$, in S, die bei J. MILNOR [18] beschrieben wird, ergibt sich leicht, daß die beiden Definitionen hier zusammenfallen. Dies kann man auch folgendermaßen einsehen: Es sei X ein endlicher CW-Komplex mit $H_1(X) \approx \mathbf{Z}$. Da $H_1(X)$ durch Abelschmachen von $\pi_1(X)$ entsteht, kann jeder Homomorphismus $\gamma: \pi_1 X \to \mathbf{Z}$ über die kanonische Abbildung $a: \pi_1 X \to H_1(X)$ faktorisiert werden. Ist γ surjektiv, so hängt γ also nur von der Auswahl eines Erzeugenden von $H_1(X) \approx \mathbf{Z}$ ab, die aber unwichtig für den Isomorphietyp des Γ-Homologiemoduls der Überlagerung Y ist. Die Zahlen $\varrho_i(X)$ sind also wohldefinierte topologische Invarianten des CW-Komplex X, wenn $H_1(X) \approx \mathbf{Z}$ gilt. Dies ist aber in Beispiel 2 der Fall (Alexander-Dualität zwischen $H_1(X)$ und $H^n(N) \approx \mathbf{Z}$).

3. Anwendungen auf Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 2

Es sei N eine geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit und f eine Morse-Funktion auf N. Mit $C(f) = \sum_{i \geq 0} C_i(f)$ bezeichnen wir die totale Anzahl der kritischen Punkte von der Funktion f. Das Minimum aller $C(f)$, wobei f alle Morse-Funktionen von N

durchläuft, heißt die Morse-Zahl $\mu(N)$, und eine Funktion mit $C(f) = \mu(N)$ nennen wir minimale Morse-Funktion von N. Wir nehmen nun an, daß N in die Sphäre S^{n+2} eingebettet sei. Wir definieren dann $\gamma(N)$ als das Minimum aller Zahlen $C(f \mid N)$, wobei f alle minimalen Morse-Funktionen von S^{n+2} durchläuft und $f \mid N$ ebenfalls eine Morse-Funktion ist. Es ist klar, daß $\gamma(N)$ invariant gegenüber Diffeomorphismen von S^{n+2} ist. Außerdem gilt stets

$$\gamma(N) \geqq \mu(N). \tag{18}$$

Die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen kann man vielleicht als ein gewisses Maß für die Kompliziertheit der Einbettung ansehen. Es gilt nämlich

Satz 5. *Ist N in S^{n+2} kompressibel, d. h., gibt es einen Diffeomorphismus von S^{n+2}, der N in die Äquatorhypersphäre überführt, so gilt $\gamma(N) = \mu(N)$.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß N bereits in der Äquatorhypersphäre liege. Es sei g eine minimale Morse-Funktion von N, deren Werte zwischen 0 und 1 liegen, und h die Standardhöhenfunktion von S^{n+2} ($h = x_{n+2}$, wenn S^{n+2} die durch $x_0^2 + \cdots + x_{n+2}^2$ definierte Hypersphäre in R^{n+3} ist). Wir verschieben dann die Punkte $x \in N$ längs der Großkreise in Richtung Nordpol um den Abstand $g(x)$. Wir erhalten so eine zu N isotope Mannigfaltigkeit N' mit der Morse-Funktion $h \mid N'$, für die $C(h \mid N') = \gamma(N)$ gilt.

Satz 6. *Es sei N eine geschlossene zusammenhängende n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Sphäre S^{n+2}, ϱ die minimale Erzeugendenzahl der Fundamentalgruppe des Komplementes von N und $n \geqq 2$. Dann gilt*

$$\gamma(N) \geqq \mu(N) + 4(\varrho - 1). \tag{19}$$

(Wir bemerken, daß (19) nicht schwächer als (18) ist, da wegen $H_1(S^{n-2} - N; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$ stets $\varrho \geqq 1$ gilt.)

Beweis. $\gamma(N)$ wird durch die totale Anzahl kritischer Punkte $C(f \mid N)$ der Einschränkung einer gewissen Funktion f auf S^{n+2} geliefert. Die einzigen kritischen Punkte von f selbst sind Minimum und Maximum. Nach Folgerung 3 ist $X = S^{n+2} - N$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit $C_0(f \mid N)$ 1-Zellen. Wegen (10) folgt daraus $C_0(f \mid N) \geqq \varrho$. Außerdem gilt $C_n(f \mid N) = C_0(-f \mid N) \geqq \varrho$. Nach M. MORSE [19] kann man $f \mid N$ durch paarweises Reduzieren kritischer Punkte vom Index 0 und 1 bzw. $n - 1$ und n durch eine Funktion h mit $C(h) = C(f \mid N) - 2\big(C_0(f \mid N) - 1\big) - 2\big(C_n(f \mid N) - 1\big)$ ersetzen. Daraus folgt $\gamma(N) = C(f \mid N) \geqq C(h) + 4(\varrho - 1) \geqq \mu(N) + 4(\varrho - 1)$.
Im Fall $n = 1$ können wir diese Reduktion der extremalen kritischen Punkte nicht durchführen. Der Rest des Beweises bleibt richtig und liefert

$$\gamma(N) \geqq 2\varrho \tag{20}$$

für Knoten $N \subset S^3$.

Satz 7. *Es sei N eine n-dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit von S^{n+2}. Das Komplement $S^{n+2} - N$ ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, dessen Zellenanzahl gleich $\gamma(N)$ ist.*

Beweis. Wir wenden auf die Funktion f aus dem Beweis von Satz 6 die Folgerung 2 an. Dann erhalten wir einen zu $S^{n+2} - N$ homotopieäquivalenten CW-Komplex, für dessen Zellenanzahlen A_i gilt:

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, \\ &A_i = C_{i-1}(f \mid N), \qquad i = 1, \ldots, n, \\ &A_{n+1} = C_n(f \mid N) - 1, \\ &A_j = 0, \qquad j \geqq n + 2. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Addition dieser Ungleichungen liefert gerade die Behauptung.

Folgerung 4. *Ist N eine n-dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit von S^{n+2} mit $\gamma(N) = 2$, so ist N homöomorph zu S^n und $S^{n+2} - N$ homotopieäquivalent zu S^1.*

Beweis. Aus $\gamma(N) \geqq \mu(N)$ folgt $\gamma(N) = 2$, daher ist N homöomorph zu S^n. Wegen $\gamma(N) = 2$ ist das Komplement von N homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, der nur aus zwei Zellen besteht. Wenn man die Nichttrivialität der ersten Homologiegruppe von $S^{n+2} - N$ beachtet (oder (21) anwendet), dann sieht man, daß es sich um eine 0- und eine 1-Zelle handelt.

Bemerkung 6. Nach einem Satz von J. STALLINGS [23] folgt aus der Homotopieäquivalenz $S^{n+2} - N \simeq S^1$, daß die n-Sphäre N sogar unverknotet eingebettet ist, wobei jedoch $n > 2$ vorauszusetzen ist. Für $n = 1$ folgt dies aus dem Dehnschen Lemma, und für $n = 2$ gilt die Unverknotetheit sogar unter schwächeren Voraussetzungen (vgl. Bemerkung 8).

Satz 8. *Es sei N eine differenzierbar in S^{n+2} eingebettete topologische n-Sphäre. Gilt für wenigstens eine der in Beispiel 2 definierten Invarianten ϱ_i $(0 < i < n + 2)$ die Ungleichung $\varrho_i \geqq k$, dann genügt $\gamma(N)$ der Ungleichung*

$$\gamma(N) \geqq 2(1 + k). \tag{22}$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen des Beweises von Satz 7 und setzen der Kürze halber $C_i(f \mid N) = c_i$. Es gilt dann

$$c_0 \geqq \varrho_1 + 1, \qquad c_q \geqq \varrho_{q+1} \quad (q = 1, \ldots, n), \qquad c_n \geqq \varrho_{n+1} + 1.$$

Da wir (21) auch auf $-f$ anwenden können, gilt außerdem

$$c_n \geqq \varrho_1 + 1, \qquad c_{n-q} \geqq \varrho_{q+1} \quad (q = 1, \ldots, n), \qquad c_0 \geqq \varrho_{n+1} + 1.$$

Wir haben einige Fälle zu unterscheiden:

1. $\varrho_1 \geqq k$ oder $\varrho_{n+1} \geqq k$.

Die Behauptung folgt dann aus $\gamma(N) \geqq c_0 + c_n$.

2. Es gibt ein $\varrho_i \geqq k$ mit $1 < i < n + 1$.

a) Gilt $i - 1 \neq n - (i - 1)$, so folgt die Behauptung aus

$$\gamma(N) \geqq c_0 + c_n + c_{i-1} + c_{n-(i-1)}.$$

b) Gilt $i - 1 = n - (i - 1)$ und ist $i - 1$ ungerade, dann wenden wir die Morse-Gleichung von N an: $\sum_q c_{2q} - \sum_q c_{2q+1} = 2$ und erhalten

$$\gamma(N) \geqq c_{i-1} + \sum_q c_{2q} \geqq k + k + 2.$$

c) Gilt $i - 1 = n - (i - 1)$ und ist $i - 1$ gerade, so können wir $i \geqq 3$ voraussetzen und die Morse-Ungleichung $c_i - c_{i-1} + c_{i-2} \geqq 0$ von N anwenden. Es gilt also $c_i + c_{i+2} \geqq k$ und daher

$$\gamma(N) \geqq c_0 + c_i + c_{i-2} + c_{i-1} + c_n \geqq 2(1 + k).$$

Folgerung 5. *Ist N eine differenzierbar eingebettete topologische n-Sphäre in S^{n+2} und ist eine der Invarianten ϱ_i $(0 < i \leqq n + 1)$ positiv, so gilt für die k-fache zusammenhängende Knotensumme von N*

$$\gamma(N \# \cdots \# N) \geqq 2(1 + k). \tag{23}$$

Beweis. Folgerung 5 ergibt sich unmittelbar aus Satz 8, wenn man die additive Eigenschaft (15) der entsprechenden Γ-Moduln beachtet.

Folgerung 6. *Ist N eine exotische n-Sphäre in S^{n+2} mit $n = 4i + 3$, so gilt für die k-fache zusammenhängende Summe von N*

$$\gamma(N \# \cdots \# N) \geqq 2(1 + k).$$

Beweis. Nach J. LEVINE [15] ist für eine exotische n-Sphäre $N \subset S^{n+2}$ mit $n = 4i + 3$ der zugehörige Homologiemodul der zyklischen Überlagerung des Knotenaußenraumes in der Dimension $2i + 2$ (zumindest über rationalen Koeffizienten) nicht trivial. Es gilt also $\varrho_{2i+2} > 0$, und die Behauptung folgt direkt aus Folgerung 5.

Wir wollen nun einige Beispiele angeben, für die in (23) die Gleichheit eintritt. Dazu benötigen wir das Verhalten von γ bezüglich der zusammenhängenden Summe von Untermannigfaltigkeiten. Für die Morse-Zahl $\mu(N_1 \# N_2)$ der zusammenhängenden Summe zweier Mannigfaltigkeiten gilt bekanntlich

$$\mu(N_1 \# N_2) \geqq \mu(N_1) + \mu(N_2) - 2.$$

Dies zeigt man, indem man die Vollkugel D^n diffeomorph auf die Umgebung eines Minimums (bzw. eines Maximums) einer Morse-Funktion f von N_1 (bzw. N_2) einbettet und durch Verheftung von $N_1 - \operatorname{Int} D^n$ und $N_2 - \operatorname{Int} D^n$ auf dem Rand eine geeignete Morse-Funktion auf $N_1 \# N_2$ induziert. Für die zusammenhängende Summe zweier Untermannigfaltigkeiten kann man ganz ähnlich vorgehen, um

$$\gamma(N_1) + \gamma(N_2) \geqq \gamma(N_1 \# N_2) + 2 \tag{24}$$

zu erhalten. Dazu betrachten wir eine Einbettung von D^{n+2} in S^{n+2} und eine minimale Morse-Funktion auf S^{n+2}, die auf N_1 eine Morse-Funktion mit $C(f \mid N_1) = \gamma(N_1)$ induziert. Mit $x_1, \ldots, x_{n+2}$ bezeichnen wir die Standardkoordinaten von D^{n+2}.
Durch eine geeignete Isotopie von N_1 können wir erreichen, daß $f \mid N_1$ das Minimum im Nullpunkt $0 \in D^{n+2}$ annimmt, ohne dabei $C(f \mid N_1)$ zu ändern. (Nimmt $f \mid N_1$ in $y \in N_1$ das Minimum an, so verschiebe man y längs einer Integralkurve von grad (f) in den Nullpunkt $0 \in D^{n+2}$ und setze diese Verschiebung geeignet auf eine kleine Umgebung von y fort.) Nach einer eventuell notwendigen Verkleinerung von D^{n+2} können wir voraussetzen, daß 0 der einzige kritische Punkt von $f \mid N_1$ in D^{n+2} ist. Durch eine geeignete Isotopie von N_1 längs der Niveauhyperflächen von f erreichen wir, daß $N_1 \cap D^{n+2}$ durch $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = 0$ beschrieben wird. Damit erhalten wir nichtnegative Morse-Funktion f_1 auf S^{n+2}, deren Einschränkung auf N_1 ebenfalls Morse-Funktion ist und für die $C(f_1) = 2$, $C(f_1 \mid N_1) = \gamma(N_1)$ und $f_1(x) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2$ auf D^{n+2} gilt. Auf (S^{n+2}, N_2) wählen wir eine Funktion f_2 mit den gleichen Eigenschaften. Nach Herausschneiden von D^{n+2} und geeignetem Verheften induzieren f_1 und $1 - f_2$ eine Funktion f auf $(S^{n+2}, N_1 \# N_2)$ mit $C(f \mid N_1 \# N_2) = \gamma(N_1) + \gamma(N_2) - 2$.

Beispiel 4. Wir spezialisieren Beispiel 3, indem wir das Polynom $f(z) = z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2$ wählen. Der zugehörige Umgebungsrand $W^{2n-1}(d) \subset S^{2n+1}$ wird gewöhnlich *Brieskornsche Mannigfaltigkeit* genannt und ist für $n = 1, 3, \ldots$, $d = 3, 5, \ldots$ eine topologische Sphäre (vgl. F. HIRZEBRUCH, K. H. MAYER [10], S. 78). Nach D. FERUS [5], Anhang, Satz 6, gibt es eine Morse-Funktion h auf S^{2n+1}, deren Einschränkung auf $W^{2n-1}(d)$ ebenfalls Morse-Funktion ist und für die $C(h) = 2$ und $C(h \mid W^{2n-1}(d)) = 4$ gilt. Nach Beispiel 3 gilt $\varrho_n \neq 0$ und folglich $\gamma(W^{2n-1}(d)) = 4$. Für die k-fache zusammenhängende Summe von $W^{2n-1}(d)$ erhalten wir nach Folgerung 5 und (24) $\gamma(W^{2n-1}(d) \# \cdots \# W^{2n-1}(d)) = 2(1+k)$ für $n = 1, 3, \ldots, d = 3, 5, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ Wir bemerken noch, daß keine zwei dieser eingebetteten topologischen Sphären auf die gleiche Weise verknotet sind. Dies ergibt sich leicht aus der Form der entsprechenden Γ-Moduln (vgl. J. Milnor [16], Theorem 9.1).

4. Anwendung auf die totale Absolutkrümmung

Es sei N eine geschlossene Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raumes E^N. Durch Parallelverschiebung der Einheitsnormalenvektoren von N in einen festen Punkt definiert man die Abbildung $s\colon S^\perp(N) \to S^{N-1}$ des Normalsphärenbündels von N in die Einheitshypersphäre. Es sei ω eine rotationsinvariante $(N-1)$-Form auf S^{N-1}, die durch die Bedingung $\int_{S^{N-1}} \omega = 1$ normiert sei. Die totale Absolutkrümmung von N ist dann durch

$$\tau(N) = \int_{S^\perp(N)} |s^*\omega| \tag{25}$$

definiert. Führen wir die Integration auf der Sphäre aus, dann erhalten wir

$$\tau(N) = \int_{S^{N-1}} \nu(e)\, \omega . \tag{26}$$

Hier ist $\nu(e)$ die Anzahl der Urbilder von $e \in S^{N-1}$ bezüglich der Abbildung s (vgl. z. B. R. Sulanke, P. Wintgen [24], Folgerung III.2.2). Ist e ein regulärer Wert von s, d. h., ist s in allen Urbildern von e regulär, dann ist die Einschränkung h_e der Höhenfunktion $\langle e, \cdot\rangle$ auf N eine Morse-Funktion, und $\nu(e)$ ist gerade die Anzahl $C(h_e)$ der kritischen Punkte von h_e. Daraus folgt

$$\tau(N) = \int_{S^{N-1}} C(h_e)\, \omega . \tag{27}$$

Im folgenden wollen wir stets diese Definition der totalen Absolutkrümmung benutzen. Aus (27) folgen unmittelbar die bekannten Ungleichungen von S. S. Chern und R. K. Lashof,

$$\tau(N) \geqq \mu(N) \geqq \sum \beta_i(N) . \tag{28}$$

Dieses Ergebnis wollen wir unter Berücksichtigung des Isotopietyps von N verschärfen. Für den Rest der Arbeit wollen wir voraussetzen, daß N mit der Kodimension 2 in E^{n+2} eingebettet sei. Da wir N gleichzeitig als Untermannigfaltigkeit der $(n+2)$-Sphäre ansehen wollen, werden wir mitunter E^{n+2} stillschweigend durch Hinzunahme eines Punktes ∞ schließen. Es sei $\tau_{\inf}(N)$ als das Infimum aller totalen Absolutkrümmungen der zu N isotopen Untermannigfaltigkeiten definiert.

Satz 9. *Es sei N eine n-dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit von E^{n+2}. Dann gilt*

$$\tau_{\inf}(N) = \gamma(N) .$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\tau(N) \geqq \gamma(N)$. Wir wählen einen Einheitsvektor e, so daß die zugehörige Höhenfunktion $\langle e, \cdot\rangle$ eine Morse-Funktion h_e auf N induziert und $C(h_e) \leqq \tau(N)$ gilt. Dies ist möglich wegen (27). Es sei g eine Morse-Funktion auf S^{n+2}

mit nur zwei kritischen Punkten, und $\varphi\colon U \to R^{n+2}$ sei eine surjektive Koordinatenabbildung von S^{n+2}, so daß die Kartenumgebung U keinen kritischen Punkt von g enthält und g auf U mit der ersten Koordinate x_1 von R^{n+2} übereinstimmt. Durch Einführung linearer Koordinaten in E^{n+2} identifizieren wir E^{n+2} mit R^{n+2}. Dabei soll die Höhenfunktion $\langle e, \cdot\rangle$ mit x_1 übereinstimmen. Auf diese Weise erhalten wir mit $\varphi^{-1}(N)$ eine Untermannigfaltigkeit N' in S^{n+2} mit $C(g \mid N') = C(h_e) \geqq \gamma(N')$. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $N \subset E^{n+2} \cup \{\infty\}$ und N' isotop sind, da N und N' beide als Bild von $N \subset E^{n+2}$ durch Einbettungen von E^{n+2} in S^{n+2} induziert werden und solche Einbettungen (bis auf eine Spiegelung) stets isotop sind (vgl. z. B. TH. BRÖCKER, K. JÄNICH [3]). Damit ergibt sich $\tau(N) \geqq \gamma(N') = \gamma(N)$. Wir haben nun noch zu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine zu N isotope Untermannigfaltigkeit M gibt, für die $\tau(M) < \gamma(N) + \varepsilon$ gilt. Dazu wählen wir eine Morse-Funktion h auf S^{n+2}, deren Einschränkung auf N ebenfalls Morse-Funktion ist mit $C(h) = 2$ und $C(h \mid N) = \gamma(N)$. Außerdem sollen die beiden kritischen Punkte von h nicht auf N liegen. Es sei J eine maximale Integralkurve des Gradientenfeldes von h und $\bar{J} = J \cup \{z_-, z_+\}$ ihre Abschließung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß J sich nicht mit N schneidet. (Wenn nötig, wird N etwas in der C_2-Topologie verschoben.) Wenn wir jedem Punkt $x \in S^{n+2} - \{z_-, z_+\}$ den Wert $h(x)$ und den Schnittpunkt der Integralkurve von grad(h) durch x mit einer festen Niveauhyperfläche von h zuordnen, dann erhalten wir eine Diffeomorphie

$$S^{n+2} - \{z_-, z_+\} \approx S^{n+1} \times [h(z_-), h(z_+)] \approx R \times S^{n+1}.$$

Die Einschränkung auf $S^{n+2} - \bar{J}$ liefert eine Diffeomorphie $\psi\colon S^{n+2} - \bar{J} \to R \times R^{n+1} = E^{n+2}$. Nach Konstruktion ist $\psi(N)$ isotop zu N in E^{n+2}, und die x_1-Koordinate $x_1 = h \circ \psi^{-1}$ ist eine Höhenfunktion mit $\gamma(N)$ kritischen nicht ausgearteten Punkten auf $M = \psi(N)$. Durch Dehnung von M in x_1-Richtung erhalten wir die gesuchte Mannigfaltigkeit. Ist nämlich $D_\lambda\colon R^{n+2} \to R^{n+2}$ durch $D_\lambda(x) = (\lambda x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ definiert, so gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tau\big(D_\lambda(M)\big) = C(x_1 \mid M)$$

(vgl. D. FERUS [6], Lemma 3.16).

Satz 9 gestattet es, die Ergebnisse des vorigen Abschnittes als Sätze über die totale Absolutkrümmung zu interpretieren:

Folgerung 7. *Ist N eine n-dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit des E^{n+2}, $n \geqq 2$, und ϱ die minimale Erzeugendenzahl der Fundamentalgruppe des Komplementes, so gilt*

$$\tau(N) \geqq \mu(N) + 4(\varrho - 1).$$

Folgerung 8 (R. Fox [7]). *Für die totale Krümmung einer geschlossenen Kurve in E^3 gilt $\tau(N) \geqq 2\varrho$.*

Folgerung 9. *Es sei N eine differenzierbar eingebettete topologische n-Sphäre in E^{n+2}. Gilt $\varrho_i \geqq k$ für eine der Knoteninvarianten ϱ_i $(i = 1, \ldots, n+1)$, so erfüllt die totale Absolutkrümmung von N die Ungleichung*

$$\tau(N) \geqq 2(1 + k).$$

Folgerung 10. *Es sei N eine differenzierbar eingebettete topologische n-Sphäre in E^{n+2}. Ist eine der Knoteninvarianten ϱ_i nichttrivial, so gilt für die zusammenhängende Summe* *von k Exemplaren von N*

$$\tau_{\inf}(N \# \cdots \# N) \geqq 2(1 + k).$$

Bemerkung 8. Die Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn $n = 4k + 3$ und N exotisch ist oder wenn N ein Umgebungsrand einer algebraischen Singularität ist. In diesem Fall nehmen wir einen Punkt aus $S^{n+2} - N$ heraus, um N als Untermannigfaltigkeit von E^{n+2} zu betrachten. Die Isotopieinvariante $\tau_{\inf}(N)$ ist dann wohldefiniert.

Folgerung 11. *Für die Brieskornsche Mannigfaltigkeit* $W^{2n-1}(d)$ $(n = 1, 3, \ldots;$ $d = 3, 5, \ldots)$ *gilt* $\tau_{\inf}\big(\underbrace{W^{2n+1}(d) \# \cdots \# W^{2n-1}(d)}_{k\text{-mal}}\big) = 2(1 + k)$.

Bemerkung 9. Wählen wir $n = 1$, $d = 3$, dann erhalten wir $\tau_{\inf} = 2(1 + k)$ für die k-fache zusammenhängende Summe der *Kleeblattschlinge*. Dies wurde bereits von R. Fox [7] mit anderen Methoden gezeigt. Wählen wir dagegen $n \equiv 1 \bmod 4$, $d = 3$ (oder allgemeiner n und d so, daß $W^{2n-1}(d)$ exotisch ist) und $k = 1$, dann erhalten wir gerade die von D. Ferus angegebenen Beispiele verknoteter Sphären mit $\tau_{\inf} = 4$ (vgl. D. Ferus [6], Satz 5.5).

Bemerkung 10. Nach dem Unverknotetheitssatz von D. Ferus gilt für eine verknotete n-Sphäre N in E^{n-2} stets $\tau(N) \geqq 4$. (Unlängst gab R. Rochowski [22] einen neuen Beweis an. Man kann auch Satz 9 und Folgerung 4 zum Beweis benutzen (vgl. Bemerkung 6).) Die oben angegebenen Beispiele zeigen, daß diese Ungleichung für $n = 1, 5, 9, \ldots$ das bestmögliche Resultat liefert. Dagegen gilt für eine verknotete 2-Sphäre in S^4 die Ungleichung $\tau(N) \geqq 6$. Nach F. Hosokawa [11], Lemma 4, hat nämlich jede Morse-Funktion f auf N, die Einschränkung einer Höhenfunktion von E^4 ist, mindestens zwei Sattelpunkte. Wegen $\chi(N) = 2$ gibt es noch mindestens vier weitere kritische Punkte von f, so daß $C(f) \geqq 6$ folgt. Bei R. Fox [8] findet man Beispiele für verknotete 2-Sphären, die Höhenfunktionen mit sechs kritischen Punkten besitzen. Für sie gilt also $\tau_{\inf} = 6$. Weitere Beispiele kann man aus Knoten in E^3 mit Hilfe der Artinschen Verdrehungskonstruktion erhalten (vgl. P. Wintgen [27]).

Der Umgebungsrand des Polynoms $z_0^p + z_1^q$ (p, q teilerfremd) liefert den Torusknoten $K_{p,q}$ vom Typ (p, q). Die Knotengruppe hat bekanntlich zwei Erzeugende a, b mit der Relation $a^p = b^q$. Wegen Folgerung 8 gilt also $\tau(K_{p,q}) \geqq 4$. Tatsächlich gilt aber

Satz 10. *Für den Torusknoten* $K_{p,q}$ *gilt* $\tau_{\inf}(K_{p,q}) = 2 \min(p, q)$.

Beweis. Es sei T_0 die Rotationsfläche in R^3, welche wir erhalten, wenn wir einen Kreis in der x_1, x_3-Ebene um die x_3-Achse rotieren lassen. Die Punkte von T_0 identifizieren wir mit den beiden Winkeln, welche die Rotation um die x_3-Achse bzw. die Rotation um die Seele des Torus beschreiben. Wir können dann $K_{p,q}$ als Bild der Einbettung $t \to (pt, qt)$ von S^1 in T_0 definieren. Die Einschränkung der x_3-Koordinate auf $K_{p,q}$ ist die Morse-Funktion $\cos qt$ und hat $2q$ kritische Punkte. Daher gilt $\tau_{\inf}(K_{p,q}) \leqq 2q$. Da wir $q \leqq p$ voraussetzen können ($K_{p,q}$ und $K_{q,p}$ sind äquivalent), gilt also $\tau_{\inf}(K_{p,q}) \leqq 2 \min(p, q)$. Um die Ungleichung in der anderen Richtung zu zeigen, wenden wir einen Diffeomorphismus von R^3 auf das Paar $(T_0, K_{p,q})$ an und betrachten das Bild (T, K). T berandet einen Volltorus V. Wir nennen eine einfach geschlossene Kurve L auf T einen *Längenkreis* (bzw. *Breitenkreis*), wenn L nicht nullhomolog in T, aber nullhomolog in V (bzw. in $R^3 - V$) ist.
Es sei nun ein Einheitsvektor e so gewählt, daß die zugehörige Höhenfunktion h sowohl auf T als auch auf K eine Morse-Funktion induziert. Wir sind fertig, wenn wir $C(h \mid K) \geqq \min(p, q)$ zeigen können.

Hilfssatz 9. *Es gibt eine zu e senkrechte Ebene E, so daß $E \cap T$ einen (nicht notwendig glatten) Breiten- oder Längenkreis enthält.*

Beweis. Es sei A (bzw. B) die Menge aller $t \in \mathbf{R}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt mindestens einen Längenkreis, der ganz in dem Halbraum $h \leqq t$ (bzw. $h \geqq t$) liegt. Es sei $a = \inf A$ und $b = \sup B$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Es gilt $b < a$. Wir wählen ein t zwischen a und b, so daß sich $E = h^{-1}(t)$ und T transversal schneiden. Nach Konstruktion schneidet E alle Längenkreise von T. Außerdem zerfällt $E \cap T$ in endlich viele disjunkte einfach geschlossene Kurven. Von diesen ist mindestens eine nicht kontrahierbar. (Sonst könnte man diese Kurven auf T isotop in eine kleine Umgebung eines Punktes verschieben, und dies wäre ein Widerspruch dazu, daß jeder Längenkreis eine dieser Kurven trifft.) Da diese Kurve eben ist, kann sie nur ein Längen- oder ein Breitenkreis sein. (Die übrigen nicht kontrahierbaren Kurven sind alle verknotet und können daher nicht eben sein.)

2. Es gilt $a \leqq b$. In diesem Fall liegt in den beiden Halbräumen $h \leqq a$ und $h \geqq a$ mindestens ein Längenkreis. Die Ebene $E = h^{-1}(a)$ besteht aus (nicht notwendig disjunkten) einfach geschlossenen Kurven, die nicht alle nullhomolog sein können. Man kann dann wie oben schließen, daß ein Längen- oder ein Breitenkreis darunter ist (wobei letzteres natürlich ausschließen können).

Es sei nun L ein Längenkreis in $E \cap T$. Wir denken uns L und K orientiert, um sie als 1-Zyklen auf T zu interpretieren. Ihre Schnittzahl beträgt p (oder $-p$), und daraus können wir leicht schließen, daß $h \mid K$ mindestens p Maxima hat. Für den Fall, daß L ein Breitenkreis ist, kann man analog schließen. In jedem Fall gilt also $C(h \mid K) \geqq 2 \min (p, q)$.

Bemerkung 11. Die Verallgemeinerung des obigen Resultates auf höhere Dimensionen (d. h. die Berechnung von $\tau_{\inf}$ für die Umgebungsränder der Polynome $z_0^p + z_1^q + z_2^2 + \cdots + z_n^2$) liefert vielleicht einen Zugang zu dem von D. FERUS gestellten Problem $k'(\Sigma^n) = \inf \tau(N)$ zu berechnen, wobei N alle Einbettungen einer gegebenen exotischen Sphäre Σ^n in E^{n+2} durchläuft (D. FERUS [6], 5.6.).

Die totale Absolutkrümmung wurde bereits von verschiedenen Autoren für PL-Untermannigfaltigkeiten studiert, und es gibt viele Analogien zwischen dem PL- und dem differenzierbaren Fall, die zum Teil von einer gemeinsamen Grundlage herrühren (N. H. KUIPER [13]). Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß sich diese Analogien nicht ohne weiteres auf höherdimensionale Knoten ausdehnen lassen.

Beispiel 5. Es sei K ein polygonaler Knoten in R^3. In R^4 wählen wir einen Punkt z_+ im oberen von R^3 berandeten Halbraum und einen Punkt z_- in dem anderen Halbraum. Die Suspension von K über z_+ und z_- ist eine polygonale verknotete Sphäre S in R^4, deren Knotengruppe $\pi_1(R^4 - S)$ gleich der Knotengruppe von K ist (vgl. J. J. ANDREWS, M. L. CURTIS [1]). Lassen wir z_+ und z_- senkrecht von R^3 weg gegen unendlich wandern, dann strebt die totale Absolutkrümmung von S gegen 2, obwohl S auf recht komplizierte Weise verknotet sein kann.

LITERATUR

[1] ANDREWS, J. J., and M. L. CURTIS: Knotted 2-spheres in 4-spheres. Ann. Math. *70* (1959), 565–571.
[2] BORSUK, K.: Sur la courbure totale de courbes fermées. Ann. Soc. Polon. Math. *20* (1947), 251–265.
[3] BRÖCKER, TH., und K. JÄNICH: Einführung in die Differentialtopologie. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[4] FARY, I.: Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud. Bull. Soc. Math. France *77* (1949), 128—138.
[5] FERUS, D.: Über die absolute Totalkrümmung höher-dimensionaler Knoten. Math. Ann. *171* (1967), 81—86.
[6] FERUS, D.: Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie. Lecture Notes in Math. 66, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968.
[7] FOX, R.: On the total curvature of some tame knots. Ann. Math. *52* (1950), 258—260.
[8] FOX, R.: A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds. Proc. Top. Inst. Univ. Georgia, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
[9] FRIEDRICH, TH.: m-Funktionen und ihre Anwendung auf die totale Absolutkrümmung. Math. Nachr. *67* (1975), 281—301.
[10] HIRZEBRUCH, F., und K. H. MAYER: $O(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Lecture Notes in Math. 57, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968.
[11] HOSOKAWA, F.: On trivial 2-spheres in 4-spheres. Quart. J. Math. Oxford *19* (1968), 249—256.
[12] JANKOWSKI, A., and R. RUBINSZTEIN: Functions with nondegenerate critical points on manifolds with boundary. Comm. Math. *16* (1972), 99—112.
[13] KUIPER, N. H.: Morse relations for curvature and tightnes. Proc. Liverpool Singularities Symp. II, Lecture Notes in Math. 209, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971.
[14] LANGEVIN, R., and H. ROSENBERG: On curvature integrals and knots. Topology *15* (1976), 405—416.
[15] LEVINE, J.: Polynomial invariants of knots of codimension two. Ann. Math. *84* (1966), 537—554.
[16] MILNOR, J.: On the total curvature of knots. Ann. Math. *52* (1950), 248—257.
[17] MILNOR, J.: Morse Theory. Princeton Univ. Press, Princeton N. J. 1963 (russ. Übers., mit einem Anhang von D. W. ANOSOV, Moskau 1965).
[18] MILNOR, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, Princeton N. J. 1968.
[19] MORSE, M.: The existence of polar nondegenerate functions on differentiable manifolds. Ann. Math. *71* (1960), 352—383.
[20] MORTON, H.: A criterion for an embedded surface in R^3 to be unknotted. Univ. of Liverpool, preprint.
[21]
[22] ROCHOWSKI, M.: The Frenét frame of an immersion. J. Diff. Geometry *10* (1975), 181 to 200.
[23] STALLINGS, J.: On topologically unknotted spheres. Ann. Math. *77* (1963), 490—503.
[24] SULANKE, R., und P. WINTGEN: Differentialgeometrie und Faserbündel. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
[25] SUNDAY, D.: The total curvature of knotted spheres. Bull. Amer. Math. Soc. *82* (1976), 140—142.
[26] WINTGEN, P.: On the total curvature of knotted spheres. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. phys. Vol. XXVI, No. 3 (1978), 249—253.
[27] WINTGEN, P.: On the total curvature of surfaces in E^4. Coll. Math. Vol. XXXIX (1978), Fasc. 2, 289—296.

Manuskripteingang: 18. 10. 1977

VERFASSER:
PETER WINTGEN, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin