Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 55 – 65

Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren

LUDWIG STAMMLER und BERNULF WEISSBACH

1. Übersicht über Begriffsbildungen und Ergebnisse

In manchen Anwendungen von Bedeutung, aber auch geometrisch für sich interessant ist die Frage nach einer auf Flächenbetrachtung basierenden Definition und Ermittlung der Abweichung einer ebenen Figur M von der „Gestalt" einer anderen Figur K_0, z. B. von der „Kreisgestalt".
Zu derartigen Anwendungen gehört (vgl. etwa [2, 4]) die Gestaltanalyse von Netzmaschen in Auszählnetzen zur statistischen Gewinnung von Häufigkeitsmustern. Dabei erwies es sich als naheliegend (vgl. z. B. [3]), als Abweichung einer Figur M von der Gestalt einer Figur K_0 *den minimalen Flächeninhalt* zu definieren, *den die symmetrische Differenz* $F = (M \cup K) \setminus (M \cap K)$ *zwischen* M *und einer zu* K_0 *ähnlichen Figur* K *annehmen kann.*
Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, *Halbierungssätze* anzugeben, das sind Kriterien für minimales F in Gestalt einer folgendermaßen definierten „Parameterhalbierung": Wenn K eine Randkurve besitzt, dargestellt durch einen Parameter t, der ein Intervall endlicher Länge T durchläuft, so erfüllt K die Bedingung der *„Parameterhalbierung" durch* M, wenn die Menge der Parameterwerte t aller außerhalb M gelegenen Randkurvenpunkte von K das Maß $\frac{1}{2}T$ hat. Ist der Parameter t die Bogenlänge, so ist die „Parameterhalbierung" eine *Umfangshalbierung*; ist t der Flächeninhalt eines Sektors aus K mit gegebenem Zentrum Z zwischen festem Anfangsstrahl und umlaufendem variablem Strahl, so sei die „Parameterhalbierung" auch *„Sektorenhalbierung"* genannt, und wir bezeichnen dann Z als ein *Halbierungszentrum von* K *bezüglich* M.
Diese Halbierungsbedingungen kann man noch abschwächen zu Forderungen z. B. folgender Art: Aus der Menge aller zu K_0 ähnlichen Figuren werde nur eine einparametrige Schar S herausgegriffen, für jeden Wert s des Scharparameters sei die Randkurve der zugehörigen Figur $K(s) \in S$ dargestellt mit Hilfe desselben Parameters t, und es sei $m(s)$ das Maß der Menge der Parameterwerte t aller außerhalb M gelegenen Randkurvenpunkte von $K(s)$. Dann erfüllt $K(s^*) \in S$ eine *abgeschwächte Bedingung der „Parameterhalbierung" durch* M, wenn $m(s) < \frac{1}{2}T$ für alle $s < s^*$, aber $m(s) \geqq \frac{1}{2}T$ für alle $s > s^*$ gilt.
Als einen ersten Halbierungssatz zeigen wir in Abschnitt 2:
Satz 1. *Hat ein Kreis* K *mit einem Polygon* M *minimale symmetrische Differenz* F, *so wird* K *durch* M *umfangshalbiert.*

Bei Kreisen erweist sich also Polygonen gegenüber die Umfangshalbierung als notwendiges Kriterium für minimales F, und zwar bereits innerhalb konzentrischer Kreisscharen S. Einfache Beispiele zeigen auch, daß sie nicht hinreichend ist, nicht einmal bei Einschränkung auf konzentrische Kreisscharen. Dementsprechend wird zu Satz 1 ein lokaler Beweis gegeben, d. h. die Umfangshalbierung aus stationärem Verhalten von F (als Funktion des Radius s) hergeleitet.

Für weitere Halbierungssätze werden in Abschnitt 3 sowohl M als auch K_0 als *Ovale* (konvexe, beschränkte, abgeschlossene, zweidimensionale Punktmengen) vorausgesetzt. Die Frage nach minimalem F wird eingeschränkt auf die Schar S aller $K(s)$, die aus einem zu K_0 ähnlichen Oval $K(1)$ durch Streckung mit jeweils positiven Streckfaktoren s und mit einem gemeinsamen inneren Punkt Z von $K(1)$ und M als Streckzentrum entstehen (kurz: auf die zu $K(1)$ *positiv Z-homothetische* Schar S):

Satz 2. *Genau dann hat ein Oval $K(s^*)$ innerhalb einer positiv Z-homothetischen Schar S minimale symmetrische Differenz mit einem Oval M, wenn Z in abgeschwächtem Sinn ein Halbierungszentrum von $K(s^*)$ bezüglich M ist.*

Bei Einschränkung auf S erweist sich also die Sektorenhalbierung als notwendiges und hinreichendes Kriterium für minimale symmetrische Differenz F. Dies wird in Abschnitt 3 so bewiesen, daß zunächst die Existenz genau eines s^* mit abgeschwächter Parameter- (= Sektoren-) Halbierung gezeigt wird und daß sich dann sogar herleiten läßt: Im Intervall $(0, s^*]$ ist F streng monoton fallend, im Intervall $[s^*, +\infty)$ streng monoton steigend.

Speziell für konzentrische Kreisscharen S um Z stimmt die Sektorenhalbierung mit der Umfangshalbierung überein, womit das Auftreten der Umfangshalbierung (als Kriterium für minimales F, z. B. in Satz 1 gegenüber Polygonen M) bei Kreisen K durchsichtiger motiviert ist. (Freilich erfaßt Satz 1 auch nichtkonvexe Polygone M.)

Ferner bietet Satz 2 folgende allgemeinere Anwendungsmöglichkeiten: Für zwei gegebene Ovale M und K sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Randkurven nur endlich viele Schnittpunkte miteinander haben. (Diese Einschränkung des *endlichen Ränderdurchschnitts* läßt sich noch abschwächen, doch sei auf die hierfür erforderlichen Untersuchungen vorerst verzichtet.) Dann ist, wie man leicht zeigt (s. Abschnitt 4), die Menge H aller Halbierungszentren von K bezüglich M gleich dem Durchschnitt des Inneren J von $M \cap K$ mit einer *linearen Mannigfaltigkeit*, d. h., H ist leer oder ein Punkt oder eine J durchquerende Strecke oder ganz J. Daher gilt z. B.:

Satz 3. *Genau dann hat ein Oval K unter allen ihm positiv aus inneren Zentren ($Z \in J$) homothetischen Ovalen minimale symmetrische Differenz zu einem Oval M, mit dem es endlichen Ränderdurchschnitt hat, wenn K drei nichtkollineare Halbierungszentren bezüglich M besitzt.*

Speziell im Fall des Kreises K ist damit eine für *in dreiparametriger Schar minimale* symmetrische Differenz zu M *notwendige und hinreichende* Bedingung gefunden. Sie läßt sich bereits recht gut für vorgegebene M zur Gewinnung konkreter Einzelergebnisse verwenden, worauf im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr eingegangen werden soll. Man kann dabei zuweilen auch andere Hilfsmittel heranziehen, z. B. einen Satz von DINGHAS [1], aus dem hervorgeht, daß F nicht vergrößert wird, wenn M und K gleichzeitig an ein und derselben Geraden im Sinne STEINERS symmetrisiert werden. Hiernach genügt es, falls M eine Symmetrieachse besitzt, nur deren Punkte als Mittelpunkte von K zu betrachten.

Auch auf weitere Verallgemeinerungsfragen, etwa nach Halbierungssätzen auf der Kugeloberfläche (wie z. B. in [2, 4] benötigt), allgemeiner in nichteuklidischen und in höherdimensionalen Räumen, sei hier nicht mehr eingegangen.

2. Der Halbierungssatz für symmetrische Differenz zwischen Polygon und Kreis

Es sei M ein Polygon, Z das Zentrum einer Kreisschar S, und zwar jeweils $K(s)$ die Kreisfläche um Z mit dem Radius $s\,(>0)$. Der Flächeninhalt von $\bigl(M \cup K(s)\bigr) \setminus \bigl(M \cap K(s)\bigr)$ sei $F(s)$. Für $\varepsilon \neq 0$ mit genügend kleinem $|\varepsilon|$ sei $\Delta(\varepsilon) := F(s+\varepsilon) - F(s)$ gesetzt. Um Satz 1 zu beweisen, genügt es zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Delta'(\varepsilon) = 0$ ist, so wird $K(s)$ durch M umfangshalbiert.

Haben die Randkurven von M und $K(s)$ keine gemeinsamen Punkte und ist $|\varepsilon|$ genügend klein, so ist mit einem geeigneten Vorzeichen $\vartheta \in \{1, -1\}$

$$\Delta(\varepsilon) = \vartheta\pi \cdot \bigl((s+\varepsilon)^2 - s^2\bigr),$$

also $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Delta'(\varepsilon) \neq 0$, und der behauptete Schluß ist (leer, also) richtig.

Existieren gemeinsame Punkte, so sei zunächst angenommen, daß sich die Randkurven von M und $K(s)$ in allen ihren gemeinsamen Punkten durchsetzen. Der Rand $k(s)$ von $K(s)$ wird dann durch diese Punkte in eine gerade Anzahl $2n$ offener Bögen b_i zerlegt, die abwechselnd innerhalb und außerhalb von M liegen. Ist $|\varepsilon|$ genügend klein, so zerlegen die im Kreisring R zwischen $k(s)$ und $k(s+\varepsilon)$ gelegenen Teilstrecken des Randes von M diesen Ring ebenfalls in $2n$ Gebiete L_i, die abwechselnd innerhalb und außerhalb von M liegen, etwa $L_1, L_3, \ldots$ innerhalb M, aber $L_2, L_4, \ldots$ außerhalb M; dabei sei jeweils b_i im Rand von L_i enthalten ($i = 1, \ldots, 2n$) (Abb. 1). Dann ist mit $\eta := \operatorname{sgn} \varepsilon$

$$\Delta(\varepsilon) = \eta \cdot \sum_{k=1}^{n} (L_{2k} - L_{2k-1}).$$

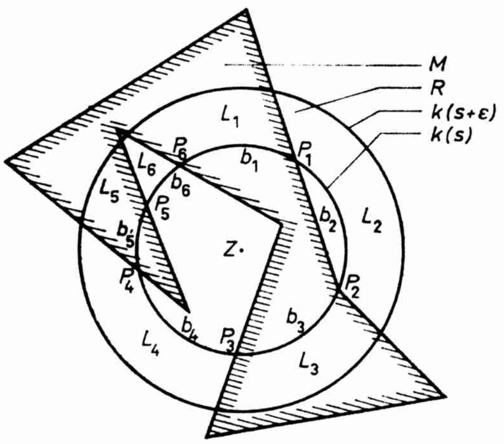

Abb. 1

Im Sinne der Umlaufung $b_1, b_2, \ldots$ habe jeweils b_i den Endpunkt P_i, und es sei r_i die in radialer Richtung von P_i ausgehende, R durchquerende Strecke. Diese Strecke und die ebenfalls bei P_i beginnende Grenzstrecke q_i zwischen L_i und L_{i+1} schließen zusammen mit einem Teilbogen c_i von $k(s+\varepsilon)$ ein (möglicherweise zu $\emptyset$ entartetes) dreieckiges Flächenstück D_i ein ($i = 1, \ldots, 2n$; $L_{2n+1} := L_1$) (Abb. 2). Dabei liegt jeweils D_i, wenn $|\varepsilon|$ genügend klein ist, entweder ganz in L_i oder ganz in L_{i+1}, und die D_i sind paarweise disjunkt. Schließlich bezeichne α_i den Zentriwinkel zu b_i.

Dann gilt mit geeigneten Vorzeichen $e_i \in \{1, -1\}$

$$L_{2k} = \frac{1}{2}\eta \cdot \left((s+\varepsilon)^2 - s^2\right) \cdot \alpha_{2k} + e_{2k} D_{2k} + e_{2k-1} D_{2k-1},$$

$$L_{2k-1} = \frac{1}{2}\eta \cdot \left((s+\varepsilon)^2 - s^2\right) \cdot \alpha_{2k-1} - e_{2k-1} D_{2k-1} - e_{2k-2} D_{2k-2}$$

$(k = 1, \ldots, n,\ D_0 := D_{2n})$,

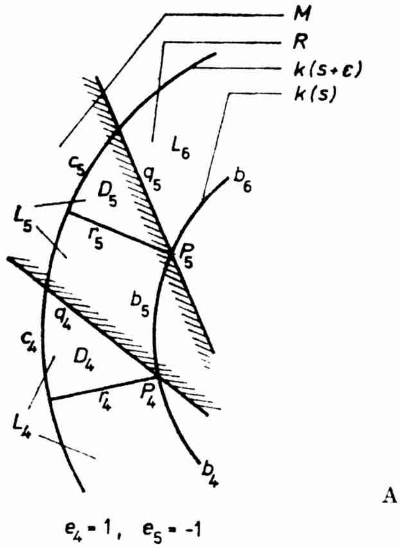

Abb. 2

also

$$A(\varepsilon) = \left(s\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{2k} - \alpha_{2k-1}) + 2\eta \cdot \sum_{i=1}^{2n} e_i D_i .$$

Wird jetzt auch der Fall zugelassen, daß die Randkurven von M und $K(s)$ gemeinsame Punkte haben, in denen sie sich nicht durchsetzen (Abb. 3), so zähle man diese Punkte zweifach, also jeweils als Anfangspunkt P_{i-1} und Endpunkt $P_i = P_{i-1}$ eines leeren Bogens b_i. Dann läßt sich für genügend kleines $|\varepsilon|$ ebenfalls wieder der Kreisring R in $2n$ Gebiete L_i zerlegen, abwechselnd innerhalb und außerhalb M gelegen und jeweils L_i an b_i angrenzend, und zwar folgendermaßen: Für die P_i, in denen die Randkurven von M und $K(s)$ sich durchsetzen, werden wieder die von P_i ausgehenden, in R gelegenen Teilstrecken q_i des Randes von M zur Abgrenzung zwischen L_i und L_{i+1} verwendet. Ist dagegen $P_{i-1} = P_i$ ein Punkt, den die Randkurven von M und $K(s)$ gemeinsam haben, ohne sich in ihm zu durchsetzen, so gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Es kann sein, daß vom Punkt $P_{i-1} = P_i$ aus zwei Teilstrecken q_{i-1}, q_i des Randes von M in den Kreisring R hineinführen. Dann grenzen diese (für genügend kleines $|\varepsilon|$) ein Teilstück L_i des Ringes R von den beiden Nachbarstücken L_{i-1} und L_{i+1} ab. Wie oben können die r_i, c_i und D_i definiert werden; jedoch kann von D_{i-1} nur die Forderung erfüllt werden, entweder ganz in L_{i-1} oder ganz in $L_i \cup L_{i+1}$ zu liegen, und ebenso von D_i, entweder ganz in $L_{i-1} \cup L_i$ oder ganz in L_{i+1} zu liegen. Liegt D_{i-1} in $L_i \cup L_{i+1}$, aber nicht nur in L_i, so liegt D_i in L_{i+1}, und an die Stelle der Disjunktheitsforderung $D_{i-1} \cap D_i = \emptyset$ tritt die Zerlegung $D_{i-1} = L_i + D_i$. Liegt D_i in $L_{i-1} \cup L_i$, aber nicht nur in L_i, so liegt D_{i-1} in L_{i-1}, und an die Stelle von $D_{i-1} \cap D_i = \emptyset$ tritt $D_i = D_{i-1} + L_i$. Daher bleiben auch in diesen Fällen (mit den entsprechenden $\alpha_i = 0$ und mit jeweils geeigneten Vorzeichen e_{i-1}, e_i) die obigen Formeln für L_{2k}, L_{2k-1} und $\Delta(\varepsilon)$ gültig.

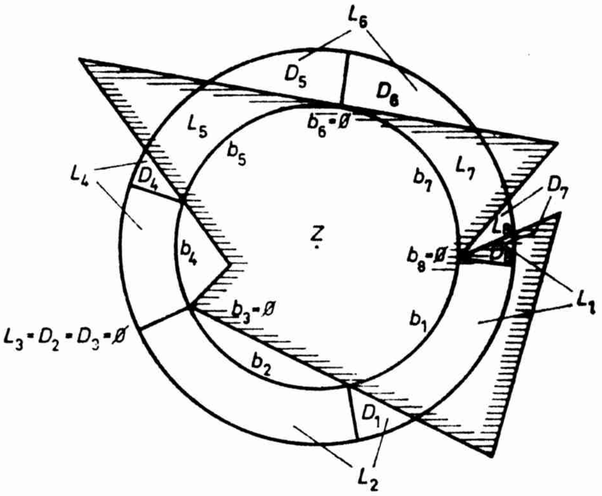

Abb. 3

e_1	e_2 e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	beliebig	1	1	1	1	-1

b) Es kann nun noch sein, daß vom Punkt $P_{i-1} = P_i$ aus keine Teilstrecke des Randes von M in den Kreisring R hineinführt. Dann wähle man $r_{i-1} = r_i = q_{i-1} = q_i$ als die in radialer Richtung von $P_{i-1} = P_i$ ausgehende, R durchquerende Strecke und übertrage die weiteren Definitionen, wobei L_i, D_{i-1} und D_i zu $\emptyset$ entarten, so daß wieder die obigen Formeln gültig bleiben (mit $\alpha_i = 0$ und sogar beliebigen Vorzeichen e_{i-1}, e_i).

Nun sei für jedes $i = 1, \ldots, 2n$ der Winkel zwischen q_i und dem zu P_i hinführenden Radius β_i genannt, wobei β_i im Fall $\varepsilon > 0$ durch $\frac{\pi}{2} \leqq \beta_i \leqq \pi$, im Fall $\varepsilon < 0$ durch $0 \leqq \beta_i < \frac{\pi}{2}$ eingeschränkt wird (Abb. 4). Ferner sei φ_i der Zentriwinkel zu c_i.

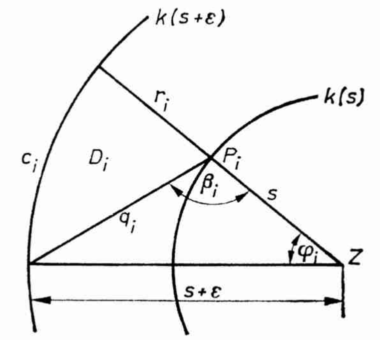

Abb. 4

Dann gilt

$$2\eta \cdot D_i = (s + \varepsilon)^2 \cdot \varphi_i - s(s + \varepsilon) \cdot \sin \varphi,$$

sowie

$$(s+\varepsilon)\cdot\sin(\pi-\beta_i-\varphi_i)=s\cdot\sin\beta_i .$$

Dabei ist, solange ε ($\neq 0$, $|\varepsilon|$ genügend klein) über Werte von einheitlichem Vorzeichen η variiert, β_i konstant, und es gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_i=0$. Somit erhält man im Fall $\beta_i \neq \frac{\pi}{2}$ für die betreffende einseitige Limesbildung $\varepsilon\to\eta 0$

$$-\lim_{\varepsilon\to\eta 0}\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon}=\frac{1}{s}\cdot\tan\beta_i .$$

Ist jedoch $\beta_i=\frac{\pi}{2}$ (also $\eta=1$), so gilt

$$2D_i=(s+\varepsilon)^2\cdot\arccos\frac{s}{s+\varepsilon}-s\sqrt{2s\varepsilon+\varepsilon^2}.$$

Damit ergibt sich in jedem Fall

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{dD_i}{d\varepsilon}=0,$$

also

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta'(\varepsilon)=s\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{2k}-\alpha_{2k-1})=\sum_{k=1}^{n}b_{2k}-\sum_{k=1}^{n}b_{2k-1}.$$

Aus $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Delta'(\varepsilon)=0$ folgt somit nach Definition der b_i die Behauptung, daß $K(s)$ durch M umfangshalbiert wird. Damit ist Satz 1 bewiesen. Die Umfangshalbierung ist, wie der Beweis zeigt, sogar notwendig und hinreichend für stationäres Verhalten der Funktion $F(s)$.

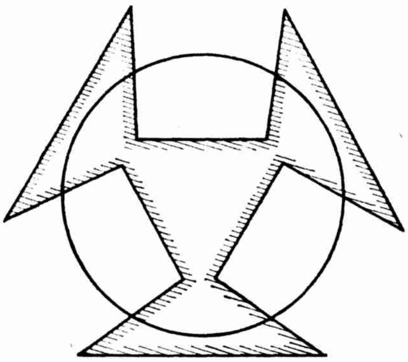

Abb. 5

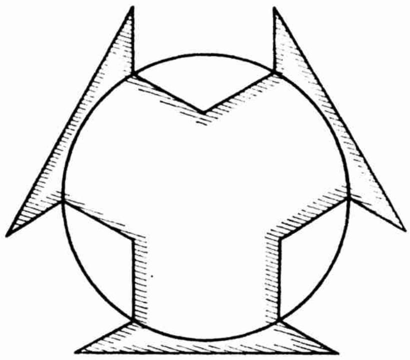

Abb. 6

In Abb. 5 und 6 sind noch, wie angekündigt, zwei Beispiele ersichtlich, bei denen in einer konzentrischen Kreisschar S für einen Wert s^* des Radius einerseits Umfangshalbierung des Kreises $K(s^*)$ durch M und folglich stationäres Verhalten von $F(s)$ an der Stelle s^* vorliegt, aber andererseits bei Abb. 5 in Gestalt eines lokalen Maximums, bei Abb. 6 mit streng monoton fallendem Durchgang durch s^*. Auch Beispiele mit streng monoton steigendem Durchgang oder in einem Intervall konstanten Verlauf von $F(s)$ lassen sich nach diesem Muster leicht konstruieren.

3. Der Halbierungssatz für symmetrische Differenz von Ovalen

Es sei M ein Oval. Dann hat M bekanntlich (s. etwa [5]) eine Randkurve c, die in jedem ihrer Punkte die beiden einseitigen Tangenten besitzt. Ferner folgt leicht: Ist Z ein innerer Punkt von M und wählt man ein φ,r-Polarkoordinatensystem mit dem Anfangspunkt Z, so gibt es eine Funktion

$$r = \varrho(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi],\ \varrho(0) = \varrho(2\pi),\ \varrho(\varphi) > 0 \text{ für alle } \varphi \in [0, 2\pi]\big),$$

die die Randkurve c beschreibt. Denkt man sich $\varrho(\varphi)$ periodisch fortgesetzt und damit auch 0 und 2π als innere Werte des Definitionsbereiches aufgefaßt, so besitzt $\varrho(\varphi)$ an jeder Stelle φ des Definitionsbereiches die beiden einseitigen Ableitungen.
Ebenso folgt, wenn $K(1)$ ab jetzt als Oval vorausgesetzt wird: Es gibt eine Funktion

$$r = \sigma(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi],\ \sigma(0) = \sigma(2\pi),\ \sigma(\varphi) > 0 \text{ für alle } \varphi \in [0, 2\pi]\big),$$

die die Randkurve $k(1)$ von $K(1)$ beschreibt. Auch $\sigma(\varphi)$ besitzt an jeder Stelle φ des Definitionsbereiches die beiden einseitigen Ableitungen.
Insbesondere ist $\sigma(\varphi)$ stetig, so daß sich statt des Parameters φ der doppelte Flächeninhalt eines Sektors aus $K(1)$ als Parameter einführen läßt: Es existiert

$$t = t(\varphi) = \int_0^\varphi \sigma(u)^2\, du \qquad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

als streng monoton steigende Funktion mit der Ableitung $t'(\varphi) = \sigma(\varphi)^2$ und ist somit umkehrbar zu einer im t-Intervall $[0, T]$ (mit $T := t(2\pi)$) definierten, streng monoton steigenden Funktion $\varphi = \varphi(t)$ mit überall positiver Ableitung $\dot{\varphi}(t)$. Hiermit entsteht für $k(1)$ die Parameterdarstellung

$$k(1)\colon \begin{Bmatrix} \varphi = \varphi(t), \\ r = \sigma\big(\varphi(t)\big) \end{Bmatrix} \qquad (t \in [0, T]).$$

Mit demselben Parameter sei auch c dargestellt:

$$c\colon \begin{Bmatrix} \varphi = \varphi(t), \\ r = \varrho\big(\varphi(t)\big) \end{Bmatrix} \qquad (t \in [0, T]).$$

Geht weiterhin für reelles $s > 0$ das Oval $K(s)$ bzw. seine Randkurve $k(s)$ aus $K(1)$ bzw. $k(1)$ durch Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor s hervor, so hat $k(s)$ die Parameterdarstellung

$$k(s)\colon \begin{Bmatrix} \varphi = \varphi(t), \\ r = s\sigma\big(\varphi(t)\big) \end{Bmatrix} \qquad (t \in [0, T]).$$

Ein Punkt von $k(s)$, der sich hierbei aus einem Parameterwert t ergibt, liegt *genau dann außerhalb M, wenn*

$$s\sigma\big(\varphi(t)\big) > \varrho\big(\varphi(t)\big) \tag{*}$$

gilt. Definiert man

$$f(t) = \frac{\varrho\big(\varphi(t)\big)}{\sigma\big(\varphi(t)\big)} \qquad (t \in [0, T]),$$

so ist folglich *das Maß $m(s)$ der Menge aller Parameterwerte t mit der Eigenschaft* (*) auch das Maß der Menge aller t mit

$$f(t) < s. \tag{**}$$

Unmittelbar evident ist hiernach:

(1) *Bezeichnet a das Minimum und b das Maximum von $f(t)$ im Intervall $[0, T]$, so gilt $m(s) = 0$ für alle s mit $0 < s \leqq a$, $m(s) = T$ für alle s mit $s > b$.*

Sodann zeigen wir für den Fall $a < b$:

(2) *Im Intervall $[a, b]$ ist $m(s)$ streng monoton steigend.*

Beweis. Es sei $a \leqq s_1 < s_2 \leqq b$. Wegen der Stetigkeit von f und nach Definition von a, b gibt es ein Intervall j positiver Länge e so, daß $s_1 < f(t) < s_2$ für alle $t \in j$ gilt. Ferner gilt für alle übrigen t der Schluß $f(t) < s_1 \Rightarrow f(t) < s_2$. Die Intervalle außerhalb j liefern also zu dem Maß $m(s_1)$ einen höchstens ebenso großen Beitrag wie zu dem Maß $m(s_2)$, das Intervall j dagegen liefert zu $m(s_1)$ den Beitrag 0 und zu $m(s_2)$ den Beitrag e. Daher gilt $m(s_1) < m(s_2)$.

Aus (1) und (2) erhält man in üblicher Weise, etwa durch Dedekindsche Schnittbildung, die folgende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage zur abgeschwächten Parameterhalbierung:

(3) *Es gibt genau ein s^* mit folgender Eigenschaft:*
Für alle $s < s^*$ ist $m(s) < \frac{1}{2} T$, für alle $s > s^*$ ist $m(s) \geqq \frac{1}{2} T$.

Wir wollen nun für Zahlen s_1, s_2 mit $s_1 < s_2$ Aussagen über die Werte $F(s_i)$ des Flächeninhaltes $F(s) := \big(M \cup K(s)\big) \setminus \big(M \cap K(s)\big)$ herleiten, um schließlich die angekündigten Monotonieaussagen zu erhalten und damit Satz 2 zu beweisen.
Zunächst betrachten wir zwei triviale Fälle:

(4) *Im Intervall $(0, a]$ ist $F(s)$ streng monoton fallend.*

Beweis. Wenn $0 < s_1 < s_2 \leqq a$ ist, so gilt für alle $t \in [0, T]$ erst recht $s_1 < s_2 \leqq f(t)$, also $s_1\sigma\big(\varphi(t)\big) < s_2\sigma\big(\varphi(t)\big) \leqq \varrho\big(\varphi(t)\big)$. Daraus folgt $K(s_1) \subset K(s_2) \subseteqq M$, also ist $F(s_1) - F(s_2)$ der Flächeninhalt von $K(s_2) \setminus K(s_1)$ und daher positiv.

(5) *Im Intervall $[b, +\infty)$ ist $F(s)$ streng monoton steigend.*

Dies folgt entsprechend, indem man $M \subseteqq K(s_1) \subset K(s_2)$ nachweist.

Im Fall $a \leqq s_1 < s_2 \leqq b$ sei

$$A := \big\{t \in [0, T] : s_2\sigma\big(\varphi(t)\big) \leqq \varrho\big(\varphi(t)\big)\big\},$$
$$B := \big\{t \in [0, T] : s_1\sigma\big(\varphi(t)\big) \leqq \varrho\big(\varphi(t)\big) < s_2\sigma\big(\varphi(t)\big)\big\},$$
$$C := \big\{t \in [0, T] : \varrho\big(\varphi(t)\big) < s_1\sigma\big(\varphi(t)\big)\big\}$$

gesetzt. Hierfür erhält man unter Beachtung der Definition von $m(s)$ durch (*):

(6) *Das Intervall $[0, T]$ ist in die disjunkten Mengen A, B, C zerlegt. C hat das Maß $m(s_1)$, B hat das Maß $m(s_2) - m(s_1)$, und A hat das Maß $T - m(s_2)$.*

Die Bilder der Mengen A, B, C bei der Funktion $\varphi(t)$ seien $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ genannt. Hiermit hat $M \cup K(s_1)$ den doppelten Flächeninhalt

$$H_1 = \int_0^T \Big(\max\big(\varrho(\varphi(t)), s_1\sigma(\varphi(t))\big)\Big)^2 \dot{\varphi}(t)\, dt$$
$$= \int_{\varphi(A)} \varrho(\varphi)^2\, d\varphi + \int_{\varphi(B)} \varrho(\varphi)^2\, d\varphi + \int_{\varphi(C)} s_1^2\sigma(\varphi)^2\, d\varphi.$$

Ebenso hat $M \cap K(s_1)$ den doppelten Flächeninhalt

$$G_1 = \int\limits_{\varphi(A)} s_1^2 \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(B)} s_1^2 \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(C)} \varrho(\varphi)^2 \, d\varphi .$$

Weiter hat $M \cup K(s_2)$ den doppelten Flächeninhalt

$$H_2 = \int\limits_{\varphi(A)} \varrho(\varphi)^2 \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(B)} s_2^2 \sigma(\varphi^2) \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(C)} s_2^2 \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi$$

und $M \cap K(s_2)$ den doppelten Flächeninhalt

$$G_2 = \int\limits_{\varphi(A)} s_2^2 \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(B)} \varrho(\varphi)^2 \, d\varphi + \int\limits_{\varphi(C)} \varrho(\varphi)^2 \, d\varphi .$$

Zur weiteren Abkürzung setzen wir (Abb. 7)

$$\alpha = \int\limits_{\varphi(A)} \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi , \quad \beta = \int\limits_{\varphi(B)} \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi , \quad \gamma = \int\limits_{\varphi(C)} \sigma(\varphi)^2 \, d\varphi ,$$

$$\delta_1 = \int\limits_{\varphi(B)} \left(\varrho(\varphi)^2 - s_1^2 \sigma(\varphi)^2 \right) d\varphi , \qquad \delta_2 = \int\limits_{\varphi(B)} \left(s_2^2 \sigma(\varphi)^2 - \varrho(\varphi)^2 \right) d\varphi .$$

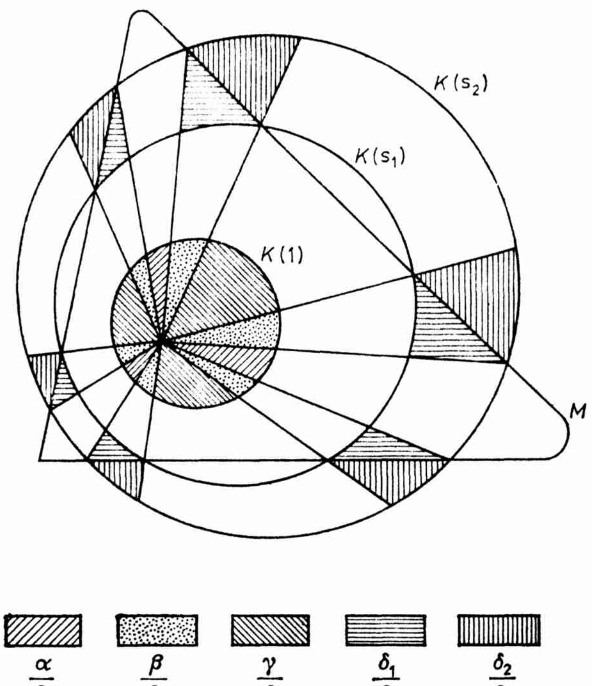

Abb. 7

Hiernach erhält man für $2\big(F(s_2) - F(s_1)\big)$ die Ausdrücke

$$2\big(F(s_2) - F(s_1)\big) = H_2 - G_2 - H_1 + G_1 = (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma - \alpha) + \delta_2 - \delta_1 \qquad \text{(I)}$$

$$= (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma - \alpha + \beta) - 2\delta_1 \qquad \text{(II)}$$

$$= (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma - \alpha - \beta) + 2\delta_2 . \qquad \text{(III)}$$

Die Zahlen α, β, γ sind offensichtlich nichtnegativ, wir zeigen $\delta_1, \delta_2 > 0$: Nach (2) und (6) hat B positives Maß. Ferner gibt es wegen $a \leqq s_1 < s_2 \leqq b$ sowohl

Werte t mit $f(t) < s_2$ als auch Werte t mit $s_1 < f(t)$. Hiernach gibt es in B nicht nur Intervalle, in denen überall $\varrho(\varphi(t)) < s_2\sigma(\varphi(t))$ gilt, sondern auch Intervalle, in denen überall $s_1\sigma(\varphi(t)) < \varrho(\varphi(t))$ gilt. Daraus folgt $\delta_1, \delta_2 > 0$.

Nun beweisen wir:

(7) *$F(s)$ ist in $[a, b]$ stetig.*

Beweis. Aus (I) folgt

$$2\,|F(s_2) - F(s_1)| \leqq (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma + \alpha) + \delta_2 + \delta_1$$
$$= (s_2^2 - s_1^2) \int\limits_0^{2\pi} \sigma(\varphi)^2\, d\varphi = (s_2^2 - s_1^2)\, T,$$

und dies wird bei genügend kleinem $s_2 - s_1$ beliebig klein.

Ähnlich wie für das soeben genannte Integral erhalten wir auch Wertangaben für α, β, γ: Nach der Einführung des Parameters t gilt nämlich für jedes $t \in [0, T]$

$$\int\limits_0^t \sigma(\varphi(t))^2\, \dot\varphi(t)\, dt = \int\limits_0^{\varphi(t)} \sigma(u)^2\, du = t,$$

und daraus folgt nach (6)

$$\alpha = \int\limits_A \sigma(\varphi(t))^2\, \dot\varphi(t)\, dt = T - m(s_2),$$
$$\beta = \int\limits_B \sigma(\varphi(t))^2\, \dot\varphi(t)\, dt = m(s_2) - m(s_1),$$
$$\gamma = \int\limits_C \sigma(\varphi(t))^2\, \dot\varphi(t)\, dt = m(s_1).$$

Damit kommen wir zu den gewünschten Monotonieaussagen:

(8) *$F(s)$ ist in $[a, s^*)$ streng monoton fallend.*

Beweis. Aus $a \leqq s_1 < s_2 < s^*$ und (3) folgt $m(s_2) < \frac{1}{2}\,T$, nach (II) also

$$2(F(s_2) - F(s_1)) < (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma - \alpha + \beta) = (s_2^2 - s_1^2)\,(2m(s_2) - T) < 0.$$

(9) *$F(s)$ ist in $(s^*, b]$ streng monoton steigend.*

Beweis. Aus $s^* < s_1 < s_2 \leqq b$ und (3) folgt $\frac{1}{2}\,T \leqq m(s_1)$, nach (III) also

$$2(F(s_2) - F(s_1)) > (s_2^2 - s_1^2)\,(\gamma - \alpha - \beta) = (s_2^2 - s_1^2)\,(2m(s_1) - T) \geqq 0.$$

Aus (8), (9) und (7) folgt sogar

(10) *$F(s)$ ist in $[a, s^*]$ streng monoton fallend,*

(11) *$F(s)$ ist in $[s^*, b]$ streng monoton steigend.*

Mit (4), (10), (11), (5) ist die globale Minimaleigenschaft von $F(s)$ an der Stelle s^* und damit Satz 2 bewiesen.

4. Variable Streck- bzw. Halbierungszentren

Es seien M und K zwei Ovale mit endlichem Ränderdurchschnitt. Bei einer Durchlaufung des Randes von K seien diejenigen Schnittpunkte mit dem Rand von M, in denen diese Randkurven sich durchsetzen, der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots$ bezeichnet. Dann zerlegen diese Punkte den Rand von K in eine gerade Anzahl $2n$ von Bogenstücken, die abwechselnd innerhalb und außerhalb von M liegen; dabei habe jeweils b_i den Endpunkt P_i $(i = 1, \ldots, 2n)$, und es liegen etwa $b_1, b_3, \ldots$ innerhalb M, aber $b_2, b_4, \ldots$ außerhalb M. (Anders als in Abschnitt 2 bleiben hier also gemeinsame Randpunkte, bei denen keine Durchsetzung vorliegt, unberücksichtigt.)
Es sei nun angenommen, daß zwei verschiedene Punkte Z_m $(m = 1, 2)$ des Inneren J von $M \cap K$ Halbierungszentren von K bezüglich M sind. Bezeichnet dann $S_{i,m}$ den zum Bogen b_i gehörenden Sektor aus K mit dem Zentrum Z_m, so ist jeweils die Summe

$$\Phi_m := \sum_{k=1}^{n} S_{2k,m}$$

gleich dem halben Flächeninhalt von K $(m = 1, 2)$. Bezeichnet ferner G_i das zum Bogen b_i gehörende Segment aus K, so ist

$$S_{2k,m} = Z_m P_{2k-1} P_{2k} + G_{2k} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2),$$

wobei der Dreiecksinhalt $Z_m P_{2k-1} P_{2k}$ orientiert zu nehmen ist, und zwar so, daß er positiv für den Fall wird, in dem Z_m im Innern des Polygons $P_1 P_2 \ldots P_{2n}$ liegt.
Ferner sei Z_0 ein variabler Punkt in J, für ihn seien die eingeführten Bezeichnungen mit $m = 0$ verwendet. Da die G_{2k} von Z_m unabhängig sind, folgt dann, daß jedes einzelne $S_{2k,0}$ und folglich auch die Summe Φ_0 eine lineare Funktion der Koordinaten von Z_0 ist. Da diese nun für Z_1 und Z_2 denselben Wert hat, ist sie auf der gesamten Geraden g durch Z_1, Z_2 konstant. Also sind alle Punkte $Z_0 \in g \cap J$ ebenfalls Halbierungszentren von K bezüglich M.
Daraus ergibt sich die in Abschnitt 1 vor Satz 3 angegebene Beschreibung der Menge H aller Halbierungszentren, und unter Berücksichtigung von Satz 2 erhält man Satz 3.

LITERATUR

[1] Dinghas, A.: Über das Verhalten der Entfernung zweier Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben. Archiv Math. *8* (1957), 46–51.

[2] Koch, R. A., und L. Stammler: Die Darstellung statistischer Kluftmessungen in flächengleichen Netzen und ihr Vergleich zu herkömmlichen Darstellungsarten. Geologie *17* (1968), 1003–1030.

[3] Krötenheerdt, M.: Existenz und Berechnung eines flächengleichen Netzes auf der Kugel mit „möglichst kreisförmigen" Netzmaschen. Staatsexamensarbeit, Pädagogische Hochschule Potsdam 1969.

[4] Stammler, L.: Ein Übertragungsnetz zur Kluftstatistik. Engineering Geology *5* (1971), 291–312.

[5] Strubecker, K.: Differentialgeometrie I, 2. Aufl., Sammlung Göschen Bd. 1113/1113a, W. de Gruyter, Berlin 1964.

Manuskripteingang: 10. 1. 1977

VERFASSER:

Ludwig Stammler, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg

Bernulf Weissbach, Sektion Mathematik/Physik der Technischen Hochschule „Otto von Guericke" Magdeburg