Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 33–53

Einige Ergebnisse aus der Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände

GERD RICHTER

Einer der wichtigsten Zweige der allgemeinen Gruppentheorie ist die Theorie der primären abelschen Gruppen.
In der vorliegenden Arbeit soll eine spezielle Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untergruppenverbände der verallgemeinerten primären abelschen Gruppen (siehe [12]) echt enthält, also nicht nur der primären abelschen Gruppen, umfassend untersucht werden. Dabei werden unter anderem verbandstheoretische Analoga zu wichtigen gruppentheoretischen Aussagen bewiesen. Es handelt sich im wesentlichen um zum Teil vereinfachte Beweise von Ergebnissen aus der Dissertation [16] des Verfassers.
Dieser Beitrag schließt sich eng an die Arbeiten von R. FRITZSCHE [2, 3] und R. FRITZSCHE und G. RICHTER [5] an, wobei dem dort verwendeten Begriff „ausgezeichnetes Element" der Begriff „Zyklus" entspricht.
Im ersten Abschnitt sollen die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungsweisen und Begriffsbildungen eingeführt werden. Im zweiten Abschnitt werden einige Sätze und Hilfssätze, die für Beweise in den weiteren Abschnitten benötigt werden, bereitgestellt. Im dritten Abschnitt wird gezeigt, daß die Klasse algebraischer modularer Verbände, in der der von HEAD und KERTÉSZ geprägte Begriff „Servanzelement" mit dem durch die Gruppentheorie inspirierten mittels der Höhe definierten Begriff übereinstimmt, eine Klasse spezieller „zyklisch erzeugter" modularer Verbände ist.
Im vierten Abschnitt kann nachgewiesen werden, daß zwei in der Menge der Zyklen definierte Unabhängigkeiten D-Unabhängigkeiten im Sinne von KERTÉSZ [7, 8] sind. Darauf aufbauend sollen in den Abschnitten V und VI Aussagen über Servanzuntergruppen, Basisuntergruppen und dividierbare Untergruppen primärer abelscher Gruppen verallgemeinert werden.
Weiterhin wird im Abschnitt VII ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß die Vereinigung aller „Zyklen endlicher Ordnung" direkte Komponente vom Einselement ist.

I. L sei ein algebraischer (d. h. kompakt erzeugter vollständiger) Verband, $0 \in L$ das Nullelement, $1 \in L$ das Einselement von L. K sei die Menge der kompakten Elemente von L.
Gilt $a \leqq b$ mit $a, b \in L$, so bezeichne b/a denjenigen Teilverband von L, der aus allen Elementen $x \in L$ mit $a \leqq x \leqq b$ besteht. Ein Element $z \in b/a$ heiße genau dann ein *Zyklus* oder ein *zyklisches Element* in b/a, wenn z/a eine Kette und z/x eine end-

liche Kette für alle x mit $z \geqq x > a$ ist, insbesondere ist dann a ein Zyklus in b/a. Die endliche oder unendliche Länge der Kette z/a heiße die *Ordnung* des Zyklus z bezüglich a und werde mit $O_a(z)$ bezeichnet.
Es sei $Z(b/a)$ die Menge aller Zyklen von b/a, es sei $Z_1(b/a)$ die Menge aller Zyklen $z \in Z(b/a)$ mit $O_a(z) < \infty$ und $Z_2(b/a)$ sei die Menge aller Zyklen $z \in Z(b/a)$ mit $O_a(z) = \infty$.
Zu jedem Zyklus $z \in Z(b/a)$ mit $z > a$ existiert in b/a genau ein unterer Nachbar. Dieser werde mit z'_a bezeichnet, ferner sei $a'_a \overset{\text{def}}{=} a$. Die Bezeichnungsweise $c \prec b$ bedeutet, daß c ein unterer Nachbar von b ist (SZÁSZ [18]).
Für jedes beliebige Element $c \in b/a$ werde

$$c'_a \overset{\text{def}}{=} \bigcup \left(z'_a \mid z \in Z(c/a)\right),$$
$$c_a^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (c_a^{(n-1)})'_a,$$
$$c_a^{(0)} \overset{\text{def}}{=} c$$

gesetzt. Gilt $z \in Z(b/a)$ und existiert eine größte nichtnegative ganze Zahl m, so daß die Gleichung $x_a^{(m)} = z$ mit $x \in Z(b/a)$ lösbar ist, so heiße $H_b(z) \overset{\text{def}}{=} m$ die *Höhe* des Elements z bezüglich b in b/a.
Falls eine solche Zahl nicht existiert, werde $H_b(z) \overset{\text{def}}{=} \infty$ gesetzt. Zur Abkürzung wird weiter definiert:

$$Z \overset{\text{def}}{=} Z(L), \quad Z_1 \overset{\text{def}}{=} Z_1(L), \quad Z_2 \overset{\text{def}}{=} Z_2(L),$$
$$O(z) \overset{\text{def}}{=} O_0(z), \quad c' \overset{\text{def}}{=} c'_0, \quad H(z) \overset{\text{def}}{=} H_1(z).$$

Ein Zyklus von L heiße Zyklus (schlechthin).
Es sei noch bemerkt, daß in einem algebraischen Verband jeder Zyklus z kompakt ist. Denn ein Zyklus z kann nur dann Vereinigung kompakter Elemente sein, wenn z selbst kompakt ist.
Weiterhin heiße ein algebraischer Verband L *zyklisch erzeugt*, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

$$a \in L \Rightarrow a = \bigcup \,(z_\nu \mid z_\nu \in Z, \quad N \text{ geeignete Indexmenge}, \quad \nu \in N).$$

Die direkte Vereinigung von Elementen $b_\nu \in b/a$ ($\nu \in N$, N Indexmenge) in b/a werde mit $\dot{\bigcup}_a(b_\nu \mid \nu \in N)$ bzw. mit $\dot{\bigcup}_a(b_\nu \mid \nu = 1, \ldots, n) = b_1 \,\dot{\cup}_a\, b_2 \,\dot{\cup}_a \cdots \dot{\cup}_a\, b_n$ bezeichnet, und es sei

$$\dot{\bigcup}\,(b_\nu \mid \nu \in N) \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}_0\,(b_\nu \mid \nu \in N).$$

Die Elemente b_ν werden direkte Komponenten von $\dot{\bigcup}\,(b_\nu \mid \nu \in N)$ genannt.
Eine Untermenge $Q \subseteqq L$ heiße genau dann *unabhängig*, wenn die direkte Vereinigung der Elemente von Q existiert, und *maximal unabhängig* in der Untermenge $R \subseteqq L$, wenn unter der Voraussetzung $Q \subseteqq R \subseteqq L$ außerdem für jedes Element $c \in R \setminus Q$ die Relation $c \cap \dot{\bigcup}\,(d \mid d \in Q) > 0$ besteht.
Ferner heiße eine unabhängige Untermenge kompakter Elemente des Verbands L genau dann eine *Basis* von L, wenn deren direkte Vereinigung das Einselement von L ist. Bilden insbesondere Zyklen eine Basis von L, so werde diese eine *zyklische Basis* genannt.
Eine Basis von L ist sicher maximal unabhängig in L, da $a \leqq 1$ für jedes Element $a \in L$ gilt.

Weiter heiße ein Element $b \in L$ genau dann ein *Servanzelement* in L, wenn zu jedem Element $c \in K$ ein Element $d(\leqq b \cup c)$ mit $b \cup c = b \dot{\cup} d$ existiert (vgl. A. KERTÉSZ [9]).
Ein Servanzelement $a \in L$ heiße genau dann *Hauptelement* von L, wenn a direkte Vereinigung von Zyklen ist und $1'_a = 1$ gilt. Eine Untermenge $Q \subseteqq Z$ heiße genau dann *S-unabhängig*, wenn $\dot{\bigcup} (z \mid z \in Q)$ existiert und Servanzelement in L ist, und *maximal S-unabhängig* in der Untermenge $R \subseteqq Z$, wenn außerdem unter der Voraussetzung $Q \subseteqq R \subseteqq Z$ für jedes Element $x \in R \setminus Q$ die Menge $Q \cup \{x\}$ nicht S-unabhängig ist. Ein Element $c \in b/a$ $(a, b, c \in L)$ heiße genau dann *injektiv* im Teilverband b/a, wenn $c'_a = c$ gilt. Ein injektives Element $v \in b/a$ heiße genau dann *Quasizyklus* in b/a, wenn v/a eine Kette ist.
$\bar{Z}(b/a)$ sei die Menge aller Quasizyklen des Teilverbandes b/a, und es sei $\bar{Z} \overset{\text{def}}{=} \bar{Z}(L)$.

II. Die Beweise der folgenden Sätze und Hilfssätze befinden sich, insofern kein weiterer Literaturhinweis angegeben ist, in der Dissertation [16] des Verfassers. Im folgenden sei L ein algebraischer modularer Verband, falls nichts anderes vorausgesetzt wird.

Satz 1 (siehe KERTÉSZ [9]). *Eine Untermenge B von K ist genau dann eine Basis von L, wenn B maximal unabhängig in K und $\dot{\bigcup} (c \mid c \in B)$ ein Servanzelement in L ist.*

Satz 2. *Es sei a Servanzelement in L mit $a \leqq b$, $b \in L$. Ist b Servanzelement in $1/a$, dann ist b auch Servanzelement in L.*

Satz 3. *Es sei $a, b \in L$ mit $a \leqq b$. Ist b Servanzelement in L, dann ist b auch Servanzelement in $1/a$.*

Hilfssatz 1. *Es sei L ein algebraischer Verband; $a \in L$ und $Q \subseteqq L$. Es gilt $a \cap \bigcup (x \mid x \in Q) \overset{\text{def}}{=} d > 0$ genau dann, wenn $a \cap \bigcup (x \mid x \in Q' \subseteqq Q) > 0$ für eine endliche Untermenge Q' von Q gilt.*

Hilfssatz 2. *In einem algebraischen modularen Verband ist jede direkte Komponente eines Servanzelements ebenfalls Servanzelement.*

Hilfssatz 3. *Es sei L ein algebraischer modularer Verband mit der Eigenschaft*

$$d \in L, \quad c \in K, \quad d \leqq c \Rightarrow d \in K.$$

Die direkte Vereinigung kompakter Elemente von L ist genau dann Servanzelement, wenn jede direkte Vereinigung endlich vieler (jede „endliche" direkte Vereinigung) dieser Elemente Servanzelement ist.

Hilfssatz 4. *Es sei $a, b \in L$, $a \leqq b$, $b = \dot{\bigcup}_a (a \cup y_\nu \mid y_\nu \in L, \nu \in N)$. Gilt $y_\nu \cap a = 0$ für alle $\nu \in N$, dann gilt*

$$b = a \dot{\cup} \dot{\bigcup} (y_\nu \mid \nu \in N).$$

Hilfssatz 5. *Es sei L ein vollständiger Verband, und $c_1 \in L$, $c \in K$ seien Elemente mit $c_1 < c$. Dann existiert ein Element $c_0 \in L$ mit $c_1 \leqq c_0 \prec c$.*

Im folgenden sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband.

Hilfssatz 6 (siehe auch [5]). *Es ist $u \in Z(b/a)$ genau dann, wenn $u = a \cup z$ mit $z \in Z(b/0)$ gilt.*

Bemerkung. Aus dem Beweis von Hilfssatz 6 folgt, daß jeder Teilverband der Form b/a eines zyklisch erzeugten modularen Verbands ebenfalls zyklisch erzeugt ist.

