Beiträge zur Algebra und Geometrie
9 (1980), 83–101

Immersionen höherer Ordnung kompakter Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume

HELGA DLUBEK und THOMAS FRIEDRICH

§ 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der von K. H. MAYER bewiesene Ganzzahligkeitssatz (vgl. [5]) benutzt, um die Frage der Existenz von Immersionen höherer Ordnung in euklidische Räume zu untersuchen. Grundlegende Eigenschaften dieser Immersionen sind in § 2 angegeben. Durch Anwendung des Ganzzahligkeitssatzes auf das Tangentialbündel höherer Ordnung erhalten wir in § 4 eine Reihe von Invarianten, welche Obstruktionen gegen die Existenz von Immersionen höherer Ordnung ergeben. In § 5 und § 6 berechnen wir mit dieser Methode Obstruktionen gegen die Existenz von p-regulären Immersionen der komplex-projektiven Ebene, von 2-regulären Immersionen des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes sowie von p-regulären Immersionen der reellen Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{5,2}$.

§ 2. Grundlegende Eigenschaften regulärer Immersionen höherer Ordnung

Es sei X^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
Das *Tangentialbündel p-ter Ordnung* von X definieren wir als differenzierbares Vektorbündel, welches durch die lokalen Funktionale

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}, \quad 1 \leqq k \leqq p, \quad 1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq n,$$

erzeugt wird. Wir bezeichnen es mit $T_p(X)$. Die Dimension dieses Vektorbündels ist $\nu(n, p) = \binom{n+p}{p} - 1$.
Es seien X^n und Y^N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f: X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Das *Differential p-ter Ordnung* von f, $T_p(f): T_p(X) \to T_p(Y)$, ist definiert durch $(T_p f)\, T = T \circ f^*$, wobei f^* durch Superposition auf Funktionen wirkt. Für $p \geqq 1$ zerfällt die exakte Folge

$$0 \to T_p(X) \to T_{p+1}(X) \to S^{p+1}TX \to 0. \tag{1}$$

S^kTX bezeichnet dabei das k-fache symmetrische Tensorprodukt von TX. Die aufspaltenden Abbildungen $D_p: T_{p+1}(X) \to T_p(X)$ entsprechen kovarianten Ableitungen höherer Ordnung (siehe z. B. [6]). Aus (1) folgt insbesondere

$$T_p(X) = \bigoplus_{k=1}^{p} S^k TX. \tag{2}$$

Es sei (D_k), $k = 1, \ldots, p-1$, eine Folge von Aufspaltungen von (1) über dem Raum Y und $D = D_1 \circ \cdots \circ D_{p-1}\colon T_p(Y) \to TY$. Eine differenzierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *p-reguläre Immersion (bezüglich* (D_k)*)*, wenn der Bündelmorphismus $D \circ T_p(f)\colon T_p(X) \to TY$ maximalen Rang hat. Es sei $(DT_pf)\colon T_p(X^n) \to f^*TY^N$ der entsprechende Morphismus der Bündel über X. Dann erhält man Vektorbündel

$$N_p := \operatorname{Coker}(DT_pf) \quad \text{für} \quad \nu(n, p) \leqq N,$$

$$K_p := \operatorname{Ker}(DT_pf) \quad \text{für} \quad \nu(n, p) \geqq N,$$

für die

$$T_p(X) = f^*(TY) \oplus K_p, \quad \nu(n, p) \geqq N,$$

$$T_p(X) \oplus N_p = f^*(TY), \quad \nu(n, p) \leqq N,$$

gilt. Aus Resultaten von E. A. Feldman (vgl. [1]) folgt, daß es in den Bereichen $N \geqq \nu(n, p) + n$ und $N \leqq \nu(n, p) - n$ in jeder Homotopieklasse p-reguläre Immersionen gibt. Zu untersuchen ist also der „kritische Bereich“ $\nu(n, p) - n < N < \nu(n, p) + n$, für den keine solche p-reguläre Immersion zu existieren braucht. Es gibt eine Reihe von Arbeiten, die Obstruktionen gegen die Existenz von p-regulären Immersionen gewisser Mannigfaltigkeiten X und Y in diesem kritischen Bereich angeben (siehe z. B. [2, 7]). Die Methode dieser Arbeiten beruht im wesentlichen auf der Anwendung der Stiefel-Whitney- und Pontrjagin-Klassen auf die Gleichungen

$$T_p(X) \oplus N_p = f^*(TY),$$

$$T_p(X) = f^*(TY) \oplus K_p,$$

wodurch man aus der Kenntnis der entsprechenden Klassen von TX und TY bzw. aus Dimensionsargumenten Obstruktionen erhält. In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir Obstruktionen gegen die Existenz von p-regulären Immersionen mit Hilfe der Ganzzahligkeitssätze von K. H. Mayer.

§ 3. Berechnung der zweiten Stiefel-Whitney-Klasse der k-fachen Symmetrisierung $S^k(E)$ eines reellen, orientierten Vektorbündels E

Wir benötigen für die Anwendung der Ganzzahligkeitssätze die 2. Stiefel-Whitney-Klasse des Tangentialbündels p-ter Ordnung $w_2(T_pX)$. Nach der Formel (2) aus § 2 ist $T_pX = \bigoplus_{k=1}^{p} S^kTX$. Wir betrachten deshalb in diesem Abschnitt folgende Problemstellung:

E sei ein reelles, n-dimensionales, orientierbares Vektorbündel über X, $S^k(E)$ seine k-fache Symmetrisierung und $S_p(E) = \bigoplus_{k=1}^{p} S^k(E)$. Zu berechnen ist die 1. und 2. Stiefel-Whitney-Klasse von $S_p(E)$. Durch eine einfache Induktion über n erhält man

Lemma 1. *Es seien $E_1, \ldots, E_n$ eindimensionale Vektorbündel über Y. Dann gilt*

$$S^k(E_1 + \cdots + E_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}.$$

Zur Berechnung der Stiefel-Whitney-Klassen der k-fachen Symmetrisierung $S^k(E)$ verwenden wir das Aufspaltungsprinzip (vgl. [4]). Es sei $f\colon Y \to X$ eine aufspaltende Abbildung für E, d. h.:

1. f^*E ist die Summe eindimensionaler Vektorbündel $f^*E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
2. $f^*\colon H^*(X; Z_2) \to H^*(Y; Z_2)$ ist injektiv.

Wegen Lemma 1 gilt

$$f^*\big(S^k(E)\big) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}. \tag{1}$$

Wir wenden auf die Aufspaltung von $f^*(E)$ die Stiefel-Whitney-Klassen an und erhalten

$$f^*\big(w(E)\big) = \prod_{i=1}^{n} \big(1 + w_1(E_i)\big). \tag{2}$$

Es sei $x_i = w_1(E_i)$. Formel (2) besagt also, daß $f^*\big(w_i(E)\big)$ die i-te elementarsymmetrische Funktion $\sigma_i^n(x_1, \ldots, x_n)$ in den Unbestimmten x_i ist. Durch Anwenden der Stiefel-Whitney-Klassen auf (1) erhalten wir

$$f^*\big(w(S^k(E))\big) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist symmetrisch in den Klassen $x_1, \ldots, x_n$, läßt sich also als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_i^n(x_1, \ldots, x_n) = f^*\big(w_i(E)\big)$ ausdrücken. Wir bezeichnen mit P_k^n das Polynom aus $\mathbf{Z}_2[y_1, \ldots, y_n]$, für das

$$P_k^n\big(\sigma_1^n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n^n(x_1, \ldots, x_n)\big) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})$$

gilt. Wir erhalten wegen der Injektivität von f^* demnach

$$w\big(S^k(E)\big) = P_k^n\big(w_1(E), \ldots, w_k(E)\big). \tag{3}$$

Folgerung 1. *Die Vektorbündel $S^k(E)$ und somit das Bündel $S_p(E)$ sind orientierbar.*

Beweis. Aus der Gleichung (3) sieht man, daß $w_1\big(S^k(E)\big)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $w_1(E)$ ist. Auf Grund der Orientierbarkeit von E verschwindet $w_1(E)$ und somit auch $w_1\big(S^k(E)\big)$. Wir berechnen jetzt $w_2\big(S^k(E)\big)$. Wiederum aus Formel (3) folgt

$$w_2\big(S^k(E)\big) = a_k^n w_2(E) + b_k^n w_1^2(E) = a_k^n w_2(E).$$

Wir müssen also im Polynom $P_k^n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ den Koeffizienten von σ_2 bestimmen. Aus Symmetriegründen genügt es, den Koeffizienten von x_1x_2 im Polynom $\prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})$ zu berechnen.

Die folgende Rechnung erfolgt modulo 2 und modulo Faktoren, in denen x_1x_2 nicht auftritt. Zuerst spalten wir das Polynom P_k^n in das Produkt einzelner Polynome auf:

$$\begin{aligned}
P_k^n &\equiv \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \cdot \prod_{2 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_2 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \\
&\equiv \prod_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + 2x_1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \cdot \prod_{2 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_1 + x_2 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \\
&\times \prod_{3 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \cdot \prod_{2 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + 2x_2 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \\
&\times \prod_{3 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_2 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}) \\
&\equiv P_{k-2}^n \cdot \prod_{3 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} (1 + x_1 + x_2 + x_1x_2) \cdot \prod_{2 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq n} \big(1 + x_1 + x_2 + x_1(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}})\big).
\end{aligned}$$

Es bezeichne Q_k^n das Polynom

$$\prod_{3\leq i_1\leq\cdots\leq i_{k-1}\leq n}(1+x_1+x_2+x_1x_2)\cdot\prod_{2\leq i_1\leq\cdots\leq i_{k-1}\leq n}\left(1+x_1+x_2+x_1(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{k-1}})\right).$$

Dann erhalten wir $P_k^n \equiv P_{k-2}^n \cdot Q_k^n$, wobei P_{k-2}^n eine in $x_1, \ldots, x_n$ symmetrische Funktion ist, welche auf Grund der Orientierbarkeit von E in ihrer „kanonischen" Darstellung nicht von σ_1^n abhängt.

Lemma 2. *Es sei P ein symmetrisches Polymon in $x_1, \ldots, x_n$, und P lasse sich durch die elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1^n, \ldots, \sigma_n^n$ unter Ausschluß von σ_1^n darstellen, d. h. $P = R(\sigma_2^n, \ldots, \sigma_n^n)$. Weiterhin gelte $P(0, \ldots, 0) = 1$. Es sei a_p der Koeffizient von x_1x_2 in P. Q sei ein beliebiges Polynom mit $Q(0, \ldots, 0) = 1$, und es bezeichne a_Q seinen Koeffizienten bei x_1x_2.*
Für den Koeffizienten a_{PQ} von x_1x_2 in PQ gilt dann

$$a_{PQ} = a_P + a_Q.$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung über P gilt

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(0, \ldots, 0) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x_2}(0, \ldots, 0).$$

Aus

$$\frac{\partial^2(PQ)}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\, \partial x_2}\, Q + \frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\, \partial x_2}\, P$$

folgt dann die Behauptung unmittelbar.
Aus diesem Lemma ergibt sich, daß der Koeffizient a_k^n von x_1x_2 in P_k^n gleich der Summe von a_{k-2}^n und dem Koeffizienten q_k^n bei x_1x_2 im Polynom Q_k^n ist. Um diesen Koeffizienten q_k^n berechnen zu können, bemerken wir erst

Lemma 3. *Der Koeffizient modulo 2 bei x_1x_2 im Polynom $\prod_{i=1}^{k}(1 + x_1 + x_2 + \beta_i x_1x_2)$ ist $\sum_{i=1}^{k} \beta_i$.*

Beweis. Es sei $R_k = \prod_{i=1}^{k}(1 + x_1 + x_2 + \beta_i x_1 x_2)$. Die Behauptung gilt für $k = 1$ trivialerweise, es gelte das Lemma dann auch für k. Aus $R_k(1 + x_1 + x_2 + \beta_{k+1}x_1x_2) = R_{k+1}$ erhält man

$$\frac{\partial^2 R_{k+1}}{\partial x_1\, \partial x_2}(0,\ldots,0) = \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_1\, \partial x_2}(0,\ldots,0) + \frac{\partial R_k}{\partial x_1}(0,\ldots,0) + \frac{\partial R_k}{\partial x_2}(0,\ldots,0) + \beta_{k+1}.$$

Wegen $\frac{\partial R_k}{\partial x_1}(0, \ldots, 0) = k = \frac{\partial R_k}{\partial x_2}(0, \ldots, 0)$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

Aus Lemma 3 ergibt sich insbesondere

$$q_k^n = \binom{n-2+k-1-1}{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i \binom{n-2+k-2-i-1}{k-2-i}.$$

Mittels einfacher Induktion beweist man

Lemma 4. *Für ganze Zahlen $r \geq 0$, $s \geq 1$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{s} i\binom{r+s-i}{r} = \binom{r+s+1}{r+2}.$$

Mit $r = n - 3$ und $s = k - 2$ erhalten wir daraus $q_k^n = \binom{n+k-4}{n-3} + \binom{n+k-4}{n-1}$.

Addieren wir $2\binom{n+k-4}{n-2} \equiv 0$, so folgt

$$\begin{aligned} q_k^n &\equiv \binom{n+k-4}{n-3} + \binom{n+k-4}{n-2} + \binom{n+k-4}{n-2} + \binom{n+k-4}{n-1} \\ &\equiv \binom{n+k-3}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-1} \equiv \binom{n+k-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Für $k \geqq 3$ haben wir also folgende Rekursionsformel:

$$a_k^n \equiv a_{k-2}^n + \binom{n+k-2}{n-1}.$$

Die Anfangswerte a_1^n und a_2^n berechnen wir direkt:

$$a_1^n = 1, \quad \text{da} \quad P_1^n(\sigma_1^n, \ldots, \sigma_n^n) = \prod_{1 \leqq i \leqq n} (1 + x_i) = 1 + \sigma_1^n + \sigma_2^n + \cdots + \sigma_n^n.$$

$$\begin{aligned} a_2^n \equiv n, \quad \text{da} \quad P_2^n &= \prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} (1 + x_i + x_j) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (1 + x_i + x_j) \\ &= (1 + x_1)^{n-2} (1 + x_2)^{n-2} (1 + x_1 + x_2) \\ &= \big(1 + (n-2)\,x_1\big)\big(1 + (n-2)\,x_2\big)(1 + x_1 + x_2) \equiv n\,x_1 x_2. \end{aligned}$$

Die Auswertung der Rekursionsformel liefert, daß die 2. Stiefel-Whitney-Klassen von $S^k(E)$ wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} &1.\ k = 2r: && w_2\big(S^k(E)\big) = \left\{n + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{n+2i}{n-1}\right\} w_2(E), \\ &2.\ k = 2r+1: && w_2\big(S^k(E)\big) = \left\{1 + \sum_{i=1}^{r} \binom{n+2i-1}{n-1}\right\} w_2(E). \end{aligned} \tag{4}$$

Mit Hilfe des folgenden Lemmas lassen sich die Summen zusammenfassen.

Lemma 5. *Es seien n, m, k nichtnegative ganze Zahlen. Dann gilt*

$$\binom{2n+k}{2m} \equiv \binom{n + \left[\frac{k}{2}\right]}{m} \bmod 2.$$

Beweis. Wir rechnen im Polynomring $\mathbf{Z}_2[t]$. Es sei $k = 2t + q$, $0 \leqq q \leqq 1$. Dann gilt

$$(1 + t)^{2n+k} = (1 + t^2)^{n+t} (1 + t)^q.$$

Der Koeffizient von t^{2m} in diesen Polynomen ist $\binom{2n+k}{2m}$ bzw. $\binom{n+t}{m}$. Wegen $t = \left[\frac{k}{2}\right]$ erhalten wir die Behauptung.

Es gilt deshalb

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1+2i}{2i} &\equiv \sum_{i=1}^{r} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right] + i}{i} = \binom{r + \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1}{r} - 1 \\ &\equiv \binom{2r+n+1}{2r} - 1. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\sum_{i=1}^{r-1} \binom{n+2i}{n-1} = \sum_{i=1}^{2r-1} \binom{n+i}{n-1} - \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1+2i}{n-1}.$$

Also haben wir

$$\sum_{i=1}^{r-1} \binom{n+2i}{n-1} = \binom{2r+n}{2r} - 1 - n - \binom{2r+n+1}{2r} - 1 \equiv \binom{2r+n}{2r-1} - n.$$

Aus den Formeln (4) erhalten wir damit

Satz 1. *Die 2. Stiefel-Whitney-Klasse der k-fachen Symmetrisierung $S^k(E)$ eines reellen, n-dimensionalen, orientierbaren Vektorbündels E ist*

$$w_2(S^k(E)) = \binom{k+n}{n+1} w_2(E).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die 2. Stiefel-Whitney-Klasse des Bündels $S_p(E)$.

Folgerung 2. *Die 2. Stiefel-Whitney-Klasse von $S_p(E)$ ist*

$$w_2(S_p(E)) = \binom{p+n+1}{n+2} w_2(E).$$

Beweis. Nach der Definition von $S_p(E)$ gilt $S_p(E) = \bigoplus_{k=1}^{p} S^k(E)$. Auf Grund von Folgerung 1 sind die Bündel $S^k(E)$ orientierbar.
Daraus folgt

$$w_2(S_p(E)) = \sum_{k=1}^{p} w_2(S^k(E)) = \sum_{k=1}^{p} \binom{n+k}{n+1} w_2(E) = \sum_{k=1}^{p} \binom{n+1+k}{k} w_2(E)$$
$$= \binom{p+n+1}{n+2} w_2(E).$$

Folgerung 3. *Für die 2. Stiefel-Whitney-Klasse des Tangentialbündels p-ter Ordnung einer geschlossenen, orientierbaren, differenzierbaren Mannigfaltigkeit X^{2n} der Dimension 2n gilt*

$$w_2(T_pX) = \binom{p+2n+1}{2n+2} w_2(X).$$

§ 4. Topologische Obstruktionen gegen die Existenz einer regulären Immersion höherer Ordnung in euklidische Räume

Es sei X^{2n} eine geschlossene, orientierbare und differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, ξ^k ein k-dimensionales reelles orientierbares Vektorbündel über X^{2n}, η^l ein l-dimensionales komplexes Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit. Das Element $d \in H^2(X; \mathbf{Z})$ sei so gewählt, daß seine $\mathbf{Z}_2$-Reduktion kongruent zur Summe der Stiefel-Whitney-Klassen von X und ξ ist:

$$d \equiv w_2(\xi) + w_2(X) \bmod 2.$$

Die Zahl s bezeichne den größten ganzen Teil von $\frac{k}{2}$: $s = \left[\frac{k}{2}\right]$. $\hat{\mathscr{A}}(X)$ sei die $\hat{\mathscr{A}}$-Klasse

der Mannigfaltigket X (vgl. [3]). Weiterhin ordnen wir dem Bündel ξ eine rationale Kohomologieklasse wie folgt zu:
Gilt für die Pontrjagin-Klasse des Bündels ξ

$$p(\xi) = \prod_{i=1}^{s} (1 + x_i^2),$$

so sei die Klasse $\mathscr{C}(\xi)$ gegeben durch

$$\mathscr{C}(\xi) = \prod_i \cosh\left(\frac{x_i}{2}\right).$$

Unter den genannten Voraussetzungen bewies K. H. Mayer (vgl. [5]) folgende Ganzzahligkeitssätze:

Theorem 1. $2^s\{e^{d/2}ch(\eta)\,\mathscr{C}(\xi)\,\hat{\mathscr{A}}(X)\}\,[X]$ *ist eine ganze Zahl.*

Theorem 2. *Es sei* $w_2(X) = w_2(\xi)$, *und es gelte einer der acht Fälle*

1. $k = 2s$,	$n \equiv 0 \quad (4)$,	$s \equiv 0, 1, 3 \quad (4)$,	η *quaternionisch*,
2. $k = 2s$,	$n \equiv 0 \quad (4)$,	$s \equiv 1, 2, 3 \quad (4)$,	η *reell*,
3. $k = 2s$,	$n \equiv 2 \quad (4)$,	$s \equiv 0, 1, 3 \quad (4)$,	η *reell*,
4. $k = 2s$,	$n \equiv 2 \quad (4)$,	$s \equiv 1, 2, 3 \quad (4)$,	η *quaternionisch*,
5. $k = 2s + 1$,	$n \equiv 0 \quad (4)$,	$s \equiv 0, 3 \quad (4)$,	η *quaternionisch*,
6. $k = 2s + 1$,	$n \equiv 0 \quad (4)$,	$s \equiv 1, 2 \quad (4)$,	η *reell*,
7. $k = 2s + 1$,	$n \equiv 2 \quad (4)$,	$s \equiv 0, 3 \quad (4)$,	η *reell*,
8. $k = 2s + 1$,	$n \equiv 2 \quad (4)$,	$s \equiv 1, 2 \quad (4)$,	η *quaternionisch*.

Dann ist $2^{s-1}\{ch(\eta)\,\mathscr{C}(\xi)\,\hat{\mathscr{A}}(X)\}\,[X]$ *eine ganze Zahl.*

Im weiteren betrachten wir eine geschlossene, orientierte, differenzierbare Mannigfaltigkeit X^{2n}. Wir definieren topologische Obstruktionen gegen die Existenz einer p-regulären Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ im kritischen Bereich $\nu(2n, p) - 2n < N < \nu(2n, p) + 2n$.

1. Fall. Es sei $\nu(2n, p) \leqq N < \nu(2n, p) + 2n$. Aus der Existenz einer p-regulären Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ folgt dann

$$T_pX^{2n} \oplus N_p \equiv \Theta^N. \tag{1}$$

Wir setzen in Theorem 1 für das Bündel ξ das Bündel N_p ein und erhalten, daß

$$P(n, N, p; d, \eta) := 2^{\left[\frac{N-\nu(2n,p)}{2}\right]}\{e^{d/2}ch(\eta)\,\mathscr{C}(N_p)\,\hat{\mathscr{A}}(X)\}\,[X]$$

eine ganze Zahl ist. Hierbei ist η ein komplexes Vektorbündel über X und $d \in H^2(X; \mathbf{Z})$ so gewählt, daß $d \equiv w_2(T_pX) + w_2(X)$ gilt.

2. Fall. Es sei $\nu(2n, p) - 2n < N \leqq \nu(2n, p)$. Aus der Existenz einer p-regulären Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ folgt dann

$$T_pX^{2n} \equiv \Theta^N \oplus K_p. \tag{2}$$

Wir setzen das Bündel K_p in Theorem 1 ein und erhalten, daß

$$Q(n, N, p; d, \eta) := 2^{\left[\frac{\nu(2n,p)-N}{2}\right]}\{e^{d/2}ch(\eta)\,\mathscr{C}(K_p)\,\hat{\mathscr{A}}(X)\}\,[X]$$

eine ganze Zahl ist. Dabei sind η und d wie im vorhergehenden Fall gewählt.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man für die Pontrjagin-Klassen

$$p(N_p) = \frac{1}{p(T_pX)} = \overline{p}(T_pX), \qquad p(K_p) = p(T_pX),$$

woraus $\mathscr{C}(K_p) = \mathscr{C}(T_pX)$ und $\mathscr{C}(N_p) = \overline{\mathscr{C}}(T_pX) = \dfrac{1}{\mathscr{C}(T_pX)}$ folgt.

Für eine Mannigfaltigkeit X^{2n}, ein komplexes Vektorbündel η über ihr und eine Kohomologieklasse $d \in H^2(X^{2n}; \mathbf{Z})$, deren $\mathbf{Z}_2$-Reduktion gleich

$$\left(\binom{2n+p+1}{2n+2} + 1\right) w_2(X^{2n}) = w_2\big(T_p(X^{2n})\big) + w_2(X)$$

(vgl. Folgerung 3) ist, definieren wir folgende Invarianten:

$$P(p; d, \eta) = 2^n\{e^{d/2}ch(\eta)\, \overline{\mathscr{C}}(T_pX)\, \hat{\mathscr{A}}(X)\}\, [X],$$

$$Q(p; d, \eta) = 2^n\{e^{d/2}ch(\eta)\, \mathscr{C}(T_pX)\, \hat{\mathscr{A}}(X)\}\, [X].$$

Ist η das eindimensionale triviale Vektorbündel, so schreiben wir für diese kurz $P(p; d)$ bzw. $Q(p; d)$.

Folgerung 4. *Die Invarianten $P(p; d, \eta)$ und $Q(p; d, \eta)$ sind ganzzahlig.*

Beweis. Auf Grund der oben zitierten Resultate von E. A. Feldman existieren p-reguläre Immersionen $f: X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $N = \nu(2n, p) + 2n$ und $N = \nu(2n, p) - 2n$. Es ist

$$P(p; d, \eta) = P\big(n, \nu(2n, p) + 2n, p; d, \eta\big)$$

und

$$Q(p; d, \eta) = Q\big(n, \nu(2n, p) - 2n,$$

$p; d, \eta\big)$.
Nach Folgerung 3 sind die Voraussetzungen an die Klasse d für die Ganzzahligkeit der Obstruktionen $P\big(n, \nu(2n, p) + 2n, p; d, \eta\big)$ und $Q\big(n, \nu(2n, p) - 2n, p; d, \eta\big)$ erfüllt. Damit gilt die Behauptung.

Folgerung 5. *Existiert eine p-reguläre Immersion $f: X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $N = \nu(2n, p) + 2n - k$ bzw. $N = \nu(2n, p) - 2n + k$ $(k = 2s, 2s - 1)$, so sind $\frac{1}{2^s} P(p; d, \eta)$ bzw. $\frac{1}{2^s} Q(p; d, \eta)$ ganze Zahlen.*

Beweis. Das ergibt sich sofort aus der Spezialisierung der oben genannten Obstruktionen $P(n, N, p; d, \eta)$ und $Q(n, N, p; d, \eta)$.

Für Mannigfaltigkeiten, deren Dimension durch 4 teilbar ist, erhalten wir folgende Verschärfung von Folgerung 5:

Folgerung 6. *Die Dimension von X^{2n} sei durch 4 teilbar, und es gelte $\binom{2n+p+1}{2n+2} \equiv 1 \bmod 2$ oder $w_2(X) = 0$. In den Fällen $k = 2s - 1$ und $s \equiv 2, 3\ (4)$ bzw. $k = 2s$ und $s \equiv 1, 2, 3\ (4)$ sind $\frac{1}{2^{s+1}} P(p; 0)$ und $\frac{1}{2^{s+1}} Q(p; 0)$ ganzzahlig.*

Beweis. Diese Behauptung folgt unmittelbar durch Übertragung der Fälle 2, 3, 6 und 7 aus Theorem 2 auf die vorliegende Situation.

Es sei $a_p(d, \eta)$ $(c_p(d, \eta))$ die Potenz, mit welcher der Faktor 2 in $P(p; d, \eta)$ $(Q(p; d, \eta))$ auftritt, und $a_p(c_p)$ das Minimum aller dieser Zahlen. Weiterhin setzen wir $a_p(0) = a_p(0, 1_{\mathbf{C}})$ und $c_p(0) = c_p(0, 1_{\mathbf{C}})$. Zusammenfassend erhalten wir im Bereich $\nu(2n, p) - 2n < N < \nu(2n, p) + 2n$ die folgenden Obstruktionen:

Satz 2. *Es seien X^{2n} eine geschlossene, orientierte, differenzierbare Mannigfaltigkeit $P(p; d, \eta)$, $Q(p; d, \eta)$, a_p, c_p, $a_p(0)$, $c_p(0)$ die oben definierten topologischen Invarianten von X^{2n}. Dann gilt:*

1. Es existiert keine p-reguläre Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $\nu(2n, p) - 2n + 2c_p + 1 \leqq N \leqq \nu(2n, p) + 2n - 2a_p - 1$.

2. Es seien $\binom{2n+p+1}{2n+2} \equiv 1 \mod 2$ oder $w_2(X) = 0$, $n \equiv 0\ (2)$, $a_p(0) \equiv 2, 3\ (4)$. Dann existiert keine p-reguläre Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $\nu(2n, p) \leqq N \leqq \nu(2n, p) + 2n - 2a_p(0) + 1$.
Gilt entsprechendes für $c_p(0)$, so existiert keine p-reguläre Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $\nu(2n, p) - 2n + 2c_p(0) - 1 \leqq N \leqq \nu(2n, p)$.

3. Es seien $\binom{2n+p+1}{2n+2} \equiv 1 \mod 2$ oder $w_2(X) = 0$, $n \equiv 0\ (2)$, $a_p(0) \equiv 1\ (4)$. Dann existiert keine p-reguläre Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $\nu(2n, p) \leqq N \leqq \nu(2n, p) + 2n - 2a_p(0)$.
Gilt entsprechendes für $c_p(0)$, so existiert keine p-reguläre Immersion $f\colon X^{2n} \to \mathbf{R}^N$ für $\nu(2n, p) - 2n + 2c_p(0) \leqq N \leqq \nu(2n, p)$.

Bemerkung. Für niedrig-dimensionale Mannigfaltigkeiten X^{2n} kann man die Invarianten $P(p; d, \eta)$ und $Q(p; d, \eta)$ explizit berechnen. So erhält man z. B.:
$n = 2$:

$$P(p; d, \eta^l) = \left\{\frac{l}{2}\, d^2 - \frac{l}{6}\, p_1(X) - \frac{l}{2}\, p_1(T_pX) + 2c_1^2(\eta) - 4c_2(\eta) + 2dc_1(\eta)\right\}[X^4],$$

$$Q(p; d, \eta^l) = \left\{\frac{l}{2}\, d^2 - \frac{l}{6}\, p_1(X) + \frac{l}{2}\, p_1(T_pX) + 2c_1^2(\eta) - 4c_2(\eta) + 2dc_1(\eta)\right\}[X^4].$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} P(p; d, \eta^l) = \Big\{&\frac{4}{3}\big(c_1^3(\eta) - 3c_1(\eta)\, c_2(\eta) + 3c_3(\eta)\big) + 2d\big(c_1^2(\eta) - 2c_2(\eta)\big) + c_1(\eta)\, d^2 \\ &+ \frac{l}{6}\, d^3 - c_1(\eta)\, p_1(T_pX) - \frac{1}{3}\, c_1(\eta)\, p_1(X) - \frac{l}{6}\, dp_1(X) \\ &- \frac{l}{2}\, dp_1(T_pX)\Big\}[X^6], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(p; d, \eta^l) = \Big\{&\frac{4}{3}\big(c_1^3(\eta) - 3c_1(\eta)\, c_2(\eta) + 3c_3(\eta)\big) + 2d\big(c_1^2(\eta) - 2c_2(\eta)\big) + c_1(\eta)\, d^2 \\ &+ \frac{l}{6}\, d^3 + c_1(\eta)\, p_1(T_pX) - \frac{1}{3}\, c_1(\eta)\, p_1(X) - \frac{l}{6}\, dp_1(X) \\ &+ \frac{l}{2}\, dp_1(T_pX)\Big\}[X^6]. \end{aligned}$$

§ 5. Auswertung dieser Obstruktionen für komplex-projektive Räume

1. Berechnung der Pontrjagin-Klassen des Tangentialbündels höherer Ordnung komplex-projektiver Räume

In diesem Abschnitt werden die Invarianten $P(p; d)$ und $Q(p; d)$ für die komplex-projektiven Räume $P^n(\mathbf{C})$ berechnet. Dazu benötigen wir als erstes die Pontrjagin-Klassen $p\big(T_pP^n(\mathbf{C})\big)$.
Es gilt $TP^n(\mathbf{C}) \oplus 1_{\mathbf{C}} = (n+1)\,\gamma$, wobei γ das kanonische Bündel über $P^n(\mathbf{C})$ ist. Nach Reellifizierung erhalten wir

$$TP^n(\mathbf{C})_{\mathbf{R}} \oplus 2 = (n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}. \tag{1}$$

Das p-fache symmetrische Tensorprodukt der Gleichung (1) ist

$$\sum_{j=1}^{p} S^j\big(TP^n(\mathbf{C})_{\mathbf{R}}\big)\, S^{p-j}(2) \oplus S^p(2) = S^p\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big).$$

Das j-fache symmetrische Tensorprodukt $S^j(m)$ eines trivialen Bündels m ist trivial und hat die Dimension $\binom{m+j-1}{j}$.

Wir erhalten also die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{p} S^j\big(TP^n(\mathbf{C})_{\mathbf{R}}\big)\,(p-j+1) \oplus (p+1) = S^p\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big). \tag{2}$$

Wir wenden das $(p-1)$-fache symmetrische Tensorprodukt auf die Gleichung (1) an und subtrahieren das Ergebnis von der Gleichung (2). Dann ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{p} S^j\big(TP^n(\mathbf{C})_{\mathbf{R}}\big) \oplus 1 = S^p\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big) - S^{p-1}\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big).$$

Es gilt also

$$T_pP^n(\mathbf{C})_{\mathbf{R}} \oplus 1 = S^p\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big) - S^{p-1}\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} p\big(T_pP^n(\mathbf{C})\big) &= \frac{p\big(S^p((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big)}{p\big(S^{p-1}((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big)},\\ p\big(T_pP^n(\mathbf{C})\big) &= \frac{p\big(S^{p-1}((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big)}{p\big(S^p((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Deshalb berechnen wir im weiteren die Pontrjagin-Klassen von $S^k\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big)$. Genauso wie in § 3 erhalten wir aus Lemma 1 und dem Aufspaltungsprinzip für die Chern-Klassen $c\big(S^k(E^n)\big)$ der Symmetrisierung eines komplexen n-dimensionalen Vektorbündels E die Formel

$$f^*\big(c(S^k(E^n))\big) = \prod_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}),$$

wobei $f\colon Y \to X$ eine aufspaltende Abbildung für E^n ist, $f^*E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ und $x_i = c_1(E_i)$.

Eine aufspaltende Abbildung für das komplexe $(2n+2)$-dimensionale Bündel $(n+1)(\gamma \oplus \gamma^*)$ über $P^n(\mathbf{C})$ ist die Identität. Wegen $c_1(\gamma) = g$ und $c_1(\gamma^*) = -g$ erhalten wir

$$c\big(S^k((n+1)\gamma \oplus \gamma^*)\big) = \prod_{i=0}^{k} \big(1 + ig - (k-i)\,g\big)^{\binom{n+i}{i}\binom{n+k-i}{k-i}}. \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet g das Erzeugende des Kohomologieringes $H^*\big(P^n(\mathbf{C}); \mathbf{Z}\big)$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$l_i = \binom{n+s-i}{n}, \quad k_i = \binom{n+s+i}{n}.$$

Indem wir in (4) paarweise die Produkte über $(1+\beta g)$ und $(1-\beta g)$ zusammenfassen, bekommen wir

$$\begin{aligned} c\big(S^{2s+1}((n+1)\,\gamma \oplus \gamma^*)\big) &= \prod_{i=0}^{s} \big(1 - (2i+1)^2 g^2\big)^{l_i k_{i+1}}, \\ c\big(S^{2s}((n+1)\,\gamma \oplus \gamma^*)\big) &= \prod_{i=1}^{s} \big(1 - (2i)^2 g^2\big)^{l_i k_i}. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir wollen $p\big(S^k((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big)$ berechnen. Nun ist nach Definition

$$\begin{aligned} p_i\big(S^k((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big) &= (-1)^i\, c_{2i}\big(S^k((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}) \otimes \mathbf{C}\big) = (-1)^i\, c_{2i}\big(S^k((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C})\big) \\ &= (-1)^i\, c_{2i}\big(S^k((n+1)\,\gamma \oplus \gamma^*)\big). \end{aligned}$$

Wir erhalten deshalb aus der Beziehung (5)

$$\begin{aligned} p\big(S^{2s+1}((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big) &= \prod_{i=0}^{s} \big(1 + (2i+1)^2 g^2\big)^{l_i k_{i+1}}, \\ p\big(S^{2s}((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}})\big) &= \prod_{i=1}^{s} \big(1 + (2i)^2 g^2\big)^{l_i k_i}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Pontrjagin-Klassen von $T_p P^n(\mathbf{C})$ ergeben sich aus (3) und (6) als

$$\begin{aligned} p\big(T_{2s+1} P^n(\mathbf{C})\big) &= \frac{\prod_{i=0}^{s} \big(1 + (2i+1)^2 g^2\big)^{l_i k_{i+1}}}{\prod_{i=1}^{s} \big(1 + (2i)^2 g^2\big)^{l_i k_i}}, \\ p\big(T_{2s} P^n(\mathbf{C})\big) &= \frac{\prod_{i=1}^{s} \big(1 + (2i)^2 g^2\big)^{l_i k_i}}{\prod_{i=0}^{s-1} \big(1 + (2i+1)^2 g^2\big)^{l_{i+1} k_i}}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. p-reguläre Immersionen der komplex-projektiven Ebene in den $\mathbf{R}^N$

Die Berechnung der Pontrjagin-Klassen in § 5, 1. ergibt für diesen Fall $p\big(T_p P^2(\mathbf{C})\big) = 1 + A_p g^2$, wobei

$$A_{2s+1} = \sum_{i=0}^{s} (2i+1)^2 \binom{2+s-i}{2}\binom{3+s+i}{2} - \sum_{i=1}^{s} (2i)^2 \binom{2+s-i}{2}\binom{2+s+i}{2},$$

$$A_{2s} = \sum_{i=1}^{s} (2i)^2 \binom{2+s-i}{2}\binom{2+s+i}{2} - \sum_{i=1}^{s} (2i-1)^2 \binom{2+s-i}{2}\binom{1+s+i}{2}$$

ist. Die am Schluß von § 4 angegebenen Formeln liefern

$$P(p;\beta g) = \frac{1}{2}(\beta^2 - A_p - 1),$$

$$Q(p;\beta g) = \frac{1}{2}(\beta^2 + A_p - 1).$$

Die Zahl β ist dabei kongruent $\binom{p+5}{6} + 1 \bmod 2$ zu wählen. Das heißt, daß β eine gerade Zahl ist, wenn $p \equiv 1, 2\ (8)$ ist, und eine ungerade Zahl für die übrigen Werte p.

Da A_p eine positive Zahl ist, gilt $p_1(T_p P^2(\mathbf{C})) \neq 0$. Es existiert also keine p-reguläre Immersion von $P^2(\mathbf{C})$ in $\mathbf{R}^N$ mit $\nu(4, p) - 1 \leqq N \leqq \nu(4, p) + 1$. Weitere Obstruktionen erhalten wir nur für die Werte p, für die a_p und c_p verschwinden und für die Werte $p \equiv 1, 2\ (8)$, für die $a_p(0), c_p(0) = 1$ ist.

1. Fall. Es sei $p \equiv 0, 3, 4, 5, 6, 7 \bmod 8$.

Wegen $\beta \equiv 1\ (2)$ gilt $\beta^2 - 1 \equiv 0\ (4)$. Zur Berechnung der Zahlen a_p und c_p genügt es also, die Invarianten

$$\begin{aligned} P(p; g) &\equiv -\frac{1}{2} A_p \bmod 2, \\ Q(p; g) &\equiv +\frac{1}{2} A_p \bmod 2 \end{aligned} \tag{1}$$

zu betrachten.

2. Fall. Es sei $p \equiv 1, 2 \bmod 8$.

Mit $\beta \equiv 0\ (2)$ ist auch $\beta^2/2 \equiv 0\ (2)$. Für die Berechnung der Zahlen a_p, c_p, $a_p(0)$, $c_p(0)$ genügt es also, die Invarianten

$$\begin{aligned} P(p; 0) &= -\frac{1}{2}(A_p + 1), \\ Q(p; 0) &= +\frac{1}{2}(A_p - 1) \end{aligned} \tag{2}$$

zu benutzen.

Die Berechnung der Zahlen A_p liefert modulo 4 das folgende Ergebnis:

s	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
A_{2s+1}	$2k+3$	0	$2k+2$	0	
A_{2s}	0	$2k+1$	0	$2k+2$	mod 4

Aus den Formeln (1) und (2) folgt damit unmittelbar

s	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$P(2s+1;\beta g)$	$k+2$	0	$k+1$	0	
$P(2s;\beta g)$	0	$k+1$	0	$k+1$	
$Q(2s+1;\beta g)$	$k+1$	0	$k+1$	0	
$Q(2s;\beta g)$	0	k	0	$k+1$	mod 2

wobei β entsprechend gewählt ist.

Wie diese Tabelle zeigt, sind die Invarianten $P(p; \beta g)$ und $Q(p; \beta g)$ in genau folgenden Fällen ungerade:

$$P(p; \beta g) \quad \text{für} \quad p \equiv 2, 5, 6, 9 \bmod 16,$$
$$Q(p; \beta g) \quad \text{für} \quad p \equiv 1, 5, 6, 10 \bmod 16.$$

In diesen Fällen verschwinden also a_p bzw. c_p.
Wenn die geraden Zahlen $P(p; 0)$ für $p \equiv 1, 10$ (16) bzw. $Q(p; 0)$ für $p \equiv 2, 9$ (16) nicht durch 4 teilbar sind, so ergeben die Zahlen $a_p(0) = 1$ bzw. $c_p(0) = 1$ weitere Obstruktionen. Die Berechnung von A_p für $p \equiv 1, 2, 9, 10$ (16) liefert modulo 8 die folgenden Ergebnisse:

p	$16t + 1$	$16t + 2$	$16t + 9$	$16t + 10$	
A_p	$4t + 3$	$4t + 5$	$4t + 1$	$4t + 7$	mod 8

Aus Formel (2) ergibt sich daraus unmittelbar

p	$16t + 1$	$16t + 10$
$P(p; 0)$	$2t + 2$	$2t$

p	$16t + 2$	$16t + 9$	
$Q(p; 0)$	$2t + 2$	$2t$	mod 4

Es ist demnach

$$a_p(0) = 1 \quad \text{für} \quad p \equiv 1, 26 \bmod 32,$$
$$c_p(0) = 1 \quad \text{für} \quad p \equiv 2, 25 \bmod 32.$$

Zusammenfassend erhalten wir mittels Satz 2 das folgende Ergebnis:

Satz 3. *1. Es existiert keine p-reguläre Immersion der komplex-projektiven Ebene $P^2(\mathbf{C})$ in den euklidischen Raum $\mathbf{R}^N$ mit $\nu(4, p) - 1 \leqq N \leqq \nu(4, p) + 1$.*

2. Wenn $p \equiv 1, 26$ (32), so existiert keine p-reguläre Immersion von $P^2(\mathbf{C})$ in den $\mathbf{R}^N$ mit $\nu(4, p) \leqq N \leqq \nu(4, p) + 2$. Wenn $p \equiv 2, 25$ (32), so existiert keine p-reguläre Immersion für die Werte $\nu(4, p) - 2 \leqq N \leqq \nu(4, p)$.

3. Ist $p \equiv 2, 5, 6, 9 \bmod 16$, so existiert keine p-reguläre Immersion von $P^2(\mathbf{C})$ in den $\mathbf{R}^N$ mit $\nu(4, p) \leqq N \leqq \nu(4, p) + 3$. Ist $p \equiv 1, 5, 6, 10 \bmod 16$, so existiert keine p-reguläre Immersion für $\nu(4, p) - 3 \leqq N \leqq \nu(4, p)$.

Bemerkung. Dieses Ergebnis ist für einige Parameterwerte p stärker als dasjenige von H. Suzuki in [7].

3. *2-reguläre Immersionen des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes $P^n(\mathbf{C})$ in den $\mathbf{R}^N$*

Aus den in § 5, 1. angegebenen Formeln folgt unmittelbar

$$\mathscr{C}\big(T_2 P^n(\mathbf{C})\big) = \frac{\mathscr{C}\big(S^2(n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big)}{\mathscr{C}\big((n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}\big)}.$$

Die Pontrjagin-Klassen der Bündel $S^p(n+1)\,\gamma_{\mathbf{R}}$ wurden gleichfalls in dem genannten Abschnitt berechnet. Durch Einsetzen erhalten wir somit

$$\mathscr{C}\big(T_2 P^n(\mathbf{C})\big) = \frac{\cosh\,(g)^{\binom{n+2}{2}}}{\cosh\left(\dfrac{g}{2}\right)^{n+1}}.$$

Wegen $\hat{\mathscr{A}}(P^n(\mathbf{C})) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \dfrac{g^{n+1}}{\sinh\left(\dfrac{g}{2}\right)^{n+1}}$ ergibt sich für $d = \nu g$

$$P(2, d) = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{d/2}\cosh\left(\dfrac{g}{2}\right)^{n+1} g^{n+1}}{\cosh(g)^{\binom{n+2}{2}}\sinh\left(\dfrac{g}{2}\right)^{n+1}}\right\}[P^n(\mathbf{C})].$$

Hierbei ist $\nu \equiv 0 \bmod 2$, also geradzahlig zu wählen. Wir setzen $\nu = 2\beta$. Nach Anwendung der Cauchy-Formel und einer Koordinatentransformation erhalten wir

$$P(2, 2\beta g) = 2^{n+\binom{n+1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(1,\varepsilon)} \frac{y^{\beta+n+\binom{n+1}{2}}(y+1)^{n+1}}{(y^2+1)^{\binom{n+2}{2}}(y-1)^{n+1}}\,dy.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$N(\beta) = \beta + n + \binom{n+1}{2}, \quad M(\beta) = \beta - 1 - \binom{n+1}{2}, \quad N = \binom{n+2}{2}.$$

Um die notwendigen Obstruktionen zu erhalten, müssen wir das Residuum der Funktionen

$$f(y) = \frac{y^{N(\beta)}(y+1)^{n+1}}{(y^2+1)^N (y-1)^{n+1}} \quad \text{und} \quad g(y) = \frac{y^{M(\beta)}(y^2+1)^N}{(y+1)^{n+1}(y-1)^{n+1}}$$

im Punkt $y_0 = 1$ bestimmen. Es zeigt sich, daß es zur Berechnung von a_2 in diesem Fall ausreicht, die Invarianten $P(2, 2\beta g)$ für

$$N(\beta) = 0, \quad \text{also} \quad \beta = -n - \binom{n+1}{2} := \beta_0,$$

und

$$N(\beta) = 1, \quad \text{also} \quad \beta = 1 - n - \binom{n+1}{2} := \beta_1,$$

zu kennen. Nach dem Residuensatz müssen wir demnach den Koeffizienten von $\dfrac{1}{y-1}$ in der Laurent-Entwicklung der Funktionen

$$f_0(y) = \frac{(y+1)^{n+1}}{(y^2+1)^N (y-1)^{n+1}} \quad \text{und} \quad f_1(y) = \frac{y(y+1)^{n+1}}{(y^2+1)^N (y-1)^{n+1}}$$

bestimmen. Es sei $x = y - 1$ und $x \in \partial K(0, \varepsilon)$. Wir entwickeln die in den Funktionen $f_0(x+1)$ und $f_1(x+1)$ auftretenden Produkte nach Potenzen von x und erhalten

$$f_0(x+1) = \frac{1}{2^{\binom{n+1}{2}}} \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{k+j=r}\sum_{s=0}^{k} 2^s \binom{n+1}{j}\binom{N+s-1}{s}(-1)^s\binom{s}{k-s}\right)x^{r-(n+1)},$$

$$f_1(x+1) = \frac{1}{2^{\binom{n+1}{2}}} \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{k+i+j=r}\sum_{s=0}^{k} 2^{s+i}\binom{1}{i}\binom{n+1}{j}\binom{N+s-1}{s}(-1)^s\binom{s}{k-s}\right)$$
$$\times x^{r-n-1}.$$

Daraus folgt für die Invariante $P(2, 2\beta g)$

$$P(2, 2\beta_0 g) = \sum_{k+j=n} \sum_{s=0}^{k} 2^s \binom{n+1}{j} \binom{N+s-1}{s} (-1)^s \binom{s}{k-s}$$

$$= \sum_{q=0}^{n} \left\{ (-1)^q \binom{N+q-1}{q} \sum_{k=0}^{n-q} \binom{n+1}{n-q-k} \binom{q}{k} \right\} 2^q.$$

Wir benutzen das folgende, leicht zu beweisende

Lemma 6. *Für ganze Zahlen n, m, $p \geqq 0$ gilt*

$$\sum_{r=0}^{p} \binom{n}{r} \binom{m}{p-r} = \binom{n+m}{p}.$$

Daraus erhalten wir

$$P(2, 2\beta_0 g) = \sum_{q=0}^{n} \left\{ (-1)^q \binom{N+q-1}{q} \binom{n+1+q}{n-q} \right\} 2^q := \sum_{q=0}^{n} x_q(\beta_0)\, 2^p. \tag{1}$$

Auf die gleiche Weise berechnet man

$$P(2, 2\beta_1 g) = \sum_{q=0}^{n} \left\{ (-1)^q \binom{N+q-1}{q} \binom{n+1+q}{n-q} + (-1)^{q-1} \binom{N+q-2}{q-1} \binom{n+q}{n-q} \right\} 2^q$$

$$:= \sum_{q=0}^{n} x_q(\beta_1)\, 2^q. \tag{2}$$

Die Auswertung der Formeln (1) und (2) ergibt:

1. Es gilt $x_0(\beta_i) = n + 1$. Ist n gerade, so ist $P(2, 2\beta_i g)$ ungerade. Demnach erhalten wir $a_2 = 0$ für die Räume $P^{2m}(\mathbf{C})$.

2. Es sei n ungerade. Wir stellen $n + 1$ dar als $n + 1 = 2^k(2m + 1)$, $k \geqq 1$. Dann gilt

$$N = \binom{n+2}{2} = 2^{k-1} \quad \text{(ungerade Zahl)}.$$

Für $q \geqq 1$ folgt aus (1)

$$x_q(\beta_0) = (-1)^q \frac{(N+q-1)\,(N+q-2) \cdots N}{q!} \binom{n+1+q}{n-q}$$

$$= (-1)^q \frac{N}{q} \binom{N+q-1}{q-1} \binom{n+1+q}{n-q}.$$

Demnach ist für ungerades q

$$2^q x_q(\beta_0) = 2^{q+k-1} \binom{n+1+q}{n-q} z_q, \quad \text{wobei } z_q \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Ist q gerade, so setzen wir $q = 2^l u$, u ungerade, $l \geqq 1$. Dann gilt

$$2^q x_q(\beta_0) = 2^{2^l u - l + k - 1} z_q', \quad \text{wobei } z_q' \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Für $q \neq 2$ ist offensichtlich $2^l u - l > 1$. Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{n} 2^q x_q(\beta_0) &= x_0(\beta_0) + 2x_1(\beta_0) + 4x_2(\beta_0) + \sum_{q=3}^{n} 2^q x_q(\beta_0)\\ &= (n+1) + 2^k \binom{n+2}{3} (\text{ungerade}) + 2^k \binom{n+3}{5} (N+1)\ (\text{ungerade})\\ &\quad + 2^k\ (\text{gerade})\\ &= 2^k \left\{ (\text{ungerade Zahl}) + \binom{n+2}{3} (\text{ungerade Zahl}) \right.\\ &\quad \left. + \binom{n+3}{5} (N+1)\ (\text{ungerade}) \right\}\\ &= 2^k \{(\text{ungerade Zahl}) + 2^{k-1} (\text{ungerade Zahl}) + 2^{k-1} (\text{ganze Zahl})\}.\end{aligned}$$

Ist $k > 1$, so folgt

$$\sum_{q=0}^{n} 2^q x_q(\beta_0) = 2^k\ (\text{ungerade Zahl}). \tag{3}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß $P(2, 2\beta g)$ immer durch 2^k teilbar ist. Nun ist aber wegen (3) $P(2, 2\beta_0 g)$ nicht durch 2^{k+1} teilbar. Wir erhalten also $a_2 = k$ für den Fall $n + 1 = 2^k(2m + 1)$, $k > 1$.

3. Für $n + 1 = 2(2m + 1)$ benutzen wir die Formel (2) zur Berechnung von a_2. Es folgt dann

$$x_0(\beta_1) + 2x_1(\beta_1) = 2\ (\text{ungerade Zahl}).$$

Deshalb ist $P(2, 2\beta_1 g)$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. In diesem Fall gilt demnach $a_2 = 1$.

Mit Hilfe von Satz 2 erhalten wir das folgende Ergebnis:

Satz 4. *Gegen die Existenz von 2-regulären Immersionen des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes $P^n(\mathbf{C})$ in den R^N mit $\nu(2n, 2) \leq N \leq \nu(2n, 2) + 2n - 1$ treten die folgenden Obstruktionen auf: Es sei $n + 1 = 2^k(2m + 1)$, $k \geq 0$. Dann existiert keine 2-reguläre Immersion für $\nu(2n, 2) \leq N \leq \nu(2n, 2) + 2n - 2k - 1$.*

Bemerkung. Das Beispiel der 2-regulären Immersionen von $P^n(\mathbf{C})$ zeigt, daß die Obstruktionen, die man aus den Ganzzahligkeitssätzen erhält, stärker sein können als die, welche sich durch direktes Anwenden der Pontrjagin- und Stiefel-Whitney-Klassen ergeben. Wegen $n - k > [n/2]$ für $n + 1 = 2^k(2m + 1)$ ist das in Satz 4 ausgeschlossene Intervall größer als das Intervall $\nu(2n, 2) \leq N \leq \nu(2n, 2) + 2[n/2] - 1$, welches man beim Anwenden der Pontrjagin-Klassen und entsprechender Dimensionsbetrachtungen ausschließen kann. In [7] berechnet H. Suzuki die Stiefel-Whitney-Klassen von $T_2P^n(\mathbf{C})$ und schließt damit nur das Intervall $\nu(2n, 2) \leq N \leq \nu(2n, 2) + 2n - 2(2^k - 1) - 1$ aus.

§ 6. p-reguläre Immersionen der Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{5,2}$

Es sei $G_{5,2} = SO(5)/SO(3) \times SO(2)$ die Graßmann-Mannigfaltigkeit der orientierten, zweidimensionalen Unterräume des $\mathbf{R}^5$. $G_{5,2}$ ist eine sechsdimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit. Die ganzzahlige Kohomologie $H^*(G_{5,2}, \mathbf{Z})$ wird von zwei Elementen

$t \in H^2$ und $e \in H^4$ erzeugt, wobei die Relationen

$$t^2 = 2e, \qquad e^2 = 0$$

gelten (vgl. [8]). Ein Erzeugendes der Gruppe H^6 ist te. Es bezeichne $\gamma_{\mathbf{R}}$ das kanonische Vektorbündel über $G_{5,2}$. Dies ist ein orientierbares, zweidimensionales Vektorbündel und trägt somit eine komplexe Struktur. Fassen wir es als komplexes Vektorbündel auf, so schreiben wir γ. Es gilt $c_1(\gamma) = t$. Es sei $\gamma_{\mathbf{R}}^{\perp}$ das Komplement von $\gamma_{\mathbf{R}}$. Das Tangentialbündel $TG_{5,2}$ ist isomorph zu $\gamma_{\mathbf{R}} \otimes \gamma_{\mathbf{R}}^{\perp}$. Daraus ergeben sich für die Pontrjagin-Klasse und die zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(G_{5,2})$ folgende Formeln:

$$P(G_{5,2}) = 1 + t^2, \qquad w_2(G_{5,2}) = t \bmod 2.$$

Die Pontrjagin-Klasse des Vektorbündels $T_p(G_{5,2})$ stellen wir in der Form $P\big(T_p(G_{5,2})\big) = 1 + a_p t^2$ dar. Eine einfache Überlegung zeigt, daß a_p eine positive ganze Zahl ist. Somit läßt $G_{5,2}$ keine p-regulären Immersionen in die euklidischen Räume $\mathbf{R}^N$ mit $\nu(6, p) - 1 \leqq N \leqq \nu(6, p) + 1$ zu. Um zumindest für einige Parameterwerte p bessere Abschätzungen zu erhalten, berechnen wir a_p modulo 4. Dazu benötigen wir das folgende, leicht zu beweisende

Lemma 7. *Es seien E^n und F^m komplexe Vektorbündel der Dimension n bzw. m, deren erste Chern-Klassen verschwinden. Dann gilt*

$$c_2(E^n \otimes F^m) = mc_2(E^n) + nc_2(F^m).$$

In den nachstehenden Überlegungen steht T_p für $T_p(G_{5,2})$. Aus $T_1 = \gamma_{\mathbf{R}} \otimes \gamma_{\mathbf{R}}^{\perp}$ folgt

$$\{T_1 \otimes \mathbf{C} + 1\} + \{\gamma^2 + \gamma^{-2} + 1\} = 5(\gamma + \gamma^{-1}).$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{k} S^i(T_1 \otimes \mathbf{C} + 1)\, S^{k-i}(\gamma^2 + \gamma^{-2} + 1) = S^k(5\gamma + 5\gamma^{-1}),$$

und unter Verwendung des obigen Lemmas 7 sowie der Gleichung $S^i(T_1 \otimes \mathbf{C} + 1) = T_i \otimes \mathbf{C} + 1$ erhalten wir

$$c_2\big(S^k(5\gamma + 5\gamma^{-1})\big) = \sum_{i=0}^{k} \left\{ -\binom{k-i+2}{2} a_i t^2 + \binom{6+i}{6} c_2\big(S^{k-i}(\gamma^2 + \gamma^{-2} + 1)\big) \right\}.$$

Leicht überzeugt man sich davon, daß $c_2\big(S^{k-i}(\gamma^2 + \gamma^{-2} + 1)\big)$ modulo 4 verschwindet. Somit gilt

$$c_2\big(S^k(5\gamma + 5\gamma^{-1})\big) \equiv -\sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+2}{2} a_i t^2 \quad \bmod 4.$$

Bezeichnen wir mit b_k die Zahl

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 2l, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{l} \binom{4+l-i}{4}\binom{5+l+i}{4}, & \text{falls } k = 2l+1, \end{cases}$$

so ergibt sich in Auswertung der letzten Gleichung folgende Rekursionsformel für a_p:

$$b_k \equiv \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+2}{2} a_i \quad \bmod 4.$$

Lemma 8. *Modulo 4 gilt $a_{2l} \equiv a_{2l-1}$ und $a_{2l+1} \equiv b_{2l+1} - b_{2l-1}$.*

Beweis. Wir zeigen die erste Gleichung induktiv. Sie gilt für $l = 1$, sie sei für $1, \ldots, l-1$ richtig. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = b_{2l} &\equiv a_{2l} + 3a_{2l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \left\{ \binom{2l-2i+2}{2} a_{2i} + \binom{2l-2l+3}{2} a_{2i-1} \right\} \\ &\equiv a_{2l} + 3a_{2l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} (l-i+1)(4l-4i+4)\, a_{2i} \equiv a_{2l} + 3a_{2l-1}. \end{aligned}$$

Die zweite Beziehung erhalten wir unter Verwendung der bewiesenen aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} b_{2l+1} - b_{2l-1} &= \sum_{i=0}^{2l+1} \binom{2l-i+3}{2} a_i - \sum_{i=0}^{2l-1} \binom{2l-i+1}{2} a_i \\ &\equiv \sum_{i=0}^{2l-1} (4l-2i+3)\, a_i + 3a_{2l} + a_{2l+1} \\ &\equiv -\sum_{i=0}^{2l-1} 2ia_i - \sum_{i=0}^{2l} a_i + a_{2l+1} \\ &\equiv -\sum_{i=0}^{l-1} 2(2i+1)\, a_{2i+1} - \sum_{i=0}^{l-1} (a_{2i+1} + a_{2i+2}) + a_{2l+1} \\ &\equiv -\sum_{i=0}^{l-1} 2a_{2i+1} - \sum_{i=0}^{l-1} 2a_{2i+1} + a_{2l+1} \equiv a_{2l+1}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich nun, daß die Koeffizienten a_i modulo 4 periodisch mit der Periode 32 sind. Auf Grund von Lemma 8 genügt es,

$$a_{2l+1+32} = a_{2l+1} \quad \text{mod } 4$$

zu beweisen. Dies ergibt sich unter Berücksichtigung der Kongruenz

$$\binom{n+16}{4} = \binom{n}{4} \quad \text{mod } 4$$

und aus Lemma 8 wie folgt:

$$\begin{aligned} a_{2l+1+32} &= a_{2(l+16)+1} \equiv b_{2(l+16)+1} - b_{2(l+16)-1} \\ &\equiv \sum_{i=0}^{l+16} \binom{4+l+16-i}{4} \binom{5+l+16+i}{4} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{l+16-1} \binom{4+l+16-1-i}{4} \binom{5+l+16-1+i}{4} \\ &\equiv \sum_{i=0}^{l+16} \binom{4+l-i}{4} \binom{5+l+i}{4} - \sum_{i=0}^{l+16-1} \binom{4+l-1-i}{4} \binom{5+l-1+i}{4} \\ &\equiv b_{2l+1} - b_{2l-1} \equiv a_{2l+1}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt $a_1, \ldots, a_{32}$ direkt und erhalten für a_i mod 4 folgende Tabelle:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_{32n+m}	0	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
3	3	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Invarianten $P(p, At)$ und $Q(p, At)$. Die Zahl A ist so zu wählen, daß

$$At \equiv \left\{\binom{7+p}{8} + 1\right\} w_2(G_{5,2}) \mod 2$$

gilt. Damit erhalten wir für A die Bedingung

$$A \equiv \binom{7+p}{8} + 1 \equiv \left[\frac{p-1}{8}\right] \mod 2.$$

Aus den am Schluß von § 4 angegebenen Formeln für $P(p, d)$ und $Q(p, d)$ im Fall einer sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit sowie aus der Kohomologiestruktur von $G_{5,2}$ ergibt sich

$$P(p, At) = \frac{(A-1)A(A+1)}{3} - Aa_p, \qquad Q(p, At) = \frac{(A-1)A(A+1)}{3} + Aa_p.$$

Ist $p = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ modulo 32, so kann $A = 1$ zur Berechnung verwendet werden. Dann ergibt sich

$$P(p, t) \equiv 2 \equiv Q(p, t) \mod 4.$$

Aus Satz 2 erhalten wir somit

Satz 5. *1. Die Graßmann-Mannigfaltigkeiten* $G_{5,2} = SO(5)/SO(3) \times SO(2)$ *und* $\hat{G}_{5,2} = O(5)/O(3) \times O(2)$ *der orientierten bzw. unorientierten, zweidimensionalen Unterräume, des* $\mathbf{R}^5$ *lassen keine p-regulären Immersionen in die euklidischen Räume* $\mathbf{R}^{\nu(6,p)-1}$ $\mathbf{R}^{\nu(6,p)}$, $\mathbf{R}^{\nu(6,p)+1}$ *zu.*

2. Ist $p = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ *modulo 32, so existieren keine p-regulären Immersionen dieser Mannigfaltigkeiten in die euklidischen Räume* $\mathbf{R}^N$ *mit*

$$\nu(6, p) - 3 \leqq N \leqq \nu(6, p) + 3.$$

LITERATUR

[1] Feldman, E. A.: The geometry of immersions I. Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 185–224.

[2] Friedrich, Th., und P. Wintgen: Über k-reguläre Abbildungen von Sphären in Graßmannsche Mannigfaltigkeiten. Math. Nachr. *66* (1975), 247–253.

[3] Hirzebruch, F.: Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd ed. Springer-Verlag, New York 1966.

[4] Husemoller, D.: Fibre Bundles, 2nd ed. Springer-Verlag, New York 1975.

[5] Mayer, K. H.: Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahligkeitssätze für charak teristische Zahlen. Topology *4* (1965), 295–313.

[6] Pohl, W. F.: Connections in differential geometry of higher order. Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 310–325.

[7] Suzuki, H.: Higher order non-singular immersions in projective spaces. Quart. J. Math. *20* (1969), 33–44.

[8] Toda, H., and T. Watanabe: The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T. J. Math. Kyoto Univ. *14* (1974), 257–286.

Manuskripteingang: 18. 10. 1977

VERFASSER:

Helga Dlubek und Thomas Friedrich, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin