Werk

Titel: Charakteristiken und Schnittzahlformeln für p-l-s-Kegelschnitte

Autor: DRECHSLER, KONRAD; STERZ, ULRICH

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0008|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 7–31

Charakteristiken und Schnittzahlformeln für p-l-s-Kegelschnitte

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz

1. Die p-l-s-Kegelschnitte

1.1. Ein p-Kegelschnitt[1] (p) in einer projektiven Ebene X über dem Körper $\mathfrak{k}$ der komplexen Zahlen ist gegeben durch eine symmetrische Matrix $((p))$. Die Menge der p-Kegelschnitte bildet einen fünfdimensionalen projektiven Raum P_5. Die fünfdimensionale *Varietät M_5 der p-l-Kegelschnitte*[2] ist eine Varietät eines Produktraumes $P_5 \times L_5$ mit dem allgemeinen Punkt $(p, l) = (p_i, l_i)$, wobei p_i $(i = 1, \ldots, 6)$ unbestimmt und l_i $(i = 1, \ldots, 6)$ durch die zweireihigen Adjunkten der Matrix $((p))$ gegeben sind. Die Matrix $((l))$ ist die symmetrische Koeffizientenmatrix eines Linienkegelschnitts in den Linienkoordinaten (w_1, w_2, w_3). Durch den allgemeinen Punkt ist eine birationale Abbildung $\chi\colon M_5 \to P_5$ gegeben, die auf $M_5 \setminus (M \mid P_{(1)})$ biregulär ist;

$$\chi\colon M_5 \setminus (M \mid P_{(1)}) \rightleftarrows P_5 \setminus (P \mid P_{(1)}),$$

wobei $(P \mid P_{(1)})$ bzw. $(M \mid P_{(1)})$ die Varietät der p-Ausartungen von p- bzw. p-l-Kegelschnitten, d. h. mit Rang $((p)) = 1$, ist. Ein zugehöriges H-Ideal zu M_5 wird durch die Gleichungen erzeugt, die man erhält, wenn man aus

$$((p)) \cdot ((l)) = \varepsilon((\delta))\,^{3)} \tag{1.1}$$

die Unbestimmte ε eliminiert.

1.2. Wir werden nun die von uns in [5] gegebene Definition von p-l-s-Kegelschnitten kurz wiedergeben. Die Menge aller einen allgemeinen p-Kegelschnitt (p) in einem Punkt (ξ) superoskulierenden p-Kegelschnitte bildet eine Büschelschar, die durch die Kegelschnittform und das Quadrat einer Linearform, die die Tangente in (ξ) an (p) beschreibt, erzeugt wird. In P_5 ist diese Büschelschar eine Gerade. Die Menge aller den Kegelschnitt (p) superoskulierenden Kegelschnitte bildet in P_5 eine eindimensionale Schar von Geraden. Im Graßmannraum G_{14} der Geraden des P_5 ist diese Schar eine Kurve $(\bar{s}^P)$. Die Koeffizienten $\bar{s}_j^P$ der *zugeordneten Form* $\bar{F}^P$ (vgl. [1]) dieser Kurve sind rationale Funktionen von p_i bzw. p_i und l_i. Wir denken uns noch die Koeffizienten $\bar{s}_j^L$ der zugeordneten Form $\bar{F}^L$ der Kurve $(\bar{s}^L)$, die entsprechend aus dem zugehörigen l-Kegelschnitt gewonnen wurde.

---

[1] Punkt-Kegelschnitt

[2] Punkt-Linien-Kegelschnitte oder vollständige Kegelschnitte

[3] $((\delta))$ ist die Einheitsmatrix

Definition 1. Die fünfdimensionale Varietät N_5 mit dem allgemeinen Punkt $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$ über $\mathfrak{k}$ im vierfach projektiven Raum heißt die *Varietät* der *p-l-s-*Kegelschnitte, ihre Punkte heißen *p-l-s-Kegelschnitte*.

Definition 2. Die Punkte von $(\bar{s}^P)$ heißen die *p-Superoskulanten* des *p-l-s*-Kegelschnitts $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$. Die Punkte von $(\bar{s}^L)$ heißen die *l-Superoskulanten* von $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$.

Durch den allgemeinen Punkt ist eine birationale Abbildung $\Psi: N_5 \to M_5$ gegeben.

1.3. In [5] geben wir eine Übersicht über alle *p-l-s*-Kegelschnitte und betrachten Untervarietäten auf N_5. Einiges davon sei hier hervorgehoben.

1.4. Jeder *p-l-s*-Kegelschnitt $(p, l, \bar{s}^P, \bar{s}^L)$ ist bereits durch $(p, l, \bar{s}^P)$ eindeutig bestimmt. Die Hinzunahme von $\bar{s}^L$ dient nur einer günstigeren Beschreibung.

1.5. Die Teilmengen der *p-l*-Ausartungen von M_5 bzw. N_5, d. h. mit Rang $\big((p)\big) = 1$ und Rang $\big((l)\big) = 1$, werden mit $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ bzw. $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ bezeichnet. Es sind Varietäten. $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ ist drei- und $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ vierdimensional.

1.6. Die birationale Abbildung Ψ ist auf $M_5 \setminus (M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ und $N_5 \setminus (N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ biregulär. Ein Punkt von $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ bestimmt eindeutig einen Punkt von $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$. Zu einem Punkt von $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ gehört eine eindimensionale Teilmenge von $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$, die biregulär auf eine projektive Gerade I_1 abbildbar ist.

1.7. M_5 und N_5 sind singularitätenfrei.

2. Schnittzahlen

2.1. Vorbemerkungen und Bezeichnungen

2.1.1. Auf einer singularitätenfreien n-dimensionalen Varietät V_n ist für jede eigentliche Schnittkomponente zweier Untervarietäten eine *Schnittmultiplizität* definiert (vgl. [14]).

2.1.2. Schneiden sich V_r und V_s auf V_n, $r + s = n$, in endlich vielen Punkten, so ist die Summe der Schnittmultiplizitäten aller Schnittpunkte die *Schnittzahl* von V_r und V_s auf V_n [11, 14].

2.1.3. Ist P ein solcher Schnittpunkt der Multiplizität μ und $f: V \to V'$ eine birationale Abbildung auf eine singularitätenfreie Varietät V'_n, so daß V_r, V_s bzw. P auf V'_r, V'_s bzw. P' abgebildet werden und f in P und P' *biregulär* ist, so ist μ auch gleich der Schnittmultiplizität des Schnittpunktes P' von V'_r und V'_s auf V'_n (vgl. [14]).

2.1.4. Für die im folgenden auf den singularitätenfreien Varietäten M_5 bzw. N_5 zu bestimmenden Schnittzahlen wählen wir die birationale Abbildung f dem Schnittproblem entsprechend jeweils so, daß sie in allen Schnittpunkten biregulär ist. Ist z. B. auf M_5 keiner der Schnittpunkte eine p-Ausartung, so ist die Projektion χ von M_5 auf P_5 eine solche geeignete Abbildung. Auch die durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
\big((p)\big) &= \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & a + c^2 & ad + ce \\ e & ad + ce & ab + ad^2 + e^2 \end{pmatrix}, \\
\big((l)\big) &= \begin{pmatrix} ab + bc^2 + (cd - e)^2 & -bc - d(cd - e) & cd - e \\ -bc - d(cd - e) & b + d^2 & -d \\ cd - e & -d & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

von M_5 (vgl. [13]; [5], Abschnitt 6.1) gegebene birationale Abbildung gestattet, eine Schnittzahlbestimmung im Parameterraum vorzunehmen, wenn dabei alle auf M_5 vorkommenden Schnittpunkte von (2.1) erfaßt werden. Entsprechend können wir zur Berechnung von Schnittzahlen auf N_5 die Projektion Ψ von N_5 auf M_5 oder eine der Parameterdarstellungen von N_5 (vgl. [5], 9.1) heranziehen; letzteres wird insbesondere dann geschehen, wenn unter den Gleichungen für die Untervarietäten V_r oder V_s solche in den $\tilde{s}_j^P$ oder $\tilde{s}_j^L$ vorkommen.

2.1.5. Wir wollen folgende Bezeichnungen verwenden: Mit $(V_n \mid \square)$ bezeichnen wir eine algebraische Menge auf V_n, wenn wir deutlich machen wollen, daß diese Menge auf V_n liegt. Für $\square$ wird irgendein geeignetes Zeichen für die Erklärung dieser Untermenge stehen. So bezeichne etwa $(M \mid P^\nu)$ bzw. $(M \mid L^\nu)$ die durch ν allgemeine lineare Gleichungen in den p_i bzw. l_i bestimmte Untervarietät der Varietät M_5. Es ist $(M \mid \widehat{PL})$ die Varietät aller eine feste Gerade in einem festen Punkt berührenden p-l-Kegelschnitte. Sie ist durch je zwei geeignete lineare Gleichungen in den p_i und den l_i beschreibbar. $(M \mid P_{(1)})$ bzw. $(M \mid L_{(1)})$ ist die Untervarietät der p-Ausartungen (Rang $\big((p)\big) = 1$) bzw. der l-Ausartungen (Rang $\big((l)\big) = 1$) auf M_5. Für $(M \mid P_{(1)})$ hat man eine Parameterdarstellung mit $\big((p)\big) = \big((w_i w_k)\big)$, $i, k = 1, 2, 3$; dann bedeute $(M \mid P_{(1)}W)$, daß neben Rang $\big((p)\big) = 1$ eine allgemeine lineare Gleichung in den w_i gestellt wird. Entsprechend ist $(M \mid L_{(1)}X)$ zu verstehen.
Analog verwenden wir diese Bezeichungen, wenn die genannten Bedingungen auf N_5 gestellt werden; z. B. ist $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ die vierdimensionale Untervarietät der p-l-Ausartungen auf N_5. Weiter ist $(N \mid \tilde{S}^P)$ bzw. $(N \mid \tilde{S}^L)$ durch eine allgemeine lineare Gleichung in den $\tilde{s}_j^P$ bzw. in den $\tilde{s}_j^L$ gegeben. Schließlich bedeute $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}})$ bzw. $(N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}})$ die Untervarietät der p^{T}-Ausartungen bzw. der l^{T}-Ausartungen auf N_5 (vgl. [5], 8.1). Ist durch $(V_n \mid V_r)$ eine Varietät bezeichnet, so bedeute dasselbe Symbol auch den Zyklus $1 \cdot (V_n \mid V_r)$. Den Schnittzyklus [14] zweier Zyklen $(V_n \mid V_r)$ und $(V_n \mid V_s)$ auf V_n bezeichnen wir mit $(V_n \mid V_r V_s)$. Schneiden sich $(V_n \mid V_r)$ und $(V_n \mid V_s)$ in endlich vielen Punkten, so bedeute $(V_n \mid V_r V_s)$ die Schnittzahl von $(V_n \mid V_r)$ und $(V_n \mid V_s)$ auf V_n.

2.2. Schnittzahlen auf N_5

2.2.1. Wir geben zunächst die Parameterdarstellungen I und II für N_5 noch einmal an (vgl. [5]).

Darstellung I. ($p_1 = 1$, $l_3 = 1$, $\tilde{s}_2^P = 1$, $\tilde{s}_1^L = 1$)

$$\begin{aligned}
\big((p)\big) &= \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & mb + c^2 & mbd + ce \\ e & mbd + ce & mb^2 + mbd^2 + e^2 \end{pmatrix}, \\
\big((l)\big) &= \begin{pmatrix} mb^2 + bc^2 + (cd - e)^2 & -bc - d(cd - e) & cd - e \\ -bc - d(cd - e) & b + d^2 & -d \\ cd - e & -d & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\tilde{s}_j^L$ — Koeffizienten der zugeordneten Form $\tilde{F}^L = \tilde{F}^L(\tilde{q}_{ik}, \tilde{r}_{ik})$, die sich aus

$$\begin{aligned}
&Q_{26}^4 + mQ_{26}^2 Q_{56}^2 + m^2 b Q_{56}^2 (Q_{25}^2 + Q_{46}^2 - 2Q_{26}Q_{16} - 2Q_{26}Q_{45} + 2Q_{25}Q_{46}) \\
&+ m^3 b^2 Q_{56}^2 (Q_{16}^2 + Q_{45}^2 - 2Q_{15}Q_{25} - 2Q_{15}Q_{46} + 2Q_{16}Q_{45}) \\
&+ m^4 b^3 Q_{56}^2 Q_{15}^2 + mb(R^L)
\end{aligned}$$

durch Einsetzen gemäß [5], Formeln (7.4) und (7.2), ergibt;

$\tilde{s}_j^P$ — Koeffizienten der zugeordneten Form $\tilde{F}^P = \tilde{F}^P(\tilde{u}_{ik}, \tilde{v}_{ik})$, die sich aus

$$\begin{aligned} mU_{24}^4 &+ U_{24}^2U_{45}^2 + bU_{45}^2(U_{25}^2 + U_{46}^2 - 2U_{24}U_{34} + 2U_{24}U_{56} - 2U_{25}U_{46}) \\ &+ b^2U_{45}^2(U_{34}^2 + U_{56}^2 - 2U_{25}U_{35} + 2U_{35}U_{46} - 2U_{34}U_{56}) \\ &+ b^3U_{45}^2U_{35}^2 + mb(R) \end{aligned}$$

durch Einsetzen gemäß [5], Formeln (6.1) und (4.2), ergibt.

Darstellung II. ($p_1 = 1, l_3 = 1, \tilde{s}_1^P = 1, \tilde{s}_2^L = 1$)

$$\begin{aligned} ((p)) &= \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & a + c^2 & ad + ce \\ e & ad + ce & na^2 + ad^2 + e^2 \end{pmatrix}, \\ ((l)) &= \begin{pmatrix} na^2 + nac^2 + (cd - e)^2 & -nac - d(cd - e) & cd - e \\ -nac - d(cd - e) & na + d^2 & -d \\ cd - e & -d & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\tilde{s}_j^L$ — Koeffizienten der zugeordneten Form $\tilde{F}^L = \tilde{F}^L(\tilde{q}_{ik}, \tilde{r}_{ik})$, die sich aus

$$\begin{aligned} nQ_{26}^4 &+ Q_{26}^2Q_{56}^2 + aQ_{56}^2(Q_{25}^2 + Q_{46}^2 - 2Q_{26}Q_{16} - 2Q_{26}Q_{45} + 2Q_{25}Q_{46}) \\ &+ a^2Q_{56}^2(Q_{16}^2 + Q_{45}^2 - 2Q_{15}Q_{25} - 2Q_{15}Q_{46} + 2Q_{16}Q_{45}) \\ &+ a^3Q_{56}^2Q_{15}^2 + na(R^L) \end{aligned}$$

durch Einsetzen gemäß [5], Formeln (7.4) und (7.2), ergibt;

$\tilde{s}_j^P$ — Koeffizienten der zugeordneten Form $\tilde{F}^P = \tilde{F}^P(\tilde{u}_{ik}, \tilde{v}_{ik})$, die sich aus

$$\begin{aligned} U_{24}^4 &+ nU_{24}^2U_{45}^2 + n^2aU_{45}^2(U_{25}^2 + U_{46}^2 - 2U_{24}U_{34} + 2U_{24}U_{56} - 2U_{25}U_{46}) \\ &+ n^3a^2U_{45}^2(U_{34}^2 + U_{56}^2 - 2U_{25}U_{35} + 2U_{35}U_{46} - 2U_{34}U_{56}) \\ &+ n^4a^3U_{45}^2U_{35}^2 + na(R) \end{aligned}$$

durch Einsetzen gemäß [5], Formeln (6.1) und (4.2), ergibt.

2.2.2. $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}B)$ sei die Varietät aller derjenigen p^{T}-Ausartungen, für die die (zerfallende) Form $(w_1w_2w_3)\,((l))\,(w_1w_2w_3)^{\mathsf{T}}$ einen festen Linearfaktor abspaltet. Das ist die Varietät der p^{T}-Ausartungen, für die einer der beiden Trägerpunkte der Tangentenbüschel fest ist. Sie ist durch die Gleichungen, die sich aus dem allgemeinen Punkt von $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}})$ (vgl. [5], Abschnitt 9.1) ergeben, und drei lineare Gleichungen in den l_i beschreibbar. Der feste Trägerpunkt sei nun speziell $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$; dann spaltet der Faktor w_3 ab, und die drei Gleichungen in den l_i lauten $l_1 = l_2 = l_4 = 0$. Wir wählen außerdem $(N \mid L)$ speziell so, daß die Gerade $x_2 + 2x_3 = 0$, d. h. $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, 2)$, von allen Kegelschnitten von $(N \mid L)$ berührt wird; das bedeutet $l_2 + 4l_3 + 4l_6 = 0$. Die Varietät $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}BL)$ ist nun durch die Gleichungen

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_4 = 0, \quad l_3 + l_6 = 0 \tag{2.4}$$

beschrieben; (2.4) wird nur von p^{T}-Ausartungen, aber von keiner p-l-Ausartung erfüllt.

Mit dieser Varietät schneiden wir nun jede der vierdimensionalen Untervarietäten $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$, $(N \mid \tilde{S}^P)$. Zur Schnittzahlberechnung benutzen wir Parameterdarstellung I, (2.2). Es gibt nur einen p-l-s-Kegelschnitt von $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}BL)$, der von Darstellung I nicht erfaßt wird, nämlich der durch $((p))$ und $((l))$ bestimmte Kegelschnitt mit $x_2^2 = 0$, $w_1w_3 = 0$. Dieser wird von $(N \mid P)$ bzw. $(N \mid L)$ bzw.

$(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ bzw. $(N \mid \tilde{S}^P)$ nicht getroffen.[1]) Für die Parameter m, b, c, d, e folgen aus (2.4) die Gleichungen

$$m = 0, \quad b = -1, \quad d = 1, \quad e = 0. \tag{2.5}$$

Damit geschnitten führen $(N \mid P)$ zu einer quadratischen Gleichung in c (vgl. $\big((p)\big)$ in (2.2)), $(N \mid L)$ zu einer linearen Gleichung in c (vgl. $\big((l)\big)$ in (2.2)), und $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$ bedeutet $b = 0$ (vgl. [5], 9.1). Somit gilt

$$\begin{aligned}
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}BLP) = 2,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}BLL) = 1,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}BLP_{(1)}L_{(1)}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Um mit $(N \mid \tilde{S}^P)$ zu schneiden, denken wir uns die zugeordnete Form $\tilde{F}^P$ für Darstellung I aufgeschrieben und (2.5) in die Koeffizienten $\tilde{s}_j^P$ eingesetzt. Wir berechnen $\tilde{F}^P$, wie in [5] angegeben (vgl. (2.2)), und erhalten unter Berücksichtigung von (2.5) zunächst

$$\begin{aligned}
F^P = {}& [\mathring{U}_{45} + c\mathring{U}_{46} + 2c\mathring{U}_{25} + 2c^2\mathring{U}_{26}]^2 \cdot \mathring{U}_{24} \cdot [(\mathring{U}_{24} + 2\mathring{U}_{25} + 4\mathring{U}_{34}\\
&+ 8\mathring{U}_{35} - 2\mathring{U}_{46} - 4\mathring{U}_{56}) + c(8\mathring{U}_{36} - 8\mathring{U}_{23} - 2\mathring{U}_{26})]
\end{aligned}$$

und sodann

$$\tilde{F}^P = 8c^{17}(\tilde{U}^{12}_{24})\,(\tilde{U}^{23}_{26})\,(\tilde{U}^{24}_{26})^2 + \cdots + (\tilde{U}^{12}_{14})^2\,(\tilde{U}^{14}_{15})^2.$$

Dabei ist $\mathring{U}_{kl} = u_k v_l - u_l v_k$ bzw. $\tilde{U}^{ij}_{\mu\nu} = \tilde{u}_{ij}\tilde{v}_{\mu\nu} - \tilde{u}_{\mu\nu}\tilde{v}_{ij}$ in den Unbestimmten u_i, v_i bzw. $\tilde{u}_{ik}, \tilde{v}_{ik}$. Also bedeutet $(N \mid \tilde{S}^P)$ zusammen mit (2.5) eine Gleichung vom Grade 17 in c, d. h.

$$(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}BL\tilde{S}^P) = 17. \tag{2.7}$$

2.2.3. Dual zu $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}BL)$ aus 2.2.2 sei $(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}GP)$ die Varietät, die durch

$$p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_6 = 0, \quad p_1 - p_4 = 0$$

beschrieben wird. Sie besteht aus allen denjenigen l^{T}-Ausartungen, für die eine der beiden Geraden, und zwar die Gerade $x_1 = 0$, fest ist und die außerdem durch den Punkt $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$ gehen. In der Parameterdarstellung II (2.3) bedeutet dies $n = 0$, $a = -1$, $c = 1$, $d = e$. Unter diesen Bedingungen ergeben sich die $\tilde{s}_j^P$ aus $\tilde{F}^P = e^{16}(\tilde{U}^{15}_{35})^4 + \cdots + (\tilde{U}^{12}_{14})^4$.
Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}GPP) = 1,\\
&(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}GPL) = 2,\\
&(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}GPP_{(1)}L_{(1)}) = 0,\\
&(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}GP\tilde{S}^P) = 16.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.4. Schließlich sollen $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$, $(N \mid \tilde{S}^P)$ mit einer Untervarietät $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L)$ zum Schnitt gebracht werden. $P^{\mathsf{T}}_{(1)}$ bedeutet $\big((p)\big) = \big((w_i w_k)\big)$. Die beiden linearen Gleichungen in w_i seien speziell gewählt, nämlich $w_2 = w_3 = 0$. Dann ist $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2)$ beschreibbar durch die Gleichungen, die sich aus dem allgemeinen Punkt von $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)})$ (vgl. [5], 9.1) ergeben, und durch $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0$. Außerdem werde $(N \mid L)$ speziell gewählt als $l_2 = 0$. Dann besteht

[1]) Ähnliche Überlegungen werden bei allen folgenden Schnittbetrachtungen angestellt, ohne jeweils aufgeschrieben zu werden.

$(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L)$ aus den p^{T}-Ausartungen, die punktgeometrisch gleich der Doppelgeraden $x_1^2 = 0$ sind und die Gerade $x_2 = 0$ berühren, also einen der beiden Trägerpunkte der Tangentenbüschel in $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ haben.
Wir ziehen nun Parameterdarstellung I heran. Hier bedeutet $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)})$, daß $m = 0$ ist (vgl. [5], 9.1), und $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0$, $l_2 = 0$ führen dann zu $c = 0$, $e = 0$, $b + d^2 = 0$. Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergeben sich die $\tilde{s}_i^P$ aus

$$\tilde{F}^P = 8d^3(\tilde{U}^{12}_{14})(\tilde{U}^{13}_{15})(\tilde{U}^{14}_{15})^2 + \cdots + (\tilde{U}^{12}_{14})^2(\tilde{U}^{14}_{15})^2.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L P) = 0, \\ &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L L) = 1, \\ &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L P_{(1)} L_{(1)}) = 2, \\ &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L \tilde{S}^P) = 3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2.5. Als nächste finden wir die zwölf in einer Tabelle zusammengefaßten Schnittzahlen. $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L)$ kann wie in 2.2.4 angenommen werden, $(N \mid P^4)$ und $(N \mid L^4)$ können allgemein bleiben.

$N \mid$	P	L	$P_{(1)}L_{(1)}$	$L^{\mathsf{T}}_{(1)}$
P^4	1	2	0	3
L^4	2	1	0	0
$P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L$	0	1	2	0

(2.10)

In Zeile 3 sind die ersten drei Zahlen aus (2.9) bekannt, die letzte folgt aus [5], 8.1. Die anderen Schnittzahlen dieser Tabelle können leicht über Parameterdarstellung II oder zum größten Teil auch durch Projektion auf M_5 gewonnen werden.

2.2.6. Für die Bestimmung der folgenden Schnittzahlen beachte man: $(N \mid P_{(1)} L_{(1)})$ bedeutet $b = 0$ in Parameterdarstellung I, damit sind

$$\big((p)\big) = \begin{pmatrix} 1 & c & e \\ c & c^2 & ce \\ e & ce & e^2 \end{pmatrix},$$

$$\big((l)\big) = \begin{pmatrix} (cd - e)^2 & -d(cd - e) & cd - e \\ -d(cd - e) & d^2 & -d \\ cd - e & -d & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist W bzw. X bzw. P bzw. L eine allgemeine lineare Gleichung in c, e, 1 bzw. in $cd - e$, d, 1 bzw. in den p_i bzw. in den l_i der hier angegebenen Matrizen $\big((p)\big)$, $\big((l)\big)$; $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)})$ wird durch $m = 0$ beschrieben, und $\tilde{S}^P$ bedeutet hier $m = \text{const}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} &(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W P^2 L) = 0, \\ &(N \mid P_{(1)} L_{(1)} X P^2 L) = 0, \\ &(N \mid P_{(1)} L_{(1)} P^2 L \tilde{S}^P) = 8, \\ &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} P^2 L^2) = 4, \\ &(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W P^2 L) = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

und

$$\begin{aligned}
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WL^2\tilde{S}^p) = 4,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}XL^2\tilde{S}^p) = 0,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2L^2) = 0,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WXL^2) = 0,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}WL^3) = 3,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L^2) = 1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WP^2\tilde{S}^p) = 0,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}XP^2\tilde{S}^p) = 4,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2P^2) = 0,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WXP^2) = 0,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}WP^2L) = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2P\tilde{S}^p) = 0,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WXP\tilde{S}^p) = 2,\\
&(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2XP) = 0,\\
&(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2PL) = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

2.3. Schnittzahlen auf M_5

Der Verwendung in Abschnitt 3.3 angepaßt geben wir die Schnittzahlen in Tabellen geordnet an.

2.3.1. Es gilt:

$M \mid$	$P_{(1)}P$	P^2	$P_{(1)}W$	$P_{(1)}L$
$L_{(1)}X^2$	2	1	1	0
$L_{(1)}XP$	4	3	2	4
$L_{(1)}P^2$	0	3	0	8

(2.15)

Wir ziehen hierzu Parameterdarstellung (2.1) für M_5 heran. $(M \mid L_{(1)}X^2)$ bedeutet dort $b = 0$ und $d = \varrho_0$, $e = cd + \varrho_1$ mit unbestimmten ϱ_i. Dann führt $(M \mid P_{(1)}P)$ mit $a = 0$ und einer linearen Gleichung in den sich ergebenden p_i zu zwei einfachen Schnittpunkten; $(M \mid P^2)$ liefert mit zwei linearen Gleichungen in den sich ergebenden p_i einen einfachen Schnittpunkt, ebenso $(M \mid P_{(1)}W)$ mit $a = 0$ und $c = \tau_1 e + \tau_0$ mit unbestimmten τ_i. Schließlich kommt man mit $(M \mid P_{(1)}L)$ neben $a = 0$ zu einer Gleichung in den vorgegebenen ϱ_i, also zur Schnittzahl $(M \mid L_{(1)}X^2P_{(1)}L) = 0$. Auf ähnliche Weise erhalten wir die Zahlen in den beiden anderen Zeilen der Tabelle.

2.3.2. Wir finden bei analogem Vorgehen die folgenden Schnittzahlen:

$M \mid$	P^3	$P_{(1)}W^2$	$P_{(1)}WL$	$P_{(1)}L^2$	$P_{(1)}WP$
L^2	4	1	3	3	2
$L_{(1)}X$	3	1	2	0	2
$L_{(1)}P$	3	0	4	8	0

(2.16)

Mehrere Schnittzahlen von (2.16) sind dual zu denen von (2.15). $(M \mid L^2P^3)$ und $(M \mid L_{(1)}P^4)$ kann man sofort durch Projektion von M_5 auf P_5 erhalten.

2.3.3. Entsprechend erhalten wir noch

$M \mid$	P^4	$P_{(1)}W^2L$	$P_{(1)}WL^2$	$L_{(1)}X^2P$	$\widehat{PL}^2$
P	1	0	2	1	1
L	2	1	3	0	1

(2.17)

sowie

$M \mid$	L	P	$P_{(1)}$
P^4	2	1	0
L^4	1	2	3

(2.18)

3. Homologiegruppen

3.1. Vorbereitungen

3.1.1. Wir wollen die Homologiegruppen von M_5 (vgl. [3]) und N_5 bestimmen. Zur Berechnung benötigen wir die Homologiegruppen von komplexen projektiven Räumen und von den Untervarietäten der p-l-Ausartungen $(M \mid P_{(1)}L_{(1)})$ und $(N \mid P_{(1)}L_{(1)})$. Alle auftretenden Räume sind als komplexe projektive algebraische Mengen endlich triangulierbar (vgl. [8]) bzw. endliche Zellkomplexe. Wir betrachten die dort eindeutig bestimmte *Homologietheorie mit ganzzahliger Koeffizientengruppe* $\boldsymbol{Z}$.

3.1.2. Für die *Homologiegruppen komplexer projektiver Räume* P_n gilt (vgl. [12, 7]):

$$\boldsymbol{H}_r P_n = \begin{cases} \boldsymbol{Z}, & r \text{ gerade und } 0 \leqq r \leqq 2n, \\ 0, & r \text{ sonst}, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{H}_r(P_n, P_m) = \begin{cases} \boldsymbol{Z}, & r \text{ gerade und } 2m < r \leqq 2n, \\ 0, & r \text{ sonst}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Jeder P_m mit $i\colon P_m \subseteqq P_n$ ist Basisrepräsentant für

$$\boldsymbol{H}_{2m} P_n = \boldsymbol{Z} \quad \text{für} \quad 0 \leqq m \leqq n. \tag{3.3}$$

Für eine Untervarietät V_m^d von P_n der Ordnung d gilt $V_m^d \sim d \cdot P_m$ bzw. mit

$$e\colon V_m^d \subset P_n \text{ ist } e_{2m} = d \cdot i_{2m}.^{1)} \tag{3.4}$$

3.1.3. Sind R, K, $\tilde{R}$, $\tilde{K}$ endliche Zellkomplexe und gibt es einen *Homöomorphismus* $f\colon R \setminus K \cong \tilde{R} \setminus \tilde{K}$, so existiert für alle r ein Isomorphismus (vgl. [2])[2])

$$f_r\colon \boldsymbol{H}_r(R, K) \cong \boldsymbol{H}_r(\tilde{R}, \tilde{K}). \tag{3.5}$$

3.1.4. $\mathscr{B}$ sei ein *Faserbündel* im Sinne des Koordinatenbündels von [10] mit E als Bündelraum, B als Basisraum, Y als Faser, der Projektion $f\colon E \to B$ und den Homöomorphismen

$$\Phi^m\colon U_m \times Y \cong f^{-1} U_m$$

mit $f\Phi^m(u, y) = u$ für $u \in U_m$, $y \in Y$, wobei $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine endliche offene Überdeckung von B ist.

Es seien weiter $B_h = B \setminus U_h$ $(h = 1, \ldots, n)$, $A_k = B \setminus \bigcup_{h=1}^{k} U_h = \bigcap_{h=1}^{k} B_h$, $A_n = \emptyset$ $(k = 1, \ldots, n)$ und $A_0 = B$.

1) $e_{2m}\colon \boldsymbol{H}_{2m} V_m^d \to \boldsymbol{H}_{2m} P_n$ und $i_{2m}\colon \boldsymbol{H}_{2m} P_m \to \boldsymbol{H}_{2m} P_n$ sind die durch die Inklusionen e und i induzierten Abbildungen der Homologiegruppen.

2) Für den hier nur nötigen Fall, daß f als stetige Abbildung auf ganz R ausgedehnt werden kann, ist der Satz schon in [6] bewiesen.

3.1.5. Sind die unter 3.1.4 aufgeführten abgeschlossenen Räume endliche Zellkomplexe und sind

1. $\boldsymbol{H}_r Y$ frei für alle r und
2. $\boldsymbol{H}_r Y = 0$ für r ungerade

und gibt es eine Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von B so, daß

3. $\boldsymbol{H}_r(A_{k-1}, A_k)$ frei für alle k und r und
4. $\boldsymbol{H}_r(A_{k-1}, A_k) = 0$ für alle k und r ungerade sind,

so sind die Homologiegruppen des Bündelraums isomorph zu denen des Produktraumes (vgl. [4]),

$$\boldsymbol{H}_r E \cong \bigoplus_{p+q=r} \boldsymbol{H}_p B \otimes \boldsymbol{H}_q Y. \tag{3.6}$$

3.1.6. Unter den Voraussetzungen von 3.1.5 ist $\boldsymbol{H}_r(A_{m-1}, A_m)$ isomorph zu einem direkten Summanden von $\boldsymbol{H}_r A_{m-1}$. Wir nennen B' einen zu $\boldsymbol{H}_r(A_{m-1}, A_m)$ gehörenden *Basisrepräsentanten* von $\boldsymbol{H}_r A_{m-1}$, wenn B' Basisrepräsentant eines direkten Summanden von $\boldsymbol{H}_r A_{m-1}$ ist, der bei dem Isomorphismus einem von Null verschiedenen Summanden von $\boldsymbol{H}_r(A_{m-1}, A_m)$ entspricht.
Ein Unterbündel $\mathscr{B}' = (E', B', Y', f')$ von $\mathscr{B}$ mit $B' \subset A_{m-1}$, $Y' \subset Y$ und $A'_k = B' \cap A_k$ möge ebenfalls die Voraussetzungen von 3.1.5 erfüllen.
Ist B' ein zu $\boldsymbol{H}_r(A_{m-1}, A_m)$ gehörender Basisrepräsentant von $\boldsymbol{H}_r A_{m-1}$ und Y' Basisrepräsentant von $\boldsymbol{H}_s Y$, so ist E' Basisrepräsentant von $\boldsymbol{H}_{r+s} E$ (vgl. [4]).

3.1.7. Sind $(V \mid C)$, $(V \mid C')$, $(V \mid D)$ Zyklen auf V und ist $(V \mid C) \sim (V \mid C')$ auf V,[1]) so gilt für die Schnitte auf V:

$$(V \mid C \cdot D) \sim (V \mid C' \cdot D) \qquad \text{(vgl. [12])},$$

wobei Schnittvielfachheiten entsprechend Abschnitt 2.1 zu berücksichtigen sind. Für nulldimensionale Schnitte folgt die Gleichheit der Schnittzahlen.

3.2. Die Homologiegruppen von $(M \mid P_{(1)} L_{(1)})$

3.2.1. Für die Punkte (p, l) von $V_3 = (M \mid P_{(1)} L_{(1)})$ gilt $\big((p)\big) = \big((w_i w_j)\big)$ und $\big((l)\big) = \big((x_i x_j)\big)$. Aus (1.1) folgt

$$\sum_{i=1}^{3} w_i x_i = 0. \tag{3.7}$$

Durch (3.7) wird V_3 als singularitätenfreie Varietät des Produktes $W_2 \times X_2$ der beiden komplexen projektiven Ebenen W_2 und X_2 beschrieben. V_3 ist Bündelraum eines Faserbündels über W_2 mit einer projektiven Geraden G_1 als Faser. Dies erkennt man durch Auflösung der linearen Gleichung (3.7) nach x_h. Eine zugehörige offene Überdeckung von W_2 wird beschrieben durch $w_h \neq 0$ $(h = 1, 2, 3)$. Die Räume B_h sind die durch $w_h = 0$ und A_k die durch $w_1 = 0, \ldots, w_k = 0$ gegebenen projektiven Räume. G_0 sei ein Punkt von G_1.

3.2.2. Auf Grund von (3.1) und (3.2) sind daher die Voraussetzungen für 3.1.5 gegeben, und wegen $\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$ berechnet man

$$\boldsymbol{H}_r V_3 \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}, & r = 2, 4, \\ \boldsymbol{Z}, & r = 0, 6, \\ 0, & r \text{ sonst}. \end{cases} \tag{3.8}$$

[1]) $\sim$ heißt homolog.

Nach 3.1.6 ergeben sich mit $E = V_3$, $B = W_2$, $Y = G_1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{bei } E' = (V \mid W),\ B' = A_1,\ Y' = Y \\ \text{der Basisrepräsentant } (V \mid W) \text{ von } \boldsymbol{H}_4 V_3, \\ \text{bei } E' = (V \mid X),\ B' = A_0 = W_2,\ Y' = G_0 \\ \text{der Basisrepräsentant } (V \mid X) \text{ von } \boldsymbol{H}_4 V_3; \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{bei } E' = (V \mid WX),\ B' = A_1,\ Y' = G_0 \\ \text{der Basisrepräsentant } (V \mid WX) \text{ von } \boldsymbol{H}_2 V_3, \\ \text{bei } E' = (V \mid W^2),\ B' = A_2,\ Y' = Y \\ \text{der Basisrepräsentant } (V \mid W^2) \text{ von } \boldsymbol{H}_2 V_3.^{1)} \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Es gibt ganze Zahlen λ und μ, so daß $(V \mid X^2) \sim \lambda(V \mid WX) + \mu(V \mid W^2)$ ist. Durch Schnitte mit $(V \mid X)$ und $(V \mid W)$ erhält man unter Verwendung von $(V \mid W^2X) = (V \mid WX^2)$ und $(V \mid W^3) = (V \mid X^3) = 0$ die Homologiebeziehung

$$(V \mid WX) \sim (V \mid W^2) + (V \mid X^2). \tag{3.11}$$

Also ist auch $(V \mid W^2)$, $(V \mid X^2)$ eine Basis für $\boldsymbol{H}_2 V_3$.

3.3. Die Homologiegruppen von M_5

3.3.1. Die Homologiegruppen von M_5 und Basiselemente davon sind bekannt (vgl. [9, 13, 3]). Sie seien hier nochmal unter etwas anderen Gesichtspunkten hergeleitet.

3.3.2. Die birationale Abbildung $\chi\colon M_5 \to P_5$ zwischen M_5 und P_5 ist auf $M_5 \setminus (M \mid P_{(1)})$ und $P_5 \setminus (P \mid P_{(1)})$ biregulär. Dort ist χ ein Homöomorphismus, und nach 3.1.3 gibt es für alle r einen Isomorphismus

$$\chi_r\colon \boldsymbol{H}_r\big(M_5, (M \mid P_{(1)})\big) \cong \boldsymbol{H}_r\big(P_5, (P \mid P_{(1)})\big). \tag{3.12}$$

Die relativen Homologiegruppen berechnen wir über die zugehörige exakte Homologiesequenz aus $\boldsymbol{H}_r P_5$ und $\boldsymbol{H}_r P_{(1)}$.
$P_{(1)}$ ist die Veronesesche Fläche. Sie ist biregulär zur projektiven Ebene W_2, also $\boldsymbol{H}_r P_{(1)} \cong \boldsymbol{H}_r W_2$. $P_{(1)}$ hat die Ordnung 4. Auf ihr gibt es Kurven der Ordnung 2. Aus (3.1) und (3.4) erhält man dann

$$\boldsymbol{H}_r(P_5, P_{(1)}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 6, 8, 10, \\ \boldsymbol{Z}_4 & \text{für } r = 4, \\ \boldsymbol{Z}_2 & \text{für } r = 2, \\ 0 & \quad r \text{ sonst}. \end{cases} \tag{3.13}$$

3.3.3. Aus (1.1) folgen für $Q_4 = (M \mid P_{(1)})$ die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3} w_i l_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.14}$$

im Raum $W_2 \times L_5$.
$(M \mid P_{(1)})$ ist daher Bündelraum eines Faserbündels über W_2 mit einer zweidimensionalen projektiven Ebene Y_2 als Faser. Eine geeignete offene Überdeckung von W_2 und Räume B_h, A_k werden wie in 3.2.1 beschrieben.

---

1) $(V \mid W^\nu)$ bedeutet die Untermenge von V, die durch ν allgemeine lineare Gleichungen in den w_i gegeben ist.

3.3.4. Zur Bestimmung von $\boldsymbol{H}_r Q_4$ und ihrer Basisrepräsentanten gehen wir wie in 3.2.2 vor, und es ergeben sich

$$\boldsymbol{H}_r Q_4 = \boldsymbol{H}_r(M \mid P_{(1)}) \cong \begin{cases} \overset{\alpha}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \begin{array}{ll} \alpha = 3, & r = 4, \\ \alpha = 2, & r = 2, 6, \\ \alpha = 1, & r = 0, 8, \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.15}$$

und Basisrepräsentanten

$$\begin{array}{ll} (Q \mid W), (Q \mid L) & \text{für } r = 6, \\ (Q \mid W^2), (Q \mid WL), (Q \mid L^2) & \text{für } r = 4, \\ (Q \mid WL^2), (Q \mid W^2L) & \text{für } r = 2. \end{array} \tag{3.16}$$

3.3.5. Aus der exakten Homologiesequenz für das Paar $\big(M_5, (M \mid P_{(1)})\big)$ folgen wegen (3.13) und (3.15) zunächst nur

$$\boldsymbol{H}_r M_5 = \begin{cases} \overset{\alpha}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \begin{array}{ll} \alpha = 3, & r = 6, \\ \alpha = 2, & r = 8, \\ \alpha = 1, & r = 10, 0, \end{array} \\ 0 & r \neq 0, 2, 4, 6, 8, 10, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{H}_4 M_5 / \boldsymbol{H}_4(M \mid P_{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}_4, \quad \boldsymbol{H}_2 M_5 / \boldsymbol{H}_2(M \mid P_{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}_2,$$

und wegen (3.3) und (3.16) die Repräsentanten

$(M \mid P)$, $(M \mid P_{(1)})$ für $r = 8$,

$(M \mid P^2)$, $(M \mid P_{(1)}W)$, $(M \mid P_{(1)}L)$ für $r = 6$,

$(M \mid P^3)$, $(M \mid P_{(1)}W^2)$, $(M \mid P_{(1)}WL)$, $(M \mid P_{(1)}L^2)$ und eine Relation

$$4(M \mid P^3) \sim \omega_1(M \mid P_{(1)}W^2) + \omega_2(M \mid P_{(1)}WL) + \omega_3(M \mid P_{(1)}L^2) \tag{3.18}$$

für $r = 4$,

$(M \mid P^4)$, $(M \mid P_{(1)}W^2L)$, $(M \mid P_{(1)}WL^2)$ und eine Relation

$2(M \mid P^4) \sim \overline{\omega}_1(M \mid P_{(1)}W^2L) + \overline{\omega}_2(M \mid P_{(1)}WL^2)$ für $r = 2$.

Die ω_i, $\overline{\omega}_i$ bzw. die Gruppen $\boldsymbol{H}_4 M_5$ und $\boldsymbol{H}_2 M_5$ sind noch zu bestimmen.

3.3.6. Durch Schnitte erhält man über (2.16) bzw. (2.17) die in (3.18) angegebenen Relationen

$$4(M \mid P^3) \sim 10(M \mid P_{(1)}W^2) + (M \mid P_{(1)}WL) + (M \mid P_{(1)}L^2) \tag{3.19}$$

bzw.

$$2(M \mid P^4) \sim (M \mid P_{(1)}W^2L) + (M \mid P_{(1)}WL^2). \tag{3.20}$$

Also bilden

$$(M \mid P^3), (M \mid P_{(1)}W^2), (M \mid P_{(1)}WL) \quad \text{für } r = 4 \tag{3.21}$$

bzw.

$$(M \mid P^4), (M \mid P_{(1)}W^2L) \quad \text{für } r = 2 \tag{3.22}$$

eine Basis, und es ist

$$\boldsymbol{H}_4 M_5 = \overset{3}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{H}_2 M_5 = \overset{2}{\bigoplus} \boldsymbol{Z}.^{1)} \tag{3.23}$$

[1]) Dieses Ergebnis folgt auch auf Grund der Dualitätssätze aus (3.17), da M_5 singularitätenfrei ist.

3.3.7. Wir wollen noch andere Basen angeben (vgl. [9, 13]). Wegen (3.18) gibt es $\lambda, \mu \in \boldsymbol{Z}$ so, daß $(M \mid L) \sim \lambda(M \mid P) + \mu(M \mid P_{(1)})$. Durch Schnitte mit $(M \mid P^4)$ und $(M \mid L^4)$ ergibt sich mit (2.18)

$$(M \mid L) \sim 2(M \mid P) - (M \mid P_{(1)}). \tag{3.24}$$

Dual dazu gilt

$$(M \mid P) \sim 2(M \mid L) - (M \mid L_{(1)}) \tag{3.25}$$

und damit auch

$$2(M \mid P_{(1)}) + (M \mid L_{(1)}) \sim 3(M \mid P), \tag{3.26}$$

$$(M \mid P_{(1)}) + 2(M \mid L_{(1)}) \sim 3(M \mid L). \tag{3.27}$$

Also sind auch $(M \mid P)$ und $(M \mid L)$ eine Basis für $\boldsymbol{H}_8 M_5$.

3.3.8. Ebenfalls durch Schnitte erhält man bei Benutzung von (2.15), daß

$$(M \mid P_{(1)}P) \sim 2(M \mid P_{(1)}W) \tag{3.28}$$

ist. Außerdem ist

$$(M \mid PL) \sim 2(M \mid \widehat{PL}) \qquad \text{(vgl. [9, 13])}. \tag{3.29}$$

Schneidet man nun (3.24) mit P und L und beachtet, daß $\boldsymbol{H}_6 M_5$ torsionsfrei ist, so erhält man

$$\begin{aligned} (M \mid \widehat{PL}) &\sim (M \mid P^2) - (M \mid P_{(1)}W), \\ (M \mid L^2) &\sim 4(M \mid P^2) - 4(M \mid P_{(1)}W) - (M \mid P_{(1)}L). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Also sind auch $(M \mid P^2)$, $(M \mid \widehat{PL})$, $(M \mid L^2)$ eine Basis für $\boldsymbol{H}_6 M_5$.

3.3.9. Für die Untermenge der p-l-Ausartungen erhält man durch Schnitt von (3.25) mit $P_{(1)}$

$$(M \mid P_{(1)}L_{(1)}) \sim 2[(M \mid P_{(1)}L) - (M \mid P_{(1)}W)] \tag{3.31}$$

bzw.

$$(M \mid P_{(1)}L_{(1)}) \sim 2[5(M \mid \widehat{PL}) - (M \mid P^2) - (M \mid L^2)]. \tag{3.32}$$

Durch Schneiden von $(M \mid P_{(1)}PW) \sim \nu_1(M \mid P^3) + \nu_2(M \mid P_{(1)}W^2) + \nu_3(M \mid P_{(1)}WL)$ erhält man mit in (2.16) angegebenen Schnittzahlen die Relation

$$(M \mid P_{(1)}PW) \sim 2(M \mid P_{(1)}W^2). \tag{3.33}$$

3.3.10. Für $r = 2$ seien noch die Basen

$$(M \mid P^4), \quad (M \mid \widehat{PL^2})\,^{1)} \tag{3.34}$$

und

$$(M \mid P_{(1)}W^2L), \quad (M \mid L_{(1)}X^2P) \tag{3.35}$$

angegeben, die man wieder mit Hilfe der Schnittzahlen (2.17) berechnen kann.[1)]

---

1) $\widehat{PL^2}$ = Büschelschar aller Kegelschnitte, die zwei Geraden in je einem festen Punkt berühren, $(M \mid \widehat{PL^2}) \sim (M \mid P^4) - (M \mid P_{(1)}W^2L)$.

3.3.11. **Satz 1.** *Die Homologiegruppen der Varietät M_5 der vollständigen Kegelschnitte (p-l-Kegelschnitte) sind*

$$H_r M_5 \cong \bigoplus^{\alpha} Z \quad mit \quad \alpha = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \; für \; r = \begin{Bmatrix} 4,\ 6 \\ 2,\ 8 \\ 0,\ 10 \\ \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Als Basen sind geeignet für

$r = 8$: $(M \mid P)$, $(M \mid P_{(1)})$ oder
$(M \mid P)'$, $(M \mid L)$,

$r = 6$: $(M \mid P^2)$, $(M \mid P_{(1)} W)$, $(M \mid P_{(1)} L)$ oder
$(M \mid P^2)$, $(M \mid \widehat{PL})$, $(M \mid L^2)$,

$r = 4$: $(M \mid P^3)$, $(M \mid P_{(1)} W^2)$, $(M \mid P_{(1)} WL)$,

$r = 2$: $(M \mid P^4)$, $(M \mid P_{(1)} W^2 L)$ oder
$(M \mid P^4)$, $(M \mid \widehat{PL^2})$ oder
$(M \mid P_{(1)} W^2 L)$, $(M \mid L_{(1)} X^2 P)$.

Bemerkung. Weitere Basen für $r = 2$ bzw. $r = 4$ werden in 4.1.3 bzw. 4.1.6 angegeben.

3.4. Die Homologiegruppen von $(N \mid P_{(1)} L_{(1)})$

3.4.1. In [5] wird gezeigt, daß sich bei Rang $\big((p)\big) = 1$ und Rang $\big((l)\big) = 1$ unter der Voraussetzung $w_i \neq 0$, $x_k \neq 0$ für ein Paar $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$, zwei der Koeffizienten $\bar{s}_j^P$ der zugeordneten Form frei wählen lassen — welche das sind, hängt von der Wahl von i, k ab —, die die in Abschnitt 1.6 erwähnte Gerade I_1 beschreiben. Die übrigen Koeffizienten $\bar{s}_j^P$ sind durch jene beiden und (p, l) eindeutig bestimmt. Für festgehaltenes Indexpaar i, k wird also die durch $x_k \neq 0$, $w_i \neq 0$ beschriebene Teilmenge von $(N \mid P_{(1)} L_{(1)})$ durch ein Produkt $V^{(i,k)} \times I_1$ angegeben mit

$$V^{(i,k)} = \{(w, x) \in V_3,\ w_i \neq 0,\ x_k \neq 0\}.$$

Daher ist $E_4 = (N \mid P_{(1)} L_{(1)})$ ein Faserbündel mit Basisraum V_3 und Faser I_1.
Die Räume B_h sind hier beschrieben durch $w_i x_k = 0$, etwa in der Reihenfolge $(i, k) = (i, 4 - j)$, wobei (i, j) lexikographisch geordnet seien. Das bedeutet

$$A_1 = (V \mid W) \cup (V \mid X),\ A_2 = (V \mid W),\ A_3 = (V \mid W^2) \cup (V \mid WX),$$
$$A_4 = (V \mid W^2),\ A_5 = (V \mid W^2 X),\ A_6 = \emptyset.$$

3.4.2. Um zu überprüfen, ob die Voraussetzungen für 3.1.5 erfüllt sind, betrachten wir die Folge der durch die entsprechenden Inklusionen induzierten Abbildungen:

$$\begin{array}{l} H(V \mid W^2X) \to H(V \mid W^2) \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\quad H(V \mid WX) \nearrow \end{array} H\big((V \mid W^2) \cup (V \mid WX)\big) \to$$
$$\begin{array}{l} \quad H(V \mid X) \searrow \\ \to H(V \mid W) \nearrow \end{array} H\big((V \mid W) \cup (V \mid X)\big) \to HV_3. \tag{3.36}$$

Die Basisrepräsentanten $V' = (V \mid W)$, $(V \mid X)$, $(V \mid WX)$ bzw. $(V \mid W^2)$ von $H_r V_3$ (siehe 3.2.2) induzieren durch die Einbettung in V_3 in ihren Dimensionen $r = 4$

bzw. 2 einen Isomorphismus von $\boldsymbol{H}_r V' = \boldsymbol{Z}$ auf einen direkten Summanden $\boldsymbol{Z}$ von $\boldsymbol{H}_r V_3$. Da außerdem $\boldsymbol{H}_r V' = \boldsymbol{0}$ für ungerade r ist, folgt aus (3.36), daß $\boldsymbol{H}_r(A_{k-1}, A_k)$ frei für alle k und $\boldsymbol{H}_r(A_{k-1}, A_k) = \boldsymbol{0}$ für r ungerade und alle k sind.
Aus (3.8) und (3.1) folgt dann nach 3.1.5

$$\boldsymbol{H}_r E_4 = \boldsymbol{H}_r(N \mid P_{(1)} L_{(1)}) \cong \begin{cases} \overset{\alpha}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ für } r = 0, 8, \\ \alpha = 3 \text{ für } r = 2, 6, \\ \alpha = 4 \text{ für } r = 4, \end{array} \\ \boldsymbol{0} & r \text{ sonst}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Entsprechend wie in 3.2.2 erhält man nach 3.1.6 folgende Basisrepräsentanten:

$$\begin{array}{ll} (E \mid W), (E \mid X), (E \mid \tilde{S}^p) & \text{für } r = 6, \\ (E \mid W^2), (E \mid WX), (E \mid W\tilde{S}^p), (E \mid X\tilde{S}^p) & \text{für } r = 4, \\ (E \mid W^2X), (E \mid W^2\tilde{S}^p), (E \mid WX\tilde{S}^p) & \text{für } r = 2. \end{array} \tag{3.38}$$

3.5. Die Homologiegruppen $\boldsymbol{H}_r(M_5, V_3)$

3.5.1. Mit Hilfe der Ergebnisse aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 bestimmen wir über die Homologiesequenz von (M_5, V_3) die Homologiegruppen $\boldsymbol{H}_r(M_5, V_3)$. Wir erhalten

$$\boldsymbol{H}_r(M_5, V_3) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & r = 10, \\ \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & r = 8, \\ \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}_2 & r = 6, \\ \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4 & r = 4, \\ \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 & r = 2, \\ \boldsymbol{0} & \text{sonst}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Repräsentanten ergeben sich aus den entsprechenden Repräsentanten von $\boldsymbol{H}_r M_5$ in Abschnitt 3.3. Für $r \neq 2, 4, 6$ ergibt sich (3.39) durch algebraische Betrachtungen in der Homologiesequenz. Zur Berechnung und Darstellung von $\boldsymbol{H}_r(M_5, V_3)$ für $r = 2, 4, 6$ beachte man noch folgendes:
Mit der in (3.18) angegebenen Basis für $\boldsymbol{H}_6 M_5$ bilden auch $(M \mid P^2)$, $(M \mid P_{(1)} W)$, $(M \mid P_{(1)} L) - (M \mid P_{(1)} W)$ eine solche. Aus (3.31) ergibt sich in $\boldsymbol{H}_6(M_5, V_3)$ eine Relation für die Bilder der Basiselemente von $\boldsymbol{H}_6 M_5$, woraus man erkennt, daß $\boldsymbol{H}_6(M_5, V_3)$ den direkten Summanden $\boldsymbol{Z}_2$ enthält.
Schneidet man (3.31) mit L, so erhält man

$$(M \mid P_{(1)} L_{(1)} L) \sim 2[(M \mid P_{(1)} L^2) - (M \mid P_{(1)} WL)]. \tag{3.40}$$

Dual zu (3.28) gilt aber $(M \mid L_{(1)} L) \sim 2(M \mid L_{(1)} X)$. In Verbindung mit (3.19) folgt dann wegen der Torsionsfreiheit von $\boldsymbol{H}_4 M_5$

$$(M \mid P_{(1)} L_{(1)} X) \sim 2[2(M \mid P^3) - 5(M \mid P_{(1)} W^2) - (M \mid P_{(1)} WL)]. \tag{3.41}$$

Schneidet man (3.31) mit P und verwendet man (3.28), (3.33) und die Torsionsfreiheit von $\boldsymbol{H}_4 M_5$, so erhält man

$$(M \mid P_{(1)} L_{(1)} W) \sim 2[(M \mid P_{(1)} WL) - (M \mid P_{(1)} W^2)]. \tag{3.42}$$

Aus (3.41), (3.42) ergibt sich

$$(M \mid P_{(1)} L_{(1)} X) - 5(M \mid P_{(1)} L_{(1)} W) \sim 4[(M \mid P^3) - 3(M \mid P_{(1)} WL)]. \tag{3.43}$$

Mit (3.21) bilden auch $(M \mid P^3) - 3(M \mid P_{(1)}WL)$, $(M \mid P_{(1)}W^2) - (M \mid P_{(1)}WL)$ und $(M \mid P_{(1)}WL)$ eine Basis für $\boldsymbol{H}_4M_5$. Für $\boldsymbol{H}_4V_3$ kann man von (3.9) ausgehend Basiselemente so wählen, daß diese auf $(M \mid P_{(1)}L_{(1)}W)$ und $(M \mid P_{(1)}L_{(1)}X) - 5(M \mid P_{(1)}L_{(1)}W)$ in $\boldsymbol{H}_4M_5$ abgebildet werden. Demzufolge führen die Relationen (3.42), (3.43) zu den direkten Summanden $\boldsymbol{Z}_2$ und $\boldsymbol{Z}_4$ von $\boldsymbol{H}_4(M_5, V_3)$.
Jeder der Zyklen $(M \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2)$ und $(M \mid P_{(1)}L_{(1)}WX)$ ist homolog zu einer Linearkombination $\nu_1(M \mid P^4) + \nu_2(M \mid P_{(1)}W^2L)$. Schneidet man jeweils mit P und mit L, so erhält man mit in Abschnitt 2.3 angegebenen Schnittzahlen

$$(M \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2) \sim 2(M \mid P_{(1)}W^2L) \tag{3.44}$$

und

$$(M \mid P_{(1)}L_{(1)}WX) \sim 2[(M \mid P^4) - (M \mid P_{(1)}W^2L)]. \tag{3.45}$$

Aus (3.44), (3.45) folgt $\boldsymbol{H}_2(M_5, V_3) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$.

3.5.2. Mit Hilfe der zu (3.44) dualen Formel kann man die Basis (3.35) für $\boldsymbol{H}_2M_5$ ebenfalls erhalten.

3.6. Die Homologiegruppen von N_5

3.6.1. Zur Berechnung der Homologiegruppen von N_5 verwenden wir die in Abschnitt 1.6 erwähnte birationale Abbildung Ψ, die außerhalb der p-l-Ausartungen ein Homöomorphismus ist. Nach 3.1.3 gibt es deshalb für alle r einen Isomorphismus

$$\Psi_r \colon \boldsymbol{H}_r(N_5, E_4) \cong \boldsymbol{H}_r(M_5, V_3). \tag{3.46}$$

Nach (3.39) sind also $\boldsymbol{H}_r(N_5, E_4)$ bekannt. Außerdem kennen wir $\boldsymbol{H}_rE_4$ aus (3.37). Über die Homologiesequenz von (N_5, E_4) berechnen wir $\boldsymbol{H}_rN_5$. Das ergibt zunächst durch allein algebraische Auswertung

$$\boldsymbol{H}_0N_5 = \boldsymbol{H}_{10}N_5 = \boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{H}_8N_5 = \overset{3}{\oplus}\boldsymbol{Z},$$
$$\boldsymbol{H}_rN_5 = 0, \quad r \neq 0, 2, 4, 6, 8, 10.$$

3.6.2. Für $r = 8$ erhält man als Basisrepräsentanten

$$(N \mid P), \quad (N \mid L), \quad (N \mid P_{(1)}L_{(1)}). \tag{3.47}$$

Es muß $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{Z}$ geben, so daß

$$(N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}}) \sim \alpha(N \mid P) + \beta(N \mid L) + \gamma(N \mid P_{(1)}L_{(1)}) \tag{3.48}$$

gilt. Durch Schnitte mit P^4, L^4 und $(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}W^2L)$ erhält man mit Hilfe der Schnittzahlen (2.10)

$$(N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}}) \sim -(N \mid P) + 2(N \mid L) - (N \mid P_{(1)}L_{(1)}). \tag{3.49}$$

Also bilden auch

$$(N \mid P), \quad (N \mid L), \quad (N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}}) \tag{3.50}$$

eine Basis. Dual dazu erhält man eine Basis

$$(N \mid P), \quad (N \mid L), \quad (N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}). \tag{3.51}$$

In [9] wird über $M_5 \setminus V_3$ eine Basis $(M \mid P)$, $(M \mid L)$, $(M \mid L_{(1)})$ angegeben, die wegen $\Psi(N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}}) = (M \mid L_{(1)})$ der Basis (3.50) entspricht. Durch (3.48) entsprechende

Ansätze erhält man aber auf N_5 durch Schnitte mit den in 2.2.2 bis 2.2.4 angegebenen Untervarietäten nach (2.6) bis (2.9)

$$(N \mid \tilde{S}^P) \sim 6(N \mid P) + 5(N \mid L) - (N \mid P_{(1)}L_{(1)})$$

und dual (3.52)

$$(N \mid \tilde{S}^L) \sim 5(N \mid P) + 6(N \mid L) - (N \mid P_{(1)}L_{(1)}),$$

so daß auch

$$(N \mid P), \quad (N \mid L), \quad (N \mid \tilde{S}^P)$$

bzw. (3.53)

$$(N \mid P), \quad (N \mid L), \quad (N \mid \tilde{S}^L)$$

Basen bilden.

3.6.3. Für $r = 6$ erfährt man aus der Homologiesequenz, wenn man (3.31), (3.38) beachtet, daß eine Relation

$$\omega_1(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W) + \omega_2(N \mid P_{(1)}L_{(1)}X) + \omega_3(N \mid P_{(1)}L_{(1)}\tilde{S}^P)$$
$$\sim 2[(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}L) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W)] \tag{3.54}$$

existieren muß. Durch den Schnitt mit P^2L erfährt man bei Verwendung der Schnittzahlen (2.11), daß $\omega_3 = 1$ ist.
Daraus folgt, daß

$$\boldsymbol{H}_6N_5 = \bigoplus^5 \boldsymbol{Z} \tag{3.55}$$

und

$$(N \mid P^2), \quad (N \mid L^2), \quad (N \mid \widehat{PL}), \quad (N \mid P_{(1)}L_{(1)}W), \quad (N \mid P_{(1)}L_{(1)}X) \tag{3.56}$$

eine Basis bilden.
Schneidet man (3.49) mit L und die zu (3.49) duale Formel mit P, so erhält man unter Beachtung der Relationen¹) $(N \mid PL) \sim 2(N \mid \widehat{PL})$, $(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}L) \sim 2(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}X)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}L) \sim 2(N \mid P_{(1)}L_{(1)}X)$ und der Torsionsfreiheit von $\boldsymbol{H}_6N_5$, daß auch

$$(N \mid P^2), \quad (N \mid L^2), \quad (N \mid \widehat{PL}), \quad (N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}X), \quad (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W) \tag{3.57}$$

eine Basis bilden.²)
Verfährt man entsprechend mit (3.52), so ergibt sich die Basis

$$(N \mid P^2), \quad (N \mid L^2), \quad (N \mid \widehat{PL}), \quad (N \mid \widehat{\tilde{S}^PP}), \quad (N \mid \widehat{\tilde{S}^LL}), \tag{3.58}$$

wobei $2(N \mid \widehat{\tilde{S}^PP}) \sim (N \mid \tilde{S}^PP)$, $2(N \mid \widehat{\tilde{S}^LL}) \sim (N \mid \tilde{S}^LL)$ gilt.

3.6.4. Für $r = 4$ ergeben sich entsprechend die Relationen

$$\nu_1(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W\tilde{S}^P) + \nu_2(N \mid P_{(1)}L_{(1)}X\tilde{S}^P) + \nu_3(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2)$$
$$+ \nu_4(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WX) \sim 2[(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}WL) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2)] \tag{3.59}$$

und

$$\mu_1(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W\tilde{S}^P) + \mu_2(N \mid P_{(1)}L_{(1)}X\tilde{S}^P) + \mu_3(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2)$$
$$+ \mu_4(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WX) \sim 4[(N \mid P^3) - 3(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}WL)]. \tag{3.60}$$

Schneidet man (3.59) mit L^2 bzw. (3.60) mit P^2, so ergibt sich bei Verwendung der Schnittzahlen (2.12) bzw. (2.13), daß $\nu_1 = 1$ bzw. $\mu_2 = 1$ ist. Schneidet man (3.59)

¹) Die man leicht wie (3.28) erhalten kann.
²) Siehe auch die Bedingungen, die in [9] über $M_5 \setminus V_3$ angegeben sind.

mit P^2, so erhält man $\nu_2 = 0$. Es ist also

$$\boldsymbol{H}_4 N_5 = \bigoplus^5 \boldsymbol{Z}, \tag{3.61}$$

und

$$\begin{aligned} &(N \mid P^3), \quad (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2), \quad (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} WL), \\ &(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2), \quad (N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX) \end{aligned} \tag{3.62}$$

ist eine Basis für $\boldsymbol{H}_4 N_5$.

3.6.5. Für $r = 2$ ergeben sich zwei Relationen

$$\begin{aligned} &\lambda_1(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 \tilde{S}^P) + \lambda_2(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX\tilde{S}^P) \\ &+ \lambda_3(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X) \sim 2[(N \mid P^4) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L)] \end{aligned} \tag{3.63}$$

und

$$\begin{aligned} &\varkappa_1(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 \tilde{S}^P) + \varkappa_2(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX\tilde{S}^P) \\ &+ \varkappa_3(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X) \sim 2(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Beim Schnitt von (3.63) mit P erhält man mit (2.14), daß $\lambda_2 = 1$ ist. Schließlich ergibt sich durch Schneiden von (3.64) mit P und mit L, daß $\varkappa_2 = 0$ und $\varkappa_1 = 1$ ist. Also ist

$$\boldsymbol{H}_2 N_5 = \bigoplus^3 \boldsymbol{Z}, \tag{3.65}$$

und

$$(N \mid P^4), \quad (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L), \quad (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X) \tag{3.66}$$

ist eine Basis für $\boldsymbol{H}_2 N_5$.

Mit Hilfe von Schnittzahlen gelangt man leicht zu der Relation

$$(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)} X^2 P) \sim (N \mid P^4) - 2(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X),$$

also ist auch

$$(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2 L), \quad (N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)} X^2 P), \quad (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2 X) \tag{3.67}$$

eine Basis für $\boldsymbol{H}_2 N_5$.

3.6.6. Satz 2. *Die Homologiegruppen der Varietät N_5 der p-l-s-Kegelschnitte sind*

$$\boldsymbol{H}_r N_5 \cong \bigoplus^{\alpha} \boldsymbol{Z} \quad \textit{mit} \quad \alpha = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \textit{für} \ r = \begin{Bmatrix} 4,\ 6 \\ 2,\ 8 \\ 0,\ 10 \\ \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Bemerkung. Die in 3.6.2 bis 3.6.5 angegebenen Basen werden zusammen mit weiteren Basen (s. 4.1.4 und 4.1.7) in Satz 3 zusammengestellt.

4. Charakteristiken und Schnittzahlformeln

4.1. Basen

4.1.1. Da das Basiselement $(M \mid P_{(1)})$ für $\boldsymbol{H}_8 M_5$ aus Ausartungen besteht, also die Gleichungen für $(M \mid P_{(1)})$ nicht allgemein genug sind, sind die Schnittzahlen $(M \mid C_1 P_{(1)})$ nicht für alle eindimensionalen Zyklen C_1 auf M_5 direkt bestimmbar. Deshalb ist es sinnvoll, $(M \mid P_{(1)})$ gemäß (3.24) in der Basis durch $(M \mid L)$ zu ersetzen.

Für $r = 8$ und $r = 6$ haben wir sowohl für $\boldsymbol{H}_r M_5$ als auch für $\boldsymbol{H}_r N_5$ in Satz 1 bzw. in (3.53) und (3.58) Basen angegeben, deren Elemente nicht nur aus Ausartungen bestehen. Für $r = 2$ und $r = 4$ sollen nun solche Basen gefunden werden.

4.1.2. Es sei K ein nicht ausgearteter p-Kegelschnitt und P ein Punkt von K. Durch die birationale Abbildung $\chi: M_5 \to P_5$ bzw. $\Psi: N_5 \to M_5$ ist zu K eindeutig ein p-l-Kegelschnitt bzw. ein p-l-s-Kegelschnitt bestimmt. Beide sollen auch mit K bezeichnet werden. Ebenso wollen wir von dem l-Kegelschnitt K sprechen.

Mit $(P_5 \mid \widehat{KP})$ bezeichnen wir die eindimensionale Varietät der p-Kegelschnitte, die K in P (im punktgeometrischen Sinn) superoskulieren. $(P_5 \mid \widehat{KP})$ ist durch einen allgemeinen Punkt (π) bestimmt; (π) ist ein allgemeiner, K in P vierfach schneidender p-Kegelschnitt. Man kann (π) als allgemeines Element einer Büschelschar, wie in Abschnitt 1.2 beschrieben wurde, erhalten. Die Gerade $(P_5 \mid \widehat{KP})$ ist eine p-Superoskulante von K und ist durch vier geeignete lineare Gleichungen in den p_i beschreibbar. Wir nennen $(P_5 \mid \widehat{KP})$ und auch den dieser Gerade im Graßmannraum G_{14} entsprechenden Punkt die p-Superoskulante von K in P. Es gilt

$$(P_5 \mid \widehat{KP}) \sim (P_5 \mid P^4),$$

und $(P_5 \mid \widehat{KP})$ kann als Basis von $\boldsymbol{H}_2 P_5$ gewählt werden.

4.1.3. Es seien (π, λ) der durch χ eindeutig zu dem nicht ausgearteten p-Kegelschnitt (π) bestimmte p-l-Kegelschnitt und $(M_5 \mid \widehat{KP})$ die Untervarietät von M_5, die durch den allgemeinen Punkt (π, λ) gegeben ist. Mit dem p-l-Kegelschnitt K hat (π, λ) den Punkt P und die Tangente T in P je vierfach gemeinsam. $(M \mid \widehat{KP})$ ist (neben den M_5 definierenden Gleichungen) durch die vier oben genannten Gleichungen in den p_i und weitere vier lineare Gleichungen in den l_i beschreibbar. Wir nennen $(M \mid \widehat{KP})$ die Varietät der K in P und T (im punkt-liniengeometrischen Sinn) *superoskulierenden* p-l-Kegelschnitte. Die Projektion von $(M \mid \widehat{KP})$ auf P_5 ist die p-Superoskulante $(P_5 \mid \widehat{KP})$, entsprechend nennen wir die Projektion auf L_5 die l-Superoskulante $(L_5 \mid \widehat{KT})$ von K in T. Damit, oder auch mit einer Schnittzahlberechnung wie in 2.3, erhält man die Schnittzahlen

$$(M \mid \widehat{KP}P) = 1, \quad (M \mid \widehat{KP}L) = 1. \tag{4.1}$$

Zusammen mit Schnittzahlen aus (2.17) findet man nun aus der Darstellung

$$(M \mid \widehat{KP}) \sim \mu_1(M \mid P^4) + \mu_2(M \mid P_{(1)}W^2L)$$

die Relation

$$(M \mid \widehat{KP}) \sim (M \mid P^4) - (M \mid P_{(1)}W^2L)$$

oder auch (s. Fußnote zu (3.34))

$$(M \mid \widehat{KP}) \sim (M \mid \widehat{PL^2}). \tag{4.2}$$

Damit kann man neben den in Satz 1 genannten Basen von $\boldsymbol{H}_r M_5$ für $r = 2$ auch die Basis $(M \mid P^4)$, $(M \mid \widehat{KP})$ angeben.

4.1.4. Schließlich sei $(\pi, \lambda, \bar{\sigma}^P, \bar{\sigma}^L)$ der durch Ψ eindeutig zu (π, λ) bestimmte p-l-s-Kegelschnitt und $(N_5 \mid \widehat{KP})$ die Untervarietät von N_5, die durch den allgemeinen Punkt $(\pi, \lambda, \bar{\sigma}^P, \bar{\sigma}^L)$ gegeben ist. Der p-l-s-Kegelschnitt $(\pi, \lambda, \bar{\sigma}^P, \bar{\sigma}^L)$ hat mit dem

p-l-s-Kegelschnitt K den Punkt P und die Tangente T je vierfach gemeinsam. Das drücken (neben den Gleichungen für N_5) die genannten linearen Gleichungen in den p_i und l_i aus. Er hat weiter mit K die p-Superoskulante $(P_5 \mid \widehat{KP})$ sowie die l-Superoskulante $(L_5 \mid \widehat{KT})$ gemeinsam. Dies wird ausgedrückt durch Gleichungen in den $\bar{s}_j^P$, die dafür bestehen, daß die Kurve der p-Superoskulanten von $(\pi, \lambda, \bar{\sigma}^P, \bar{\sigma}^L)$ — sie ist durch die zugeordnete Form $\bar{F}^P$ mit den Koeffizienten $\bar{\sigma}_j^P$ gegeben — die p-Superoskulante $(P_5 \mid \widehat{KP})$ von K in P (als Punkt im G_{14}) enthält, und durch entsprechende Gleichungen in den $\bar{s}_j^L$.

Wir wollen nun Homologierelationen aufstellen. Wie zu (4.1) finden wir

$$(N \mid \widehat{KP}P) = 1, \quad (N \mid \widehat{KP}L) = 1.$$

Weiter kann $(P_5 \mid \widehat{KP})$ bei keiner l^{T}-Ausartung als p-Superoskulante auftreten (vgl. [5], 8.1.2, 7.4.2 und 7.4.4.2), also ist $(N \mid \widehat{KP}L^{\mathsf{T}}_{(1)}) = 0$.

Mit weiteren Schnittzahlen auf N_5 (vgl. Abschnitt 2.2) erhalten wir über

$N \mid$	P^4	$P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L$	$P_{(1)}L_{(1)}W^2X$	$\widehat{PL^2}$	$\widehat{KP}$
P	1	0	0	1	1
L	2	1	0	1	1
$L^{\mathsf{T}}_{(1)}$	3	0	1	1	0

(4.3)

die Relationen

$$\begin{aligned}
&(N \mid \widehat{KP}) \sim (N \mid P^4) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L) - 3(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)\\
&(N \mid \widehat{PL^2}) \sim (N \mid P^4) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L) - 2(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)\\
&(N \mid \widehat{KP}) \sim (N \mid \widehat{PL^2}) - (N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Damit kann man neben den in (3.66) und (3.67) genannten Basen für $\boldsymbol{H}_2N_5$ auch die Basen

$$(N \mid P^4), \quad (N \mid \widehat{PL^2}), \quad (N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X) \tag{4.5}$$

sowie

$$(N \mid P^4), \quad (N \mid \widehat{PL^2}), \quad (N \mid \widehat{KP}) \tag{4.6}$$

angeben.

4.1.5. Es sei $(P_5 \mid E)$ eine Ebene in P_5, die durch eine allgemeine Gerade und einen Punkt von $(P_5 \mid P_{(1)})$ erzeugt wird. Ihr entspricht ein *Netz* von p-Kegelschnitten, das genau eine p-Ausartung enthält (vgl. [9]). Die Ebene $(P_5 \mid E)$ wird durch drei geeignete lineare Gleichungen in den p_i beschrieben. Es gilt $(P_5 \mid E) \sim (P_5 \mid P^3)$, und $(P_5 \mid E)$ kann als Basis von $\boldsymbol{H}_4P_5$ gewählt werden. Sei (π) ein allgemeiner Punkt von $(P_5 \mid E)$; der p-Kegelschnitt (π) zerfällt nicht.

4.1.6. Es sei (π, λ) der durch χ eindeutig zu (π) bestimmte p-l-Kegelschnitt und $(M_5 \mid E)$ die Untervarietät von M_5, die durch den allgemeinen Punkt (π, λ) gegeben ist. Die Schnitte $(M_5 \mid EP^2)$ und $(P_5 \mid EP^2)$ enthalten keine p-Ausartung, damit gilt $(M_5 \mid EP^2) = (P_5 \mid EP^2) = 1$. Die p-Ausartungen von $(M_5 \mid EP_{(1)})$ entsprechen bei χ der einzigen p-Ausartung von $(P_5 \mid E)$, also ist $(M_5 \mid EP_{(1)}W) = 0$. Um mit $(M_5 \mid L^2)$ zu schneiden, denken wir uns das Koordinatensystem in der Ebene X so gelegt, daß $(P_5 \mid E)$ durch die Gleichungen

$$p_4 = p_2, \quad p_5 = p_3, \quad p_6 = p_2 + p_3 \tag{4.7}$$

beschrieben wird. Hiermit erhalten wir (π, λ) in der Parameterdarstellung

$$((\pi)) = \begin{pmatrix} r & s & t \\ s & s & s+t \\ t & s+t & t \end{pmatrix},$$

$$((\lambda)) = \begin{pmatrix} -s^2 - st - t^2 & t^2 & s^2 \\ t^2 & rt - t^2 & st - rs - rt \\ s^2 & st - rs - rt & rs - s^2 \end{pmatrix}$$

und finden für $((\lambda))$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &l_1 l_3 + l_3 l_4 - l_5 l_6 - l_5^2 = 0, \\ &l_1 l_2 + l_2 l_5 - l_4 l_6 - l_4^2 = 0, \\ &l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_1 l_6 - l_4^2 - l_5^2 - l_4 l_5 = 0, \\ &l_1 + l_2 + l_3 + 2l_4 + 2l_5 + l_6 = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Man sieht nun, daß $(M_5 \mid EL^2)$ keinen Punkt mit $l_5 = 0$ enthält. Setzen wir dann $\lambda_5 = 1$ und stellen zwei allgemeine lineare Gleichungen in den λ_i auf, so ergibt sich nach dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen Vorgehen, $(M_5 \mid EL^2) = 3$. Zusammen mit Schnittzahlen aus Abschnitt 2.3 und Beachtung von $(M \mid P_{(1)}W) \sim (M \mid P^2) - (M \mid L^2) + (M \mid L_{(1)}X)$ finden wir die Tabelle

$M \mid$	P^3	$P_{(1)}W^2$	$P_{(1)}WL$	E
P^2	1	0	0	1
$P_{(1)}W$	0	0	-1	0
L^2	4	1	3	3

(4.9)

und damit

$$(M \mid E) \sim (M \mid P^3) - (M \mid P_{(1)}W^2). \tag{4.10}$$

Also kann man das Basiselement $(M \mid P_{(1)}W^2)$ von H_4M_5 durch $(M \mid E)$ ersetzen.
Mit bereits in Abschnitt 2.3 bestimmten Schnittzahlen und unter Verwendung von $(M \mid PL) \sim 2(M \mid \widehat{PL})$ finden wir

$$(M \mid L\widehat{PL}P^2) = 2, \quad (M \mid L\widehat{PL}P_{(1)}W) = 1, \quad (M \mid L\widehat{PL}L^2) = 1$$

und sodann

$$(M \mid L\widehat{PL}) \sim -2(M \mid P^3) - (M \mid P_{(1)}WL) + 4(M \mid E). \