Hilfssatz 7 (siehe auch [5]). *Ist $u = a \cup z \in Z(b/a)$, $z \in Z$, dann gilt $u_a^{(n)} = a \cup z^{(n)}$.*

Hilfssatz 8 (siehe Eigenschaft (III) in [2, 3]). *Es sei $z_1, z_2 \in Z$, $a \in L$, $z_1 \leqq z_2 \cup a$, $z_1 \nleqq z_2' \cup a$. Dann gilt $a \cup z_1 = a \cup z_2$, also insbesondere $z_2 \leqq a \cup z_1$.*

Hilfssatz 9. *Es sei $z \in Z$ mit $z \leqq \bigcup (z_\nu \mid z_\nu \in Z, \nu \in N)$ und $z \nleqq \bigcup (z_\nu' \mid \nu \in N)$. Dann existiert ein $\nu_0 \in N$ mit $\bigcup (z_\nu \mid \nu \in N) = z \cup \bigcup (z_\nu \mid \nu \in N \setminus \{\nu_0\})$.*

Hilfssatz 10 (siehe Eigenschaft (II) in [2, 3]). *Es sei $z \in Z$ mit $z \leqq \bigcup (b_\nu \mid b_\nu \in L, \nu \in N)$. Dann gilt $z' \leqq \bigcup (b_\nu' \mid \nu \in N)$.*

Folgerung. *Ist $a = \bigcup (b_\nu \mid \nu \in N)$, so gilt $a' = \bigcup (b_\nu' \mid \nu \in N)$.*

Hilfssatz 11. *Es sei $a, b, c \in L$ mit $c \leqq a \leqq b$ und a Servanzelement in b/c. Dann gilt $H_a(z) = H_b(z)$ für alle $z \in Z(a/c)$.*

Hilfssatz 12. *Gilt $c \in K$, $d \in L$ und $d \leqq c$, dann gilt auch $d \in K$.*

Hilfssatz 13. *Es sei $z \in Z$ mit $z \leqq \dot{\bigcup} (y_\nu \mid y_\nu \in Z \cup \bar{Z}, \nu \in N)$. Dann existiert zu jedem $\nu \in N$ ein Zyklus $z_\nu \leqq y_\nu$ derart, daß $O(z_\nu) \leqq O(z)$ und $z \leqq \bigcup (z_\nu \mid \nu \in N)$ gilt.*

Folgerung 1. *Ist $z \in Z$ Atom in L mit $z \leqq \dot{\bigcup} (y_\nu \mid y_\nu \in Z \cup \bar{Z}, \nu \in N)$, dann gibt es eine Menge von Atomen z_ν ($\nu \in N' \subseteq N$) mit $z_\nu \leqq y_\nu$ für jedes $\nu \in N'$ und $z \leqq \dot{\bigcup} (z_\nu \mid \nu \in N')$.*

Folgerung 2. *Ist $z \in Z$ ein Zyklus mit $O(z) = k$ und*

$$z^{(k-1)} \nleqq \dot{\bigcup} (z_\nu^{(k-1)} \mid z_\nu \in Z, O(z_\nu) \geqq k, \nu \in N),$$

dann gilt $z \cap \dot{\bigcup} (z_\nu \mid \nu \in N) = 0$.

Hilfssatz 14. *Es sei $a, b, c \in L$ mit $c \leqq a \leqq b$, a Servanzelement in b/c und $a_c^{(n)} = c$. Dann gilt $a \cap b_c^{(n)} = c$.*

Satz 4 (siehe auch [5]). *Es sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband, und es sei $a \cap b = c$, $z \in Z(a \cup b/c)$, $z^{(n)} \leqq a$ $(n \geqq 0)$ $(a, b, c \in L)$. Dann existiert ein Element $y \in Z(a/0)$ mit der Eigenschaft $z^{(n)} \cup c = y^{(n)} \cup c$.*

Satz 5 (siehe auch [5]). *Besitzt ein zyklisch erzeugter modularer Verband L mit der Eigenschaft $Z = Z_1$ eine zyklische Basis Q, so gilt $1 = \bigcup (a_i \mid i = 1, 2, \ldots)$ mit $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ und $H(z) \leqq h_i$ für alle $z \in Z(a_i/0)$ mit $z > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wobei h_i geeignete natürliche Zahlen sind.*

III. Der eingangs definierte Begriff „Servanzelement in einem algebraischen modularen Verband" ist allgemeiner als der durch die Gruppentheorie inspirierte mittels der Höhe definierte Begriff.

Um Ergebnisse der Theorie der primären abelschen Gruppen verallgemeinern zu können, ist es zweckmäßig, die Klasse derjenigen algebraischen modularen Verbände zu betrachten, in der beide Begriffe übereinstimmen. Deshalb soll zunächst die Klasse der algebraischen modularen Verbände, die die Eigenschaft (i) besitzen, untersucht werden. Dabei sei

(i) $a, b, c \in L, \quad c \leqq a \leqq b, \quad H_b(z) = H_a(z)$ für alle $z \in Z(a/c)$
$\Rightarrow a$ ist Servanzelement in b/c.

Es wird gezeigt werden (Sätze 6, 7 und 8), daß die Eigenschaft (i) hinreichend und notwendig dafür ist, daß ein algebraischer modularer Verband mit (i) ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (iv) ist. Dabei sei

(iv) $\quad z^{(n)} \leqq b^{(n)} \cup c, \quad z^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)} \cup c \quad$ mit $\quad z \in Z, \quad b, c \in L$
$\Rightarrow$ es existiert ein $x \in Z$ mit $x \leqq z \cup b, \; x^{(n)} \leqq c, \quad x^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)} \cup c.$

Insbesondere ist dann (iv) hinreichend dafür, daß in einem zyklisch erzeugten modularen Verband die Umkehrung von Hilfssatz 11 gilt. Die Eigenschaft (iv) ist etwas schwächer als die Eigenschaft (IV') in [3].

Ferner wird in Hilfssatz 15 der Zusammenhang zwischen der Höhe des Zyklus $z \in a/c$ bezüglich a und der nichtnegativen ganzen Zahl n, für die $z \leqq a_c^{(n)}$ gilt, herausgestellt.

Satz 8 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Prüfer [15] und R. Baer [1], der besagt, daß jede primäre abelsche Gruppe, deren Elemente von beschränkter Ordnung sind, eine direkte Summe zyklischer Gruppen ist. Ein entsprechendes Analogon zu diesem Satz wurde bereits von R. Fritzsche [2] bewiesen, jedoch erlauben die bisher vorliegenden Sätze und Hilfssätze eine von [2] abweichende Beweisführung.

In Hilfssatz 16 wird gezeigt, daß jeder Teilverband b/c die Eigenschaft (iv) besitzt, wenn L diese Eigenschaft hat.

Hilfssatz 17 besagt, daß jedes kompakte Element eines zyklisch erzeugten modularen Verbands die direkte Vereinigung endlich vieler Zyklen ist.

Satz 9 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov [10], der besagt: Wenn C Servanzuntergruppe einer abelschen Gruppe G ist und die Faktorgruppe G/C als direkte Summe zyklischer Gruppen darstellbar ist, so ist C direkter Summand von G.

Satz 6. *Es sei L ein algebraischer modularer Verband mit der Eigenschaft* (i). *Dann ist L zyklisch erzeugter modularer Verband.*

Beweis. L ist ein kompakt erzeugter Verband. Kann man zeigen, daß jedes kompakte Element Vereinigung von Zyklen ist, so ist L zyklisch erzeugt. Also sei $c \in K$ und $c_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcup \big(z \mid z \in Z(c/0)\big) < c$. Dann gilt aber $H_c(z) = H_{c_1}(z)$ für alle $z \in Z(c_1/0)$ $= Z(c/0)$, weshalb c_1 nach (i) Servanzelement in $c/0$ ist.
c ist kompaktes Element in $c/0$, also existiert ein $e \in c/0$ mit $c_1 \cup c = c_1 \dot\cup e$.

$$\begin{array}{l}\text{Da } z \leqq c_1 \text{ für alle } z \in Z(c/0) \text{ gilt, existieren wegen}\\ c_1 \cap e = 0 \text{ in } e/0 \text{ keine Zyklen } z > 0.\end{array} \tag{1}$$

Aus $c/c_1 = c_1 \dot\cup e/c_1 \cong e/0$ folgt $e \in K$, d. h., e besitzt nach Hilfssatz 5 einen unteren Nachbarn d.

Da $Z(e/0) = Z(d/0) = \{0\}$ gilt, ist d Servanzelement in $e/0$, d. h., es gibt ein $f \in e/0$ mit $d \cup e = d \dot\cup f$.

Wegen $e/d = d \dot\cup f/d \cong f/0$ ist f Atom in $e/0 \subseteq c/0$ im Widerspruch zu (1).

Damit ist gezeigt, daß die Annahme $c_1 < c$ falsch war, d. h., es gilt $c = c_1$. Also ist L zyklisch erzeugt.

Hilfssatz 15. *L sei ein algebraischer modularer Verband mit der Eigenschaft* (i), *und es sei $a, c \in L$ mit $c \leqq a$ und $z \in Z(a/c)$ mit $z \leqq a_c^{(n)}$. Dann existiert ein $z_0 \in Z(a/c)$ mit $(z_0)_c^{(n)} = z$.*

Beweis. Nach Satz 6 ist L zyklisch erzeugt. Es genügt, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Für jede natürliche Zahl n ergibt sich die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Es sei $z \in Z(a'_c/c)$ mit $H_a(z) = 0$ und $z_1 \in Z(a/z'_c)$ mit $(z_1)'_{z'_c} = z$. Nach Hilfssatz 6 und 7 gilt dann $z = (z_1)'_{z'_c} = z'_c \cup (z_2)'_c$ mit $z_2 \in Z(a/c)$, woraus $(z_2)'_c = z$ im Widerspruch zu $H_a(z) = 0$ folgt. Demnach kann es kein solches z_1 geben, weshalb z auf Grund von (i) Servanzelement in a/z'_c ist.
Nach Hilfssatz 14 gilt dann $z \cap a'_{z'_c} = z'_c$, d. h. $z \nleqq a'_{z'_c}$.
Aus der Folgerung zu Hilfssatz 7 folgt $a'_{z'_c} = z'_c \cup a'_c$. Im Widerspruch zur Voraussetzung über z gilt somit $z \nleqq a'_c$. Damit ist aber gezeigt, daß die Annahme $H_a(z) = 0$ falsch war, d. h., es existiert ein Element $z_0 \in Z(a/c)$ mit $(z_0)'_c = z$.

Satz 7. *Besitzt ein zyklisch erzeugter modularer Verband L die Eigenschaft* (i), *so besitzt er auch die Eigenschaft* (iv).

Beweis. Es sei $z \in Z$, $b, c \in L$ *mit* $z^{(n)} \leqq b^{(n)} \cup c$, $z^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)} \cup c$. Ist $z^{(n)} \leqq c$, dann erfüllt $z_0 \overset{\text{def}}{=} z$ die Bedingung (iv).
Es sei also $z^{(n)} \nleqq c$. Dann ist $x = c \cup z$ Zyklus in $(b \cup c \cup z)/c$ mit $x_c^{(n)} > c$. Nach der Folgerung zu Hilfssatz 10 gilt $(b \cup z)^{(n)} = b^{(n)} \cup z^{(n)}$, so daß nach der Folgerung zu Hilfssatz 7

$$x_c^{(n)} \leqq (b \cup c \cup z)_c^{(n)} = c \cup b^{(n)} \cup z^{(n)} = c \cup b^{(n)} = (c \cup b)_c^{(n)}$$

gilt. Aus Hilfssatz 15 folgt somit die Existenz eines Elements $y \in Z(b \cup c/c)$ mit $y_c^{(n)} = x_c^{(n)}$, d. h., insbesondere gilt $O_c(y) = O_c(x)$. Aus der Isomorphie $b \cup c/c \simeq b/b \cap c$ folgt die Existenz eines $z_2 \in Z(b/b \cap c)$ mit $y = c \cup z_2$. Nach Hilfssatz 6 existiert dann ein Zyklus $z_1 \in Z$ mit $z_2 = (b \cap c) \cup z_1$, d. h., es gilt $y = c \cup z_1$. Für alle $u \in Z(y \cup x/c)$ und alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt nach Hilfssatz 10 $u_c^{(n)} \leqq x_c^{(n)} \cup y_c^{(n)}$ und damit $O_c(u) \leqq O_c(x) = O_c(y)$.
Nach (i) ist y Servanzelement in $y \cup x/c$, weshalb ein $y_0 \in Z(y \cup x/c)$ mit $y \cup x = y \dot{\cup} y_0$ existiert. Weiter gilt $y \cup x = c \cup z \cup z_1$ und damit $y \cup x/c \simeq z \cup z_1/(z \cup z_1) \cap c$, d. h., es gilt

$$y_0 = c \cup x_0 \quad \text{mit} \quad x_0 \in Z\big(z \cup z_1/(z \cup z_1) \cap c\big).$$

Aus Hilfssatz 6 folgt die Existenz eines $z_0 \in Z(z \cup z_1/0)$ mit $x_0 = \big(c \cap (z \cup z_1)\big) \cup z_0$, d. h. $y_0 = c \cup z_0$. Wegen $y \cup y_0/y = y \cup x/y \simeq x/x \cap y \simeq y_0/c$ und $x \cap y \geqq x_c^{(n)} = y_c^{(n)}$ gilt $c = (y_0)_c^{(n)} = c \cup z_0^{(n)}$, also $z_0^{(n)} \leqq c$. Aus $z_0 \leqq z \cup z_1$ und $z_1 \leqq b$ folgt natürlich $z_0 \leqq z \cup b$. Aus der Annahme $z_0^{(n-1)} \leqq b^{(n-1)} \cup c$ folgt

$$c \cup z_0^{(n-1)} = (y_0)_c^{(n-1)} \leqq b^{(n-1)} \cup c.$$

Weiter gilt $y_c^{(n-1)} \leqq b^{(n-1)} \cup c$. Nach der Folgerung zu Hilfssatz 10 ergibt sich daraus $(y \cup y_0)_c^{(n-1)} = (y \cup x)_c^{(n-1)} \leqq b^{(n-1)} \cup c$, d. h., es gilt $z^{(n-1)} \leqq b^{(n-1)} \cup c$ im Widerspruch zur Voraussetzung über z.

Der folgende Satz ist ein Analogon zu dem eingangs erwähnten Satz von H. PRÜFER [15] und R. BAER [1].
Für den Beweis kann die Eigenschaft (iv) abgeschwächt werden.

(iv$_e$) Es sei $z^{(n)} \leqq b^{(n)}$, $z^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)}$ mit $z \in Z$ und $b \in L \Rightarrow$ es existiert ein $x \in Z$ mit $x \leqq z \cup b$, $x^{(n)} = 0$, $x^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)}$.

Satz 8. *Es sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft* (iv$_e$), *und es gelte $O(z) \leqq n$ für alle $z \in Z$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Dann besitzt L eine zyklische Basis $Q \subseteq Z$.*

Beweis. Es sei $X_i \subseteq Z$ die Menge aller $z \in Z$ mit $O(z) \geqq i$. Die Menge X_n enthält sicher eine maximale unabhängige Untermenge Q_n, die zu einer maximalen unabhängigen Untermenge Q_{n-1} von X_{n-1} ergänzt werden kann. Ist Q_{n-l+1} eine maximale

unabhängige Untermenge von X_{n-l+1}, so kann diese zu einer maximalen unabhängigen Untermenge Q_{n-l} von X_{n-l} ergänzt werden. Somit ist $Q \overset{\text{def}}{=} Q_1$ eine maximale unabhängige Untermenge von Z. Es sei $q_l \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}(z \mid z \in Q_l)$, $q \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}(z \mid z \in Q)$. Dann gilt $z \leqq q$ für alle Atome $z \in L$.
Unter der Annahme, daß aus $z \in Z$ und $O(z) \leqq k - 1$ stets $z \leqq q$ folgt, sei $z \in Z$ ein Element mit den Eigenschaften $O(z) = k$ und $z \nleqq q$. Dann gilt $z \cap q_k > 0$, da $z \in X_k$ und Q_k maximal unabhängig in X_k ist, aber $z \nleqq q_k$.
Aus $z^{(k-1)} \leqq z \cap q_k \leqq q_k$ und $O(x) \geqq k$ für alle $x \in Q_k$ folgt nach Hilfssatz 13 und der Folgerung zu Hilfssatz 10 $z^{(k-1)} \leqq q_k^{(k-1)} = \dot{\bigcup}(x^{(k-1)} \mid x \in Q_k)$, weshalb eine Zahl r, $1 \leqq r \leqq k - 1$, mit

$$z^{(r)} \leqq q_k^{(r)}, \quad z^{(r-1)} \nleqq q_k^{(r-1)} \tag{2}$$

existieren muß. Nach (iv$_e$) gibt es dann ein $x \in Z$ mit $x \leqq z \cup q_k$, $x^{(r)} = 0$, $x^{(r-1)} \nleqq q_k^{(r-1)}$. Wegen (2) gilt außerdem $q_k^{(r-1)} = z^{(r)} \cup q_k^{(r-1)}$, so daß $x \nleqq z' \cup q_k$ nach Hilfssatz 10 gilt. Nach Hilfssatz 8 gilt damit aber $z \leqq x \cup q_k$ mit $O(x) = r \leqq k - 1$, d. h. $x \leqq q$. Wegen $q_k \leqq q$ folgt im Widerspruch zur Annahme über z somit auch $z \leqq q$.

Folgerung. *Es sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft* (iv$_e$) *und $c \in K$ mit $Z(c/0) = Z_1(c/0)$. Dann gilt $c = \dot{\bigcup}(z_i \mid i = 1, \ldots, m)$.*

Beweis. Aus der Kompaktheit von c folgt $c = \bigcup(x_i \mid x_i \in Z, i = 1, \ldots, r)$, wobei r eine natürliche Zahl ist. Weiter gilt $O(x_i) < \infty$ für $i = 1, \ldots, r$, weshalb eine Zahl n mit $O(x_i) \leqq n$ für $i = 1, \ldots, r$ existiert. Nach Hilfssatz 10 gilt somit $c^{(n)} = 0$, d. h. $O(z) \leqq n$ für alle $z \in Z(c/0)$, also folgt aus Satz 7 und der Kompaktheit von c dann $c = \dot{\bigcup}(z_i \mid i = 1, \ldots, m)$.

Hilfssatz 16. *In einem zyklisch erzeugten modularen Verband L mit der Eigenschaft* (iv) *besitzt jeder Teilverband b/c diese Eigenschaft.*

Beweis. Es sei $a, d \in b/c$, $z \in Z(b/c)$, und es gelte $z_c^{(n)} \leqq a_c^{(n)} \cup d$, $z_c^{(n-1)} \nleqq a_c^{(n-1)} \cup d$. Nach der Bemerkung zu Hilfssatz 6 ist jeder Teilverband b/c eines zyklisch erzeugten modularen Verbands L ebenfalls zyklisch erzeugt. Aus Hilfssatz 6 folgt somit die Existenz von Elementen $z_\nu \in Z(b/c)$ und $x_\nu \in Z$ mit $z_\nu = c \cup x_\nu$ sowie

$$a = \bigcup(z_\nu \mid \nu \in N) = c \cup \bigcup(x_\nu \mid \nu \in N).$$

Weiter gilt $z = c \cup x$ mit $x \in Z$. Ferner sei $a_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcup(x_\nu \mid \nu \in N)$. Aus der Folgerung zu Hilfssatz 7 folgt

$$x^{(n)} \leqq a_1^{(n)} \cup d = a_c^{(n)} \cup d, \quad x^{(n-1)} \nleqq a_1^{(n-1)} \cup d = a_c^{(n-1)} \cup d,$$

da $c \leqq d$ gilt. Nach (iv) existiert ein $x_0 \in Z$ mit $x_0 \leqq x \cup a_1$, $x_0^{(n)} \leqq d$, $x_0^{(n-1)} \nleqq a_1^{(n-1)} \cup d$. Nach Hilfssatz 6 ist $y \overset{\text{def}}{=} c \cup x_0$ Zyklus in b/c, und wegen $c \leqq d$ gilt

$$a_1^{(r)} \cup d = a_c^{(r)} \cup d,$$

so daß $y \leqq z \cup a$, $y_c^{(n)} = c \cup x_c^{(n)} \leqq d$, $y_c^{(n-1)} \nleqq a_c^{(n-1)} \cup d$ folgt, w. z. b. w.

Hilfssatz 17. *In einem zyklisch erzeugten modularen Verband L mit der Eigenschaft* (iv) *gilt $c \in K$ genau dann, wenn $c = \dot{\bigcup}(z_i \mid i = 1, \ldots, n, z_i \in Z)$.*

Beweis. 1. Jede Vereinigung endlich vieler kompakter Elemente ist kompakt, also insbesondere auch eine Vereinigung endlich vieler Zyklen.
2. a) Es sei $c \in K$ mit $Z(c/0) = Z_1(c/0)$. Dann folgt die Behauptung aus der Folgerung zu Satz 8.

b) Es sei $c \in K$ mit

$$Z(c/0) = Z_2(c/0) \cup \{0\}. \tag{3}$$

Dann existiert eine natürliche Zahl n mit

$$\begin{aligned} c &= \bigcup (z_i \mid z_i \in Z_2,\ i = 1, \ldots, n), \\ c &> \bigcup (z_{i_j} \mid 1 \leqq i_j \leqq n,\ j = 1, \ldots, n-1), \end{aligned} \tag{4}$$

d. h., insbesondere gilt $z_i \parallel z_j$ für $1 \leqq i_j \leqq n$ und $i \neq j$, so daß wegen (3) und der Eigenschaft (iv) dann $z_i \cap z_j = 0$ gilt. Somit existiert $z_1 \dot{\cup} z_2$.

Weiter werde vorausgesetzt, daß $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z_i \mid i = 1, \ldots, l-1$ mit $2 \leqq l - 1 < n)$ existiert und $a \cap z_l = z_l^{(m)} > 0$ ist. Aus (4) folgt $m \neq 0$, so daß wegen (3) und (iv) dann $H_a(z_l^{(m)}) = 0$ gelten muß. Aus $z_l^{(m)} \leqq a'$ und $z_l^{(m-1)} \nleqq a$ würde nach Eigenschaft (iv) die Existenz eines Atoms in $c/0$ im Widerspruch zu (3) folgen, d. h., es gilt $z_l^{(m)} \nleqq a'$, so daß nach Hilfssatz 9 eine natürliche Zahl r $(1 \leqq r \leqq l-1)$ mit $a = z_l^{(m)} \cup \dot{\bigcup} (z_i \mid i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, l-1)$ und damit insbesondere $c = \bigcup (z_i \mid i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n)$ im Widerspruch zu (4) existiert. Somit gilt also $a \cap z_l = 0$ und demnach auch $c = \dot{\bigcup} (z_i \mid i = 1, \ldots, n)$.

c) Es sei $c \in K$ und $c_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcup \big(z \mid z \in Z_1(c/0)\big)$. Nach Hilfssatz 12 gilt $c_1 \in K$, d. h., es gilt $c_1 = \dot{\bigcup} \big(z_i \mid z_i \in Z_1(c/0),\ i = 1, \ldots, m\big)$ nach der Folgerung zu Satz 8. Somit existiert aber insbesondere wegen der Folgerung zu Hilfssatz 10 eine natürliche Zahl k mit $c_1^{(k)} = 0$, so daß $z \cap c_1 = 0$ für alle $z \in Z_2(c/0)$ gilt. Auf Grund der Hilfssätze 6 und 7 kann der Verband c/c_1 keine Zyklen endlicher Ordnung besitzen, d. h., es gilt $Z(c/c_1) = Z_2(c/c_1) \cup \{c_1\}$.

Nach Head [6] ist c kompaktes Element in dem zyklisch erzeugten modularen Verband c/c_1, der nach Hilfssatz 16 die Eigenschaft (iv) besitzt.

Aus b) folgt dann $c = \dot{\bigcup}_{c_1} \big(x_i \mid x_i \in Z(c/c_1),\ i = m+1, \ldots, n\big)$.

Für $i = m+1, \ldots, n$ existieren nach Hilfssatz 6 Elemente $z_i \in Z_2(c/0)$ mit $x_i = c_1 \dot{\cup} z_i$. Damit gilt aber nach Hilfssatz 4

$$c = c_1 \dot{\cup} \dot{\bigcup} (z_i \mid i = m+1, \ldots, n) = \dot{\bigcup} (z_i \mid i = 1, \ldots, n).$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des am Anfang dieses Abschnitts erwähnten Satzes von Kulikov [10], wobei der Begriff Servanzelement jedoch nicht verwendet wird.

Satz 9. *Existiert in einem zyklisch erzeugten modularen Verband L mit der Eigenschaft* (iv) *ein Element a derart, daß $1 = \dot{\bigcup}_a (z_\nu \mid z_\nu \in Z(1/a),\ \nu \in N)$ und $H_a(z) = H(z)$ für alle $z \in Z(a/0)$ gilt, dann existiert ein Element $b \in L$ mit $1 = a \dot{\cup} b$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 6 gilt $z = a \cup x$ mit $x \in Z$ für alle $z \in Z(1/a)$. Daraus ergibt sich $1 = \dot{\bigcup}_a (z_\nu \mid \nu \in N) = \dot{\bigcup} (a \cup x_\nu \mid x_\nu \in Z,\ \nu \in N)$. Ist $a \cap x_\nu = 0$, dann sei

$$y_\nu \overset{\text{def}}{=} x_\nu. \tag{5}$$

Ist andererseits

$$0 < a \cap x_\nu = x_\nu^{(n)} \leqq a \quad (\nu \in N), \tag{6}$$

dann existiert wegen $H_a(x) = H(x)$ für alle $x \in Z(a/0)$ ein Zyklus $v_\nu \in Z(a/0)$ mit $v_\nu^{(n)} = x_\nu^{(n)}$, d. h. aber, wegen (6) gilt $x_\nu^{(n)} \leqq a^{(n)}$ und $x_\nu^{(n-1)} \nleqq a^{(n-1)}$, woraus nach (iv) die Existenz eines $y_\nu \in Z$ mit $y_\nu \leqq a \cup x_\nu$, $y_\nu^{(n)} = 0$, $y_\nu^{(n-1)} \nleqq a^{(n-1)}$ folgt. Damit gilt aber insbesondere $y_\nu \nleqq a \cup x_\nu'$, so daß nach Hilfssatz 8 und (5) für jedes $\nu \in N$ $z_\nu = a \cup x_\nu = a \dot{\cup} y_\nu$ gilt. Nach Hilfssatz 4 existiert $b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (y_\nu \mid \nu \in N)$, und es gilt $1 = a \dot{\cup} b$.

Nun kann gezeigt werden, daß in einem zyklisch erzeugten modularen Verband (i) aus (iv) folgt.

Satz 10. *Ein zyklisch erzeugter modularer Verband L mit der Eigenschaft* (iv) *besitzt auch die Eigenschaft* (i).

Beweis. Es sei $a, b, c \in L$ mit $c \leqq a \leqq b$, und es gelte $H_a(z) = H_b(z)$ für alle $z \in Z(a/c)$. Ist $d \in b/c$ ein beliebiges kompaktes Element in b/c, dann ist nach HEAD [6] $e \overset{\text{def}}{=} a \cup d$ kompaktes Element in b/a. Nach Hilfssatz 17 gilt dann

$$e = \dot{\bigcup}_a (z_\nu \mid z_\nu \in Z(e/a), \nu = 1, \ldots, n).$$

Weiter gilt für alle $z \in Z(a/c)$ wegen $a \leqq e \leqq b$

$$H_b(z) = H_a(z) \leqq H_e(z) \leqq H_b(z),$$

also insbesondere $H_a(z) = H_e(z)$. Nach Satz 9 existiert im Teilverband e/c ein Element $d_1 \in e/c$ mit $e = a \cup d = a \dot{\cup} d_1$. Damit ist aber gezeigt, daß a Servanzelement im Teilverband b/c ist, d. h., L besitzt die Eigenschaft (i).

IV. In diesem Abschnitt sollen die Unabhängigkeit und die S-Unabhängigkeit von Untermengen von $Z \setminus \{0\}$ eingehender untersucht werden.

Es sei $X \overset{\text{def}}{=} Z \setminus \{0\}$. Unter Benutzung des Begriffs der Unabhängigkeit (S-Unabhängigkeit) von Untermengen von X soll eine Abhängigkeitsrelation $D[x, A]$ ($D_S[x, A]$) für Elemente $x \in X$ und Untermengen $A \subseteqq X$ definiert werden. Es wird gezeigt, daß X eine D-Menge (D_S-Menge) im Sinne von A. KERTÉSZ [7, 8] ist und eine Untermenge A von X genau dann unabhängig (S-unabhängig) ist, wenn sie D-unabhängig (D_S-unabhängig) ist.

Für $x \in X$ und $A \subseteqq X$ gelte

$D[x, A]$ genau dann, wenn eine endliche unabhängige Untermenge A' von A derart existiert, daß $x \cap \dot{\bigcup} (z \mid z \in A' \subseteqq A) > 0$ gilt;

$D_S[x, A]$ genau dann, wenn eine endliche S-unabhängige Untermenge A' von A derart existiert, daß $x \in A'$ gilt oder $A' \cup \{x\}$ nicht S-unabhängig ist. Dabei sei insbesondere $A' = \emptyset$ zugelassen.

Besteht für ein Element $x \in X$ und eine Untermenge $A \subseteqq X$ die Relation $D[x, A]$ ($D_S[x, A]$) nicht, so werde dies durch $\overline{D}[x, A]$ ($\overline{D}_S[x, A]$) ausgedrückt. Eine Untermenge $A \subseteqq X$ heißt genau dann *D-unabhängig* (D_S-unabhängig), wenn $\overline{D}[a, A \setminus \{a\}]$ ($\overline{D}_S[a, A \setminus \{a\}]$) für jedes Element $a \in A$ gilt.

Hilfssatz 18 ist die Grundlage für den Nachweis, daß X eine D-Menge ist (Bedingung (III) (siehe [8], S. 26)).

Hilfssatz 18. *L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband und $z \in Z$ mit $z \cap \dot{\bigcup} (z_i \mid 0 < z_i \in Z, i = 1, \ldots, n) = z^{(m)} > 0$. Dann gilt auch*

$$z \cap \dot{\bigcup} (x_i \mid 0 < x_i \leqq z_i, i = 1, \ldots, n) > 0.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 13 existieren für $i = 1, \ldots, n$ Zyklen $y_i \leqq z_i$ mit $O(y_i) \leqq O(z^{(m)})$ und $z^{(m)} \leqq \dot{\bigcup} (y_i \mid i = 1, \ldots, n)$. Dann existieren ein Index j und eine natürliche Zahl r_j $(0 \leqq r_j;\ 1 \leqq j \leqq n)$ derart, daß $y_i^{(r_j)} \leqq x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $y_j^{(r_j)} > 0$ gilt. Aus $O(y_j) \leqq O(z^{(m)})$ folgt $z^{(m+r_j)} > 0$ und damit nach Hilfssatz 10

$$0 < z^{(m+r_j)} \leqq \dot{\bigcup} (y_i^{(r_j)} \mid i = 1, \ldots, n) \leqq \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n),$$

d. h., es gilt $z \cap \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n) > 0$.

Satz 11. *L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband. Dann ist X eine D-Menge, und es gilt:*

(V) *$A \subseteqq X$ ist genau dann unabhängig, wenn A D-unabhängig ist.*

Für den Beweis des Satzes muß man zeigen, daß X die Bedingungen (I) bis (IV) (siehe [8], S. 26) und (V) erfüllt.

(I) Ist $A \subseteqq X$ und $x \in A$, so gilt $D[x, A]$.

Beweis. Jede einelementige Untermenge von X ist unabhängig, so daß aus $A \subseteqq X$ und $x \in A$ $D[x, A]$ folgt, da $\{x\} \subseteqq A$ und $x \cap x = x > 0$ gilt.

(II) Gilt für $x \in X$ und $A \subseteqq X$ $D[x, A]$, aber $\overline{D}[x, A \setminus \{a\}]$ $(a \in A)$, so ist $D[a, (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}]$.

Beweis. Wegen $D[x, A]$ existiert eine endliche unabhängige Untermenge A' von A mit

$$x \cap \dot{\bigcup} (z \mid z \in A') > 0. \tag{7}$$

Wegen $\overline{D}[x, A \setminus \{a\}]$ gilt $a \in A'$ und $x \cap \dot{\bigcup} (z \mid z \in A' \setminus \{a\}) = 0$. Somit ist $(A' \setminus \{a\}) \cup \{x\}$ eine endliche unabhängige Untermenge von $(A \setminus \{a\}) \cup \{x\}$, und es gilt wegen (7) $a \cap \dot{\bigcup} \big(z \mid z \in (A' \setminus \{a\}) \cup \{x\}\big) > 0$ und damit auch $D[a, (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}]$.

(IV) Ist $D[x, A]$ $(x \in X, A \subseteqq X)$, so gibt es eine endliche Untermenge A' von A, so daß $D[x, A']$ gilt.

Beweis. $D[x, A]$ gilt genau dann, wenn eine endliche unabhängige Untermenge $A' \subseteqq A$ mit $x \cap \dot{\bigcup} (z \mid z \in A') > 0$ existiert. Daraus folgt aber $D[x, A']$.

(III) Ist für $x \in X$ und $A, B \subseteqq X$ $D[x, A]$ und gilt $D[a, B]$ für jedes Element $a \in A$, so ist $D[x, B]$.

Beweis. Aus $D[x, A]$ folgt die Existenz einer endlichen unabhängigen Untermenge $A' \overset{\text{def}}{=} \{z_i \mid z_i \in A,\ i = 1, \ldots, n\} \subseteqq A$ mit $x \cap \dot{\bigcup} (z_i \mid i = 1, \ldots, n) > 0$. Weiter folgt aus $D[z_i, B]$ für $i = 1, \ldots, n$ die Existenz von endlichen unabhängigen Untermengen

$$B_i \overset{\text{def}}{=} \{y_{i_j} \mid y_{i_j} \in B, j = 1, \ldots, m_i\} \quad \text{mit} \quad z_i \cap \dot{\bigcup} (y_{i_j} \mid j = 1, \ldots, m_i) > 0.$$

B_0' sei eine maximale unabhängige Untermenge von $B_0 \overset{\text{def}}{=} \bigcup (B_i \mid i = 1, \ldots, n)$. Eine solche Menge B_0' existiert, da B_0 endlich ist. Für jedes $y_{i_j} \in B_i$ gilt dann wegen $y_{i_j} \in B_0$

$$y_{i_j} \geqq y_{i_j} \cap \dot{\bigcup} (y \mid y \in B_0') = x_{i_j} > 0.$$

Dann gilt aber $\dot{\bigcup} (x_{i_j} \mid j = 1, \ldots, m_i) \leqq \dot{\bigcup} (y \mid y \in B_0')$. Nach Hilfssatz 18 ist $z_i \cap \dot{\bigcup} (x_{i_j} \mid j = 1, \ldots, m_i) > 0$, d. h. insbesondere für $i = 1, \ldots, n$ gilt $z_i \cap \dot{\bigcup} (y \mid y \in B_0') = x_i > 0$ und damit $\dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n) \leqq \dot{\bigcup} (y \mid y \in B_0')$. Da $z \cap \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n) > 0$ nach Hilfssatz 18 gilt, muß auch $z \cap \dot{\bigcup} (y \mid y \in B_0') > 0$ gelten. B_0' ist aber eine endliche unabhängige Untermenge von B, so daß auch $D[x, B]$ gilt.

Mit (I), (II), (III) und (IV) ist gezeigt, daß X eine D-Menge ist.

(V) $A \subseteqq X$ ist genau dann unabhängig, wenn A D-unabhängig ist.

Beweis. Aus der Definition der D-Unabhängigkeit folgt, daß eine endliche Untermenge $A \subseteqq X$ genau dann D-unabhängig ist, wenn sie unabhängig ist. Aus (IV) folgt, daß eine beliebige Untermenge $A \subseteq X$ genau dann D-unabhängig ist, wenn jede ihrer endlichen Untermengen D-unabhängig, also insbesondere unabhängig ist. Dies ist aber auf Grund von Hilfssatz 1 genau dann der Fall, wenn A unabhängig ist.

Die Hilfssätze 19 und 20 sind Grundlage für den Beweis, daß X eine D_S-Menge ist (Bedingung (III)).

Hilfssatz 19. *Es sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft* (iv), *$a, b \in L$ mit $a \leqq b$, a und b Servanzelement, $a = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n)$ und $b = \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N)$. Dann existieren Indizes $\nu_i \in N$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit*

$$b = a \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N \setminus \{\nu_i \mid i = 1, \ldots, n\}).$$

Beweis. Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\nu_1 \in N$ mit $x_1 = x_{\nu_1} = 0$. Dann gilt $b = x_1 \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N \setminus \{\nu_1\})$. Weiter werde vorausgesetzt, daß

$$b = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, l < n) \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N \setminus \{\nu_i \mid i = 1, \ldots, l\})$$

gilt. Ferner sei $N_l \overset{\text{def}}{=} N \setminus \{\nu_i \mid i = 1, \ldots, l\}$, $c \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, l)$, $y \overset{\text{def}}{=} c \mathbin{\dot\cup} x_{l+1}$ und $y_\nu \overset{\text{def}}{=} c \mathbin{\dot\cup} x_\nu$ für $\nu \in N_l$. Aus der Modularität von L folgt

$$b = c \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N_l) = \dot{\bigcup}_c (y_\nu \mid \nu \in N_l).$$

Nach Hilfssatz 2 ist y Servanzelement in L und deshalb nach Satz 3 Servanzelement in b/c. Es gilt $y \in Z(b/c)$, d. h., y ist kompaktes Element in b/c, so daß eine natürliche Zahl m mit

$$y \cap \dot{\bigcup}_c (y_{\nu_i} \mid \nu_i \in N_l, i = 1, \ldots, m) = y_c^{(r)} > c$$

und

$$y \cap \dot{\bigcup}_c (y_{\nu_{i_j}} \mid 1 \leqq i_j \leqq m, j = 1, \ldots, m - 1) = c \tag{8}$$

existiert. Es ist $d \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}_c (y_{\nu_i} \mid \nu_i \in N_l, i = 1, \ldots, m)$ direkte Komponente von b in b/c und damit nach Hilfssatz 2 Servanzelement in b/c. Nach Hilfssatz 11 gilt dann

$$H_d(y_c^{(r)}) = H_y(y_c^{(r)}) = H_b(y_c^{(r)}) = r,$$

d. h., es existiert ein Zyklus $z \in Z(d/c)$ mit $z_c^{(r)} = y_c^{(r)}$ und $H_d(z) = 0$. Wegen Hilfssatz 15 muß somit $z \nleqq d'_c$ gelten. Auf Grund von Hilfssatz 9 und (8) existiert dann ein Index ν_{i_m} $(1 \leqq \nu_{i_m} \leqq m)$ mit

$$d = z \mathbin{\dot\cup_c} \dot{\bigcup}_c (y_{\nu_{i_j}} \mid 1 \leqq i_j \leqq m, i_j \neq i_m, j = 1, \ldots, m - 1).$$

Weiter sei $\nu_{l+1} \overset{\text{def}}{=} \nu_{i_m}$, $N_{l+1} \overset{\text{def}}{=} N \setminus \{\nu_i \mid i = 1, \ldots, l + 1\}$ und $e \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}_c (y_\nu \mid \nu \in N_{l+1})$. Dann gilt $b = z \mathbin{\dot\cup_c} e$, und wegen $z \cap y = y_c^{(r)} > c$ existiert auch $y \mathbin{\dot\cup_c} e$.
Es gilt $y \mathbin{\dot\cup_c} e \leqq z \mathbin{\dot\cup_c} e = b$ und $b/e \cong z/c \cong y/c \cong y \mathbin{\dot\cup_c} e/e$, so daß $b = y \mathbin{\dot\cup_c} e = \dot{\bigcup}_y (y \cup y_\nu \mid \nu \in N_{l+1}) = \dot{\bigcup}_y (y \cup x_\nu \mid \nu \in N_{l+1})$ folgt. Ferner gilt für jedes $\nu \in N_{l+1}$

$$c = y \cap y_\nu = y \cap (c \cup x_\nu) = c \cup (y \cap x_\nu),$$

d. h. $y \cap x_\nu \leqq c$, so daß wegen $x_\nu \cap c = 0$ auch $y \cap x_\nu = 0$ gelten muß. Dann gilt aber nach Hilfssatz 4

$$b = y \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N_{l+1}) = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, l + 1) \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N_{l+1}).$$

Damit gilt insbesondere auch $b = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n) \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_\nu \mid \nu \in N \setminus \{\nu_i \mid i = 1, \ldots, n\})$.

Hilfssatz 20. *Existieren in einem zyklisch erzeugten modularen Verband mit der Eigenschaft* (iv) *zwei endliche S-unabhängige Untermengen*

$$A = \{a_i \mid a_i \in X, i = 1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad B = \{b_i \mid b_i \in X, i = 1, \ldots, m\}$$

derart, daß $D_S[a_i, B]$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *gilt, dann folgt aus* $x \in X$ *und* $D_S[x, A]$ *auch* $D_S[x, B]$.

Beweis. Es sei $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (a_i \mid i = 1, \ldots, n)$ und $b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (b_i \mid i = 1, \ldots, m)$. Angenommen, $b \mathbin{\dot\cup} x$ existiert und ist Servanzelement. Nach Voraussetzung gilt entweder $a_i \cap b > 0$, oder $a_i \mathbin{\dot\cup} b$ ist kein Servanzelement in L.

Für $a_i \cap b > 0$ sei $z_i \overset{\text{def}}{=} 0$. Aus $a_i \cap b = 0$ folgt wegen (i) die Existenz eines Zyklus $z_i \in Z$ mit $(b \mathbin{\dot\cup} a_i) \cap z_i = z_i^{(l_i)} > 0$ und $H_{b \dot\cup a_i}(z_i^{(l_i)}) < l_i$, da $b \mathbin{\dot\cup} a_i$ kein Servanzelement ist.

$$\text{Insbesondere gilt dann } D_S[a_i, B] \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ in jedem Teilverband } c/0 \text{ mit } c \geqq b \cup a_i \cup z_i,\ c \in L. \tag{9}$$

Für $a \cap x > 0$ sei $z_0 \overset{\text{def}}{=} 0$. Im Fall $a \cap x = 0$ ist $a \mathbin{\dot\cup} x$ kein Servanzelement, so daß ein $z_0 \in Z$ mit $(a \mathbin{\dot\cup} x) \cap z_0 = z_0^{(l_0)} > 0$ und $H_{a \dot\cup x}(z_0^{(l_0)}) < l_0$ existiert.

$$\text{Somit gilt } D_S[x, A] \text{ in jedem Teilverband } c/0 \text{ mit } c \geqq a \cup x \cup z_0,\ c \in L. \tag{10}$$

Es ist $c \overset{\text{def}}{=} a \cup b \cup x \cup \bigcup (z_i \mid i = 0, \ldots, n)$ Vereinigung endlich vieler Zyklen, weshalb $c \in K$ gilt. Auf Grund von Hilfssatz 14 gilt dann $c = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, r)$, wobei nach Hilfssatz 19 $m < r$ gilt und o. B. d. A. $x_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und $x_{m+1} = x$ gesetzt werden kann, d. h., es gilt $c = b \mathbin{\dot\cup} x \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_i \mid i = m + 2, \ldots, r)$. Ebenfalls aus Hilfssatz 19 folgt die Existenz von Zyklen x_{i_j} $(1 \leqq i_j \leqq r, j = 1, \ldots, n)$ derart, daß $c = a \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_{i_j} \mid j = n + 1, \ldots, r)$ gilt.

Weiter werde angenommen, daß nicht für alle j $(j = 1, \ldots, n)$ die Beziehung $1 \leqq i_j \leqq m$ gilt. Dann gilt bei geeigneter Numerierung $m + 1 \leqq i_1 \leqq r$. Da $\dot{\bigcup} (x_{i_j} \mid j = 2, \ldots, r)$ direkte Komponente von c und damit Servanzelement in $c/0$ ist, gibt es nach Hilfssatz 19 ein Element a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ derart, daß

$$c = a_i \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup} (x_{i_j} \mid j = 2, \ldots, r) = a_i \mathbin{\dot\cup} b \mathbin{\dot\cup} e \mathbin{\dot\cup} f$$

ist, wobei

$$e \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x_i \mid i = m + 1, \ldots, i_1 - 1) \quad \text{und} \quad f \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x_i \mid i = i_1 + 1, \ldots, r)$$

gilt. Für $i_1 = m + 1$ sei $e \overset{\text{def}}{=} 0$, und für $i_1 = r$ sei $f \overset{\text{def}}{=} 0$. Dann existiert $b \mathbin{\dot\cup} a_i$ und ist Servanzelement in $c/0$ im Widerspruch zu (9). Damit ist aber gezeigt, daß $1 \leqq i_j \leqq m$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt, d. h. insbesondere, daß $x = x_{i_j}$ mit $n + 1 \leqq j \leqq r$ gilt.

Somit existiert $a \mathbin{\dot\cup} x$ und ist Servanzelement in $c/0$ im Widerspruch zu (10). Die Annahme, daß $b \mathbin{\dot\cup} x$ existiert und Servanzelement ist, war also falsch, d. h. aber gleichzeitig, daß $D_S[x, B]$ gilt.

Satz 12. *L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft* (iv). *Dann ist X eine D_S-Menge, und es gilt:*

(V) *Eine Untermenge $A \subseteqq X$ ist genau dann D_S-unabhängig, wenn sie S-unabhängig ist.*

Wie im Beweis von Satz 11 müssen die Bedingungen (I) bis (V) erfüllt sein.

(I) Ist $A \subseteqq X$ und $x \in A$, so gilt $D_S[x, A]$.

Beweis. Ist x kein Servanzelement, so ist auch $\emptyset \cup \{x\}$ keine S-unabhängige Untermenge von X. Ist x Servanzelement, dann ist $\{x\}$ eine endliche S-unabhängige Untermenge von A, und es gilt $x \in \{x\}$. Daraus folgt aber $D_S[x, A]$.

(II) Gilt für $x \in X$ und $A \subseteqq X$ $D_S[x, A]$, aber $\bar{D}_S[x, A \setminus \{a\}]$ ($a \in A$), so ist $D_S[a, (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}]$.

Beweis. Wegen $D_S[x, A]$ existiert eine endliche S-unabhängige Untermenge A' von A mit $x \in A'$ oder $A' \cup \{x\}$ ist nicht S-unabhängig. Wegen $\bar{D}_S[x, A \setminus \{a\}]$ gilt $a \in A'$ und $(A' \setminus \{a\}) \cup \{x\}$ ist S-unabhängig, wobei $x \notin A' \setminus \{a\}$ gilt. Gilt $x \in A'$, dann folgt $x = a$, also $a \in (A' \setminus \{a\}) \cup \{x\}$, andernfalls gilt: $A' \cup \{x\} = \{a\} \cup \big((A' \setminus \{a\}) \cup \{x\}\big)$ ist nicht S-unabhängig. Somit gilt aber $D_S[a, (A \setminus \{a\}) \cup \{x\}]$.

(IV) Ist $D_S[x, A]$ ($x \in X$, $A \subseteqq X$), so gibt es eine endliche Untermenge A' von A, so daß $D_S[x, A']$ gilt.

Beweis. $D_S[x, A]$ gilt genau dann, wenn eine endliche S-unabhängige Untermenge $A' \subseteqq A$ existiert, wobei $x \in A'$ oder $A' \cup \{x\}$ keine S-unabhängige Untermenge ist. Dann gilt aber insbesondere $D_S[x, A']$.

(III) Ist $D_S[x, A]$ für $x \in X$ und $A, B \subseteqq X$ und gilt $D_S[a, B]$ für jedes Element $a \in A$, so ist $D_S[x, B]$.

Beweis. Aus $D_S[x, A]$ folgt die Existenz einer endlichen S-unabhängigen Untermenge $A' = \{a_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteqq A$ mit $D_S[x, A']$. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt nach Voraussetzung $D_S[a_i, B]$, so daß für $i = 1, \ldots, n$ endliche S-unabhängige Untermengen $B_i \subseteqq B$ mit $D_S[a_i, B_i]$ existieren. $B_0 \overset{\text{def}}{=} \bigcup (B_i \mid i = 1, \ldots, n)$ ist somit eine endliche Untermenge von B, weshalb eine maximale S-unabhängige Untermenge B_0' von B_0 existiert, d. h., insbesondere gilt $D_S[y, B_0']$ für jedes Element $y \in B_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Nach Hilfssatz 20 gilt damit aber sofort $D_S[a_i, B_0']$ für $i = 1, \ldots, n$, woraus wiederum nach Hilfssatz 29 $D_S[x, B_0']$ und daraus $D_S[x, B]$ folgt.

Mit (I), (II), (III) und (IV) ist gezeigt, daß X eine D_S-Menge ist.

(V) Eine Untermenge $A \subseteqq X$ ist genau dann S-unabhängig, wenn sie D_S-unabhängig ist.

Beweis. Eine endliche Untermenge A von X ist genau dann S-unabhängig, wenn sie D_S-unabhängig ist. Aus (IV) folgt, daß eine beliebige Untermenge $A \subseteqq X$ genau dann D_S-unabhängig ist, wenn jede ihrer endlichen Untermengen D_S-unabhängig, also insbesondere S-unabhängig ist. Nach Hilfssatz 3 und Hilfssatz 12 ist dies genau dann der Fall, wenn A S-unabhängig ist.

Folgerung zu Satz 12 und 11. *L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband (mit der Eigenschaft* (iv)). *Sind zwei Untermengen A, B von $C \subseteqq X$ in C maximal unabhängig (maximal S-unabhängig), dann sind A und B gleichmächtig.*

Die Richtigkeit dieser Aussage folgt aus [8] (Satz 1.6 und Satz 1.8).

V. Im folgenden sollen weitere bekannte Aussagen über Servanzuntergruppen primärer abelscher Gruppen (siehe A. G. Kurosch [13] und L. J. Kulikov [10] verallgemeinert werden. Insbesondere gilt in der Klasse der zyklisch erzeugten modularen Verbände mit der Eigenschaft (iv) die Umkehrung von Satz 5 (Satz 13).
Satz 14 verallgemeinert die Aussage, daß die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Servanzuntergruppen selbst Servanzuntergruppe ist.
Satz 15 ist ein Analogon zu der Aussage, daß eine Untergruppe C einer primären abelschen Gruppe G Servanzuntergruppe ist, wenn jedes Element des Sockels von

C in C dieselbe Höhe wie in G hat. Weiter ist Satz 16 eine Verallgemeinerung der Aussage, daß für eine Servanzuntergruppe C einer Gruppe G die Beziehung $G = C$ gilt, wenn C den Sockel von G enthält. Schließlich ist Satz 17 ein Analogon zu dem Satz, der besagt, daß eine Servanzuntergruppe einer primären abelschen Gruppe G direkter Summand von G ist, wenn die Ordnungen der Elemente von C beschränkt sind.

Im folgenden sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (iv) (der insbesondere nach Satz 10 die Eigenschaft (i) besitzt).

Satz 13 (siehe auch [3]). *L besitzt eine zyklische Basis, wenn* $1 = \bigcup (a_i \mid i = 1, 2, \ldots)$ *mit* $a_i \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ *und* $H(z) \leqq h_i < \infty$ *für alle* $z \in Z(a_i/0)$ *mit* $z > 0$ *gilt.*

Beweis. Es sei $X_i \overset{\text{def}}{=} \{z \mid z \in Z, z \cap a_i > 0\}$. Dann gilt $O(z) \leqq h_i + 1$ für alle $z \in X_i$, da $H(x) \leqq h_i$ für alle $x \leqq z \cap a_i$ gilt. In X_i existiert eine maximale S-unabhängige Untermenge Q_1, die zu einer maximalen S-unabhängigen Untermenge Q_2 von X_2 ergänzt wird. In Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man zu jeder maximalen S-unabhängigen Untermenge Q_i von X_i eine maximale S-unabhängige Untermenge Q_{i+1} von X_{i+1} mit $Q_i \subseteqq Q_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Es sei $Q \overset{\text{def}}{=} \bigcup (Q_i \mid i = 1, 2, \ldots)$. Ist Q' eine endliche Untermenge von Q, dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $Q' \subseteqq Q_n$. Da eine Untermenge einer S-unabhängigen Menge immer S-unabhängig ist, ist auch Q' S-unabhängig und damit ebenfalls jede endliche Untermenge von Q, woraus folgt, daß Q S-unabhängig ist (Hilfssätze 3 und 12 bzw. Satz 12).

Aus $z \in Z \subseteqq K$ und $z \leqq \bigcup (a_i \mid i = 1, 2, \ldots)$ folgt die Existenz einer natürlichen Zahl m mit $z \leqq a_m$ und damit $z \in X_m$, d. h. aber, insbesondere gilt $D_S[z, Q_m]$ und damit auch $D_S[z, Q]$, so daß Q eine maximale S-unabhängige Untermenge von Z ist.

Weiter sei $q_i \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x \mid x \in Q_i)$, $q \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x \mid x \in Q)$ und R_i die Menge aller $z \in X_i$ mit $z \cap q_i = 0$. Ist Q_i keine maximale unabhängige Untermenge von X_i, dann existieren Elemente $z \in R_i$ mit $z > 0$. Da für alle $z \in X_i$ $O(z) \leqq h_i + 1 < \infty$ gilt, gibt es ein Element

$$x \in R_i \quad \text{mit} \quad O(x) \geqq O(z) \quad \text{für alle} \quad z \in R_i. \tag{11}$$

Wegen $D_S[x, Q_i]$ ist $q_i \dot{\cup} x$ kein Servanzelement in L. Da q_i Servanzelement ist, kann nach Satz 2 $q_i \dot{\cup} x$ auch nicht in $1/q_i$ Servanzelement sein. Nach (i) muß somit ein $x_0 \in Z(q_i \dot{\cup} x/q_i)$ mit $H(x_0) > H_{q_i \dot{\cup} x}(x_0)$ existieren, d. h., es gilt $q_i < x_0$, so daß aus $x_0 = q_i \dot{\cup} x^{(n)}$ sofort $x^{(n)} > 0$ folgt. Somit existieren ein Zyklus $y \in Z(1/q_i)$ und eine natürliche Zahl $m > n$ mit $y_{q_i}^{(m)} = q_i \cup x^{(n)}$. Nach Hilfssatz 6 existiert ein $z \in Z$ mit $y = q_i \cup z$, wobei $z \cap q_i = 0$ angenommen werden kann, da q_i Servanzelement in L ist und $z \in K$ gilt.

Aus $q_i \dot{\cup} z^{(m)} = q_i \dot{\cup} x^{(n)}$ folgt $z^{(m)}/0 \cong x^{(n)}/0$, so daß $O(z) > O(x)$ aus $m > n$ und $0 < x^{(n)}$ folgt. Ferner gilt $0 < y^{(O(y)-1)} \leqq a_i$ wegen $y \cap a_i > 0$ für alle $y \in Q_i \cup \{x\}$, so daß nach Hilfssatz 13 wegen $0 < z^{(m)} \leqq q_i \dot{\cup} x^{(n)}$

$$0 < z^{(O(z)-1)} \leqq \dot{\bigcup} (y^{(O(y)-1)} \mid y \in Q_i \cup \{x\}) \leqq a_i$$

gilt. Daraus folgt aber $z \cap a_i > 0$ und damit $z \in X_i$ mit $z \cap q_i = 0$, d. h. $z \in R_i$. Somit existiert im Widerspruch zu (11) ein Element $z \in R_i$ mit $O(z) > O(x)$. Demnach ist Q_i maximale unabhängige Untermenge von Z_i und damit Q maximale unabhängige Untermenge von Z. Nach Satz 1 ist Q eine zyklische Basis von L.

Satz 14. *Die Vereinigung einer gerichteten Menge von Servanzelementen in L ist selbst Servanzelement.*

Beweis. Es sei N eine gerichtete Indexmenge, $\{b_\nu \mid \nu \in N\}$ eine Menge von Servanzelementen mit $b_\alpha \leqq b_\beta$ für $\alpha \leqq \beta$, $\alpha, \beta \in N$ und $b \overset{\text{def}}{=} \bigcup (b_\nu \mid \nu \in N)$. Weiter sei $z \in Z(b/0)$. Wegen $z \in K$ gilt $z \leqq \bigcup (b_{\nu_i} \mid \nu_i \in N, i = 1, \ldots, n)$. Da N gerichtet ist, existieren Indizes $\nu_i' \in N$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $b_{\nu_1'} = b_{\nu_1}$ und $b_{\nu_{i-1}'} \cup b_{\nu_i} \leqq b_{\nu_i'}$, so daß $z \leqq \bigcup (b_{\nu_i} \mid \nu_i \in N, i = 1, \ldots, n) \leqq b_{\nu_n'}$ gilt. Da $b_{\nu_n'}$ Servanzelement ist, gilt nach Hilfssatz 11 $H(z) = H_{b_{\nu_n'}}(z) \leqq H_b(z) \leqq H(z)$. Aus $H(z) = H_b(z)$ für alle $z \in Z(b/0)$ folgt wegen der Eigenschaft (i), daß b Servanzelement in L ist.

Satz 15. *Ist $a \in L$ und existiert zu jedem Zyklus $z \in Z(a/0)$ ein Zyklus x mit $0 < x \leqq z$ und $H_a(x) = H(x)$, dann ist a Servanzelement in L.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes sei $z \in Z(a/0)$ ein Zyklus mit $H_a(z) = n - 1 < H(z)$. Dann existiert ein Zyklus $x = z^{(m)} > 0$ mit $H_a(x) = H(x)$. Wegen $H(z) > n - 1$ existiert ein $y \in Z$ mit $y^{(n)} = z$, $y^{(n+m)} = x$, so daß aus $H(x) = H_a(x)$ die Existenz eines Zyklus $y_1 \in Z(a/0)$ mit

$$z^{(m)} = x = y^{(n+m)} = {y_1}^{(n+m)} \leqq a^{(n+m)}$$

folgt. Da $y \nleqq a$ gilt, existiert somit eine natürliche Zahl r mit $1 \leqq r \leqq n + m$ und $y^{(r)} \leqq a^{(r)}$, $y^{(r-1)} \nleqq a^{(r-1)}$. Aus (iv) folgt damit die Existenz eines $y_0 \in Z$ mit $y_0 \leqq a \cup y$, $y_0^{(r)} = 0$, $y_0^{(r-1)} \nleqq a^{(r-1)}$. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt $H_a(v) = H(v)$ für jedes Atom v des Verbands $a/0$. Daraus folgt $y_0 \cap a = 0$, da $y_0^{(r-1)}$ Atom ist und $y_0^{(r-1)} \nleqq a^{(r-1)}$ gilt. Wegen $y_0^{(r-1)} \nleqq a^{(r-1)}$ gilt $y_0 \nleqq y' \cup a$ auf Grund von Hilfssatz 10, d. h. $y \leqq y_0 \dot{\cup} a$ nach Hilfssatz 7. Nach Hilfssatz 2 ist damit a Servanzelement in $a \dot{\cup} y_0/0$, d. h., es gilt $H_a(z) = H_{a \cup y_0}(z) \geqq n$. Damit ist aber gezeigt, daß kein $z \in Z(a/0)$ mit $H_a(z) < H(z)$ existiert, also ist a auf Grund von (i) Servanzelement in L.

Folgerung. *Ist $a \in L$ mit $Z(a/0) = Z_1(a/0)$ und $H_a(z) = H(z)$ für jedes Atom $z \in a/0$, dann ist a Servanzelement.*

Beweis. Ist $x \in Z(a/0)$, dann existiert ein Atom $z \in a/0$ mit $z \leqq x$ und $H_a(z) = H(z)$, womit die Voraussetzungen für Satz 15 erfüllt sind, d. h., a ist Servanzelement.

Satz 16. *$a \in L$ sei Servanzelement in L. Gilt $x \cap a > 0$ für alle Zyklen $x \in Z$, dann ist $a = 1$.*

Beweis. Es sei $a < 1$. Dann existiert ein Zyklus $z \in Z$ mit $a < a \cup z \leqq 1$. Da a Servanzelement ist, gibt es ein $x \in Z$ mit $a \cup z = a \dot{\cup} x$ im Widerspruch zu $a \cap x > 0$.

Folgerung. *Es sei $Z = Z_1$, und $a \in L$ sei Servanzelement in L. Gilt $z \leqq a$ für jedes Atom $z \in L$, dann ist $a = 1$.*

Beweis. Aus $z \leqq a$ für jedes Atom $z \in L$ folgt $x \cap a > 0$ wegen $Z = Z_1$ für alle Zyklen $x \in Z$, so daß nach Satz 16 die Behauptung folgt.

Satz 17. *Ist $a \subseteqq L$ Servanzelement in L mit $a^{(n)} = 0$, dann ist a direkte Komponente des Einselements von L.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt $a \cap 1^{(n)} = 0$ nach Hilfssatz 14, d. h., es existiert $b \overset{\text{def}}{=} a \dot{\cup} 1^{(n)}$. Es sei $z \in Z(b/1^{(n)})$ mit $H_b(z) = h - 1 < H(z)$, wobei h eine geeignete natürliche Zahl ist. Dann existiert ein Zyklus $y \in Z(1/1^{(n)})$ mit $y_{1^{(n)}}^{(h)} = z$. Wegen $b/1^{(n)} \cong a/0$ gilt $z = 1^{(n)} \dot{\cup} z_0$ mit $z_0 \in Z(a/0)$ und $H_a(z_0) = h - 1$. Weiter gilt $y = 1^{(n)} \cup x$ mit $x \in Z$ und $y_{1^{(n)}}^{(h)} = 1^{(n)} \cup x^{(h)}$. Dann folgt aus $1^{(n)} < 1^{(n)} \cup z_0 = 1^{(n)} \cup x^{(h)}$, daß $n > h$ gilt.

Dann gilt aber $0 < z_0 \leqq 1^{(n)} \cup x^{(h)} \leqq 1^{(h)} \cup x^{(h)} = 1^{(h)}$, woraus nach Hilfssatz 15 die Existenz eines $y_1 \in Z$ mit $y_1^{(h)} = z_0$, also $H(z_0) \geqq h$ folgt. Da a Servanzelement ist, gilt somit $H_a(z) = H(z_0) \geqq h$ im Widerspruch zu $H_a(z_0) = h - 1$. Deshalb gilt $H_b(z) = H(z)$ für alle $z \in Z(b/1^{(n)})$, so daß b nach (i) in $1/1^{(n)}$ Servanzelement ist. Für jedes Element $z \in Z(1/b)$ gilt $z = b \cup x$ mit $x \in Z$. Weiter gilt $z_b^{(n)} = b \cup x^{(n)} \leqq b \cup 1^{(n)} = b$, so daß $O_b(z) \leqq n$ für alle $z \in Z(1/b)$ folgt.
Nach Hilfssatz 16 besitzt der Verband $1/b$ die Eigenschaft (iv), so daß $1/b$ nach Satz 8 eine zyklische Basis besitzt. Aus Satz 9 folgt dann die Existenz eines Elements $b_0 \in 1/1^{(n)}$ mit $1 = b \,\dot\cup_{1^{(n)}}\, b_0$. Wegen der Modularität von L gilt weiter

$$1^{(n)} = b \cap b_0 = (1^{(n)} \dot\cup a) \cap b_0 = 1^{(n)} \cup (a \cap b_0)$$

und damit $a \cap b_0 \leqq 1^{(n)}$. Da aber $a \cap 1^{(n)} = 0$ gilt, muß notwendig $a \cap b_0 = 0$ gelten. Daraus folgt $1 = (a \dot\cup 1^{(n)}) \cup b_0 = a \cup (1^{(n)} \cup b_0) = a \dot\cup b_0$, womit der Satz bewiesen ist.

VI. Eine wichtige Klasse der abelschen Gruppen ist die Klasse der dividierbaren abelschen Gruppen. Eine verbandstheoretische Verallgemeinerung des Begriffs der dividierbaren Untergruppe einer primären abelschen Gruppe führt zum Begriff des injektiven Elements. Dabei ist der Begriff „Quasizyklus" die entsprechende Verallgemeinerung des Begriffs „Gruppe vom Typ p^∞" bzw. „quasizyklische Gruppe".
Hierzu sei noch folgendes bemerkt: Ist L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (iv) und $a \in L$ injektives Element, dann folgt nach Hilfssatz 15 aus $z \in Z(a/0)$ und $z \leqq a' = a$, daß $H_a(z) > 0$ gilt, d. h., es gilt $H_a(z) = \infty$ für alle $z \in Z(a/0)$.
Gilt andererseits für ein Element a eines zyklisch erzeugten modularen Verbands $H_a(z) = \infty$ für alle $z \in Z(a/0)$, dann existiert zu jedem $z \in Z(a/0)$ ein Zyklus $y \in a/0$ derart, daß $z = y' \leqq a'$ gilt. Damit gilt $z \leqq a'$ für alle $z \in Z(a/0)$ und auch $a = a'$, da $a = \bigcup \big(z \mid z \in Z(a/0)\big)$ gilt, d. h., a ist injektives Element. Insbesondere ist dann die Vereinigung einer echt aufsteigenden Folge von Zyklen ein Quasizyklus.
In engem Zusammenhang mit den dividierbaren Gruppen steht der Begriff „Basisuntergruppe einer primären abelschen Gruppe". In der Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände führt die entsprechende Begriffsbildung zur Definition des Hauptelements.
In diesem Abschnitt sollen die folgenden Aussagen über dividierbare Untergruppen und Basisuntergruppen primärer abelscher Gruppen verallgemeinert werden (siehe KUROSCH [13], Kapitel VII):

(A) Jede dividierbare primäre abelsche Gruppe zerfällt in die direkte Summe quasizyklischer Untergruppen.
(B) Wenn jedes Element des Sockels einer primären abelschen Gruppe G in G unendliche Höhe hat, so ist die Gruppe G dividierbar.
(C) Jede primäre abelsche Gruppe G besitzt Basisuntergruppen.
(D) Je zwei Basisuntergruppen einer primären abelschen Gruppe sind isomorph.
(E) Wenn eine primäre abelsche Gruppe G eine dividierbare Untergruppe A enthält, so ist A in G direkter Summand.

Im folgenden sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (iv) (der insbesondere nach Satz 10 die Eigenschaft (i) besitzt).
Satz 18 ist eine Verallgemeinerung der Aussage (A).

Satz 18. *Ist $a \in L$ injektives Element, dann ist a direkte Vereinigung von Quasizyklen.*

Beweis. Nach den Bemerkungen in der Einleitung dieses Abschnitts gilt $H_a(z) = \infty$ für alle $z \in Z(a/0)$, d. h., zu jedem Element $z \in Z(a/0)$ existiert eine echt aufsteigende Folge von Zyklen $z = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < \cdots$ und damit auch ein Quasizyklus $v \overset{\text{def}}{=} \bigcup (z_i \mid i = 0, 1, \ldots) > z$. Daraus folgt aber, daß eine maximale unabhängige Untermenge von $\bar{Z}(a/0)$ auch maximale unabhängige Untermenge von

$$\bar{Z}(a/0) \cup Z(a/0) \tag{12}$$

ist. Es sei Q eine maximale unabhängige Untermenge von $\bar{Z}(a/0)$ und $b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (v \mid v \in Q)$. Da $v' = v$ für jedes $v \in Q$ gilt, folgt aus der Folgerung zu Hilfssatz 10 $b' = \dot{\bigcup} (v' \mid v \in Q) = \dot{\bigcup} (v \mid v \in Q) = b$, d. h., b ist injektives Element in L mit $b \leqq a$. Weiter gilt $H_b(z) = \infty \leqq H_a(z)$ für alle $z \in Z(b/0)$, so daß b nach (i) in $a/0$ Servanzelement ist. Nach (12) gilt $z \cap b > 0$ für alle $z \in Z(a/0)$, so daß nach Satz 16 $b = a$ und damit $a = \dot{\bigcup} \big(v \mid v \in Q \subseteqq \bar{Z}(a/0)\big)$ gilt.

Folgerung 1. *Jeder zyklisch erzeugte modulare Verband L mit der Eigenschaft* (iv) *besitzt genau ein maximales injektives Element.*

Beweis. Es sei $a \overset{\text{def}}{=} \bigcup (v \mid v \in \bar{Z})$. Dann gilt $a' = \bigcup (v' \mid v \in \bar{Z}) = \bigcup (v \mid v \in \bar{Z}) = a$ nach der Folgerung zu Hilfssatz 10, d. h., a ist injektives Element. Es sei b ein beliebiges injektives Element von L. Dann gilt nach Satz 18

$$b = \dot{\bigcup} (v \mid v \in Q \subseteqq \bar{Z}) \leqq \bigcup (v \mid v \in \bar{Z}) = a .$$

Damit ist aber a das einzige maximale injektive Element in L.

Folgerung 2. *Sind $a, b \in L$ injektive Elemente mit $a \leqq b$, dann existiert ein injektives Element $c \leqq b$ mit $b = a \dot{\cup} c$.*

Beweis. Nach Satz 18 gilt $a = \dot{\bigcup} \big(v \mid v \in Q \subseteqq \bar{Z}(b/0)\big)$. Die Menge Q ist eine unabhängige Untermenge von $\bar{Z}(b/0)$, die zu einer maximalen unabhängigen Untermenge R von $\bar{Z}(b/0)$ ergänzt werden kann. Aus dem Beweis von Satz 18 folgt $b = \dot{\bigcup} (v \mid v \in R)$ $= a \dot{\cup} c$ mit $c \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (v \mid v \in R \setminus Q)$.

Der Einfachheit halber wird im folgenden ein zyklisches Servanzelement Servanzzyklus genannt. Die Aussage (B) kann nicht ohne weiteres verallgemeinert werden, da das Einselement von L nicht notwendig injektiv sein muß, wenn jedes Atom von L unendliche Höhe in L hat, wie der Verband $L = a \dot{\cup} z/0$, in welchem $z \in Z_2$ und a injektives Element ist, zeigt.
Hilfssatz 21 ist eine Verallgemeinerung der folgenden, zu (B) äquivalenten Aussage: *Besitzt eine primäre abelsche Gruppe G außer* (0) *keine zyklischen Servanzuntergruppen, dann ist G dividierbar.*

Hilfssatz 21. *Gibt es in L keine Servanzzyklen $z \in Z \setminus \{0\}$, dann ist* 1 *injektives Element in L.*

Beweis. Es sei $z \in Z$ mit $H(z) = 0$. Da z kein Servanzelement sein kann, existiert eine kleinste natürliche Zahl n mit

$$H(z^{(n)}) > H_z(z^{(n)}), \tag{13}$$

d. h., es existiert ein Zyklus $y \in Z$ derart, daß $z^{(n)} \leqq y^{(n+1)}$ und $z^{(n-1)} \nleqq y^{(n)}$ gilt. Aus (iv) folgt die Existenz eines Atoms $x \in Z$ mit $x \leqq z^{(n-1)} \cup y^{(n)}$, $x \nleqq y^{(n)}$ $= z^{(n)} \cup y^{(n)}$, so daß $z^{(n-1)} \leqq x \cup y^{(n)}$ nach Hilfssatz 8 gilt. Da es in $Z \setminus \{0\}$ keine Servanzzyklen gibt und x Atom ist, muß wegen (i) $H(x) = \infty$ gelten. Damit existiert aber auch ein Zyklus $x_0 \in Z$ mit $x_0^{(n)} = x$.

Aus $z^{(n-1)} \leqq x \cup y^{(n)} = x_0^{(n)} \cup y^{(n)} = (x_0 \cup y)^{(n)}$ folgt nach Hilfssatz 16 die Existenz eines Zyklus $y_0 \in Z$ mit $y_0^{(n)} = z^{(n-1)}$, d. h., es existiert eine ganze Zahl r $(0 \leqq r \leqq n-1 < n)$ mit $z^{(r)} = y_0^{(r+1)}$, d. h., es gilt $H(z^{(r)}) > H_z(z^{(r)})$ im Widerspruch zu (13).
Als Folgerung zum Satz 19 ergibt sich ein Analogon zur Aussage (C).

Satz 19. *Es ist* $a = \dot{\bigcup} (z \mid z \in Q \subseteqq Z,\ Q \neq \emptyset) \in L$ *genau dann Hauptelement in* L, *wenn* $Q \cup \{0\}$ *maximale* S*-unabhängige Untermenge von* Z *ist.*

Beweis. Es sei a Hauptelement und $a \dot{\cup} z$ Servanzelement in L mit $z \in Z \setminus \{0\}$. Nach Satz 3 ist $a \dot{\cup} z$ Servanzzyklus in $1/a$, d. h., insbesondere gilt $H(a \dot{\cup} z) = 0$ im Widerspruch dazu, daß, da a Hauptelement ist, 1 in $1/a$ injektives Element ist und damit $H(a \cup z) = \infty$ gilt. Somit existiert kein Zyklus $z \in Z \setminus \{0\}$ derart, daß $a \dot{\cup} z$ Servanzelement ist. Damit ist aber gezeigt, daß $Q \cup \{0\}$ maximale S-unabhängige Untermenge von Z ist.
Es sei $Q \cup \{0\}$ maximale S-unabhängige Untermenge von Z. Dann kann nach Satz 2 und Hilfssatz 6 in $1/a$ außer a kein weiterer Servanzzyklus existieren, so daß $1 = 1'_a$ nach Hilfssatz 21 gilt, d. h., a ist Hauptelement.

Folgerung. *Jeder zyklisch erzeugte modulare Verband mit der Eigenschaft* (iv) *besitzt ein Hauptelement.*

Beweis. Nach Satz 12 ist $Z \setminus \{0\}$ eine D_S-Menge, so daß $Z \setminus \{0\}$ eine maximale S-unabhängige Untermenge Q besitzt (siehe KERTÉSZ [8], Satz 1.9).
$Q \cup \{0\}$ ist maximale S-unabhängige Untermenge von Z, und es gilt $Q \cup \{0\} \neq \emptyset$, so daß nach Satz 19 $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in Q \cup \{0\})$ Hauptelement ist, insbesondere kann $a = 0$ gelten.

Aussage (D) kann in dieser Arbeit nicht dahingehend verallgemeinert werden, daß für zwei Hauptelemente $a, b \in L$ die Isomorphie $a/0 \cong b/0$ nachgewiesen wird. Es läßt sich aber folgendes zeigen:

Satz 20. Q *und* R *seien zwei maximale* S*-unabhängige Untermengen von* $Z \subseteqq L$. *Dann existiert eine eineindeutige Abbildung* f *von* Q *auf* R *derart, daß* $O(x) = O(xf)$ *für* $x \in Q$, $xf \in R$ *gilt.*

Beweis. Für $m = \infty, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ sei $X_m \overset{\text{def}}{=} \{z \mid z \in Z, O(z) = m\}$, $R_m \overset{\text{def}}{=} R \cap X_m$ und $c_m \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in R_m)$. Ist R_m keine maximale S-unabhängige Untermenge von X_m, so existiert ein Zyklus $z \in X_m$ derart, daß $c_m \dot{\cup} z$ Servanzelement in L ist.
Da $c \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in R)$ nach Satz 19 Hauptelement ist, gibt es ein Element $y \in Z$ mit $y \cap c = 0$, $O(y) > m$ und $c \cup z < c \dot{\cup} y$. Weiter sei $R_{-m} \overset{\text{def}}{=} \{y\} \cup R \setminus R_m$ und $c_{-m} \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in R_{-m})$. Nach Satz 3 ist $c_m \dot{\cup} z$ Servanzzyklus in $c \dot{\cup} y/c_m$, so daß wegen der Isomorphie $c_{-m}/0 \cong c_{-m} \dot{\cup} c_m/c_m = c \dot{\cup} y/c_m$ ein Servanzzyklus $x \leqq c_{-m}$ mit $c_m \dot{\cup} z = c_m \dot{\cup} x$ existieren muß. Dann gilt $z/0 \cong x/0$, d. h. $O(x) = m$.
Da $x^{(n)}$ für jede ganze Zahl n $(0 \leqq n < m)$ kompaktes Element ist, existiert eine natürliche Zahl l mit $x \leqq \dot{\bigcup} (z_i \mid z_i \in R_{-m},\ i = 1, \ldots, l)$ und damit auch eine kleinste natürliche Zahl r mit

$$x \cap \dot{\bigcup} (x_j \in R_{-m},\ j = 1, \ldots, r \leqq l) = x^{(s)} > 0$$

und

$$x \cap \dot{\bigcup} (x_{j_k} \mid 1 \leqq j_k \leqq r,\ k = 1, \ldots, r-1) = 0.$$

Da x und $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (x_j \mid j = 1, \ldots, r)$ Servanzelemente sind, gilt $H_x(x^{(s)}) = H_a(x^{(s)}) = s$ nach Hilfssatz 11, d. h., es existiert ein Zyklus $x_0 \in Z(a/0)$ mit $x^{(s)} = x_0^{(s)}$ und

$H_a(z) = H_{x_0}(z)$ für alle $z \in Z(x_0/0)$. Nach (i) ist x_0 Servanzelement in $a/0$, und es gilt $x_0 \cap \dot{\bigcup} (z_{j_k} \mid 1 \leqq j_k \leqq r,\ k = 1, \ldots, r-1) = 0$, $O(x_0) = m$ und $x_0 \nleqq \dot{\bigcup} (z'_j \mid j = 1, \ldots, r)$. Nach Hilfssatz 9 existiert dann ein Zyklus z_{j_r} $(1 \leqq j_r \leqq r)$ mit $a = \dot{\bigcup} (z_{j_k} \mid 1 \leqq j_k \leqq r,\ j_k \neq j_r,\ k = 1, \ldots, r-1) \mathbin{\dot\cup} x_0$. Somit gilt aber insbesondere $z_{j_r}/0 \cong x_0/0$ und damit $O(z_{j_r}) = m$ im Widerspruch zu $z_{j_r} \in R_{-m} = \{y\} \cup R \setminus R_m$.
Also ist R_m maximale S-unabhängige Untermenge von X_m und damit auch $Q_m \overset{\text{def}}{=} X_m \cap Q$.
Zwei beliebige maximale S-unabhängige Untermengen einer Teilmenge von Z sind aber nach der Folgerung zu Satz 12 gleichmächtig, so daß eine eineindeutige Abbildung f von Q auf R existiert, die für $m = \infty, 0, 1, \ldots$ jedem Element aus Q_m genau ein Element aus R_m zuordnet. Dann gilt aber auch $O(x) = O(xf)$ für $x \in Q$ und $xf \in R$.

Satz 21. *Ist a injektives Element in L, dann ist a direkte Komponente von* 1.

Beweis. Nach der Folgerung zu Satz 19 besitzt L ein Hauptelement b. Dann gilt aber $a \cap b = 0$, da $H(z) = H_b(z) < \infty$ für jedes Element $z \in Z(b/0)$ gilt und a injektiv ist. Weiterhin ist 1 in $1/b$ injektives Element. Aus der Isomorphie $a \mathbin{\dot\cup}_b/b \cong a/0$ folgt, daß $a \mathbin{\dot\cup} b$ in $1/b$ injektives Element ist. Nach der Folgerung 2 zu Satz 18 existiert in $1/b$ ein injektives Element c mit $1 = c \mathbin{\dot\cup}_b (a \mathbin{\dot\cup} b)$. Aus $b \cap a = 0$ und $b = c \cap (a \mathbin{\dot\cup} b) = b \cup (a \cap c)$ folgt $a \cap c = 0$. Wegen $b \leqq c$ gilt dann aber $1 = a \cup b \cup c = a \mathbin{\dot\cup} c$, womit der Satz bewiesen ist.

VII. Im folgenden sei L wiederum ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (iv). In Analogie zu der Frage, unter welchen Bedingungen eine gemischte abelsche Gruppe zerfällt (siehe Kurosch [13], S. 172ff.), steht die Frage, unter welchen Bedingungen die Vereinigung aller Zyklen endlicher Ordnung von L direkte Komponente von 1 ist. Da das maximale injektive Element direkte Komponente von 1 ist, soll $\bar{Z} = \{0\}$ vorausgesetzt werden. Satz 22 gibt eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, daß $\bigcup (z \mid z \in Z_1)$ direkte Komponente von 1 ist.

Satz 22. *Es ist $a \overset{\text{def}}{=} \bigcup (z \mid z \in Z_1) \in L$ genau dann direkte Komponente von* 1, *wenn Z_2 eine maximale S-unabhängige Untermenge Q derart besitzt, daß aus $b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in Q \subseteqq Z_2)$ und $z \in Z_2(1/b)$ stets $z \cap e > b$ folgt, wobei e das maximale injektive Element von $1/b$ ist.*

Beweis. 1. Es gelte $1 = a \mathbin{\dot\cup} c$ mit $c \in L$. Wegen $a \cap c = 0$ gilt $Z_1(c/0) = \{0\}$, d. h., für alle Zyklen $z \in Z(c/0)$ mit $0 < z$ gilt $z \in Z_2$. Der Verband $c/0$ besitzt ein Hauptelement b. Dann gilt $b = \dot{\bigcup} (z \mid z \in Q \subseteqq Z_2)$. Wegen der Isomorphie $a/0 \cong a \mathbin{\dot\cup} c/c = 1/c$ gilt $z \cap c > 0$ für alle Zyklen $z \in Z_2$.
Ist Q keine maximale S-unabhängige Untermenge von Z_2, dann existiert ein Servanzzyklus $x \in Z_2$ derart, daß $b \mathbin{\dot\cup} x$ Servanzelement ist. Nach Satz 3 sind c und $b \mathbin{\dot\cup} x$ Servanzelemente in $1/b$. Aus $b \cap x = 0$ und $c \cap x = x^{(r)} > 0$ folgt $c \cap (b \mathbin{\dot\cup} x) = b \mathbin{\dot\cup} (c \cap x) = b \cup x^{(r)} > b$. Da c Servanzelement in $1/b$ ist, existiert in c/b ein Zyklus $y \in Z(c/b)$ mit $y_b^{(r)} = (b \cup x)_b^{(r)}$. Es ist $b \mathbin{\dot\cup} x$ Servanzelement in $1/b$, weshalb $H_{b \dot\cup x}(z) = H(z)$ für alle $z \in Z(b \mathbin{\dot\cup} x/b)$ nach Hilfssatz 11 folgt, d. h. aber, es gilt $H_y(z) = H(z)$ für alle $z \in Z(y/b)$. Nach (i) ist y Servanzelement in c/b und damit nach Satz 2 auch in $c/0$. Weiter gilt $y = b \mathbin{\dot\cup} y_0$ mit $y_0 \in Z_2(c/b)$, da $y \in Z_2(c/b)$ und b Servanzelement ist. Dies steht aber im Widerspruch dazu, daß b Hauptelement in $c/0$ ist. Somit ist Q maximale S-unabhängige Untermenge von Z_2.

Da $c'_b = c$ gilt, folgt aus $z \cap c > 0$ für alle Zyklen $z \in Z_2$ mit $z \cap b = 0$ sofort $b < (z \cap c) \cup b = (b \cup z) \cap c \leqq (b \cup z) \cap e$.

2. In Z_2 existiere eine maximale S-unabhängige Untermenge Q derart, daß aus $b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z \mid z \in Q \subseteqq Z_2)$ und $z \in Z_2(1/b)$ $z \cap e > b$ folgt. Aus $z \leqq a$ folgt $z \leqq \bigcup (z_i \mid z_i \in Z_1, i = 1, \ldots, n)$ und damit $O(z) < \infty$ nach Hilfssatz 10. Gilt $z \leqq b$, dann gibt es Zyklen $x_i \in Q$ mit $z \leqq \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n)$, $z \nleqq \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n-1)$, d. h., es gilt

$$\dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n-1) \cup z = \dot{\bigcup} (x_i \mid i = 1, \ldots, n-1) \mathbin{\dot{\cup}} z_n^{(r)}$$

mit einer geeigneten ganzen Zahl r. Daraus folgt aber $O(z) \geqq O(z_n^{(r)}) = \infty$. Somit gilt $a \cap b = 0$. Nach (i) ist a Servanzelement, da $Z(a/0) = Z_1$ gilt und damit aus $x \in Z(a/0)$ auch $y \in Z(a/0)$ für alle $y > x$ folgt. Da b Servanzelement ist, folgt aus $z \in Z_1(1/b)$ nach Hilfssatz 6 $z = b \mathbin{\dot{\cup}} x$ mit $x \in Z_1 = Z(a/0)$, d. h., es gilt $z \in Z(b \mathbin{\dot{\cup}} a/b)$. Also ist $b \mathbin{\dot{\cup}} a$ Servanzelement in $1/b$ und damit nach Satz 2 Servanzelement in L. Weiter gilt $(b \mathbin{\dot{\cup}} a) \cap e = b \cup (a \cap e) = b$, da nach Voraussetzung $\bar{Z}(a/0) = \{0\}$ und damit auch $\bar{Z}(a \mathbin{\dot{\cup}} b/b) = \{b\}$ gilt, d. h., es gilt $Z_1(e/b) = \{b\}$.
Aus $a \cap b = 0$ und $a \cap e \leqq b$ folgt somit $a \cap e = 0$. Es sei $z \in Z_2(1/b)$. Dann existiert nach Voraussetzung eine nichtnegative ganze Zahl r mit $z_b^{(r)} = e \cap z$. Daraus folgt aber, daß in $1/e$ keine Zyklen unendlicher Ordnung existieren, d. h., es gilt $Z_2(1/e) = \emptyset$ und damit $Z(1/e) = Z_1(1/e)$.
Es ist b Servanzelement in L, und e ist Servanzelement in $1/b$, so daß e nach Satz 2 auch in L Servanzelement ist. Nach Hilfssatz 6 existiert dann zu jedem $z \in Z(1/e)$ ein Element $x \in Z_1$ mit $z = e \mathbin{\dot{\cup}} x_1$, d. h. aber, es gilt $z \leqq e \mathbin{\dot{\cup}} a$ für alle $z \in Z(1/e)$, weshalb $1 = a \mathbin{\dot{\cup}} e$ gilt.
Einige weitere Ergebnisse aus der Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände findet man in der Arbeit von R. FRITZSCHE [4] und der Arbeit des Verfassers [17].

LITERATUR

[1] BAER, R.: Der Kern, eine charakteristische Untergruppe. Comp. Math. *1* (1934), 254–283.
[2] FRITZSCHE, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer. Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 155–161.
[3] FRITZSCHE, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov. Beiträge zur Algebra und Geometrie *2* (1974), 73–81.
[4] FRITZSCHE, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov, Kertész und Szele. Publ. Math. Debrecen *24* (1977), 323–331.
[5] FRITZSCHE, R., und G. RICHTER: Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov II. Beiträge zur Algebra und Geometrie *3* (1974), 161–165.
[6] HEAD, T. J.: Purity in compactly generated modular lattices. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1966), 55–59.
[7] KERTÉSZ, A.: On independent sets of elements in algebra. Acta Sci. Math. Szeged *21* (1960), 260–269.
[8] KERTÉSZ, A.: Vorlesungen über artinsche Ringe. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968.
[9] KERTÉSZ, A.: Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände. Publ. Math. Debrecen *15* (1968), 1–11.
[10] KULIKOV, L. JA.: K teorii abelevich grupp proizvol'noj moščnosti. Matem. Sb. *9* (1941), 165–182.
[11] KULIKOV, L. JA.: K teorii abelevich grupp proizvol'noj moščnosti. Matem. Sb. *16* (1945), 129–162.

[12] KULIKOV, L. JA.: Obobščennye primarnye gruppy. Tr. Mosk. matem. o-va *1* (1952), 247–326; *2* (1953), 85–167.
[13] KUROŠCH, A. G.: Gruppentheorie I. Akademie-Verlag, Berlin 1970 (Übersetzung aus dem Russischen).
[14] KUROŠCH, A. G.: Gruppentheorie II. Akademie-Verlag, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
[15] PRÜFER, H.: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen. Math. Z. *17* (1923), 35–61.
[16] RICHTER, G.: Zur Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände. Dissertation, Halle 1975.
[17] RICHTER, G.: Verallgemeinerung eines Satzes von Kertész. Publ. Math. Debrecen 1979 (im Druck)
[18] SZÁSZ, G.: Einführung in die Verbandstheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962.

Manuskripteingang: 30. 11. 1976

VERFASSER:

GERD RICHTER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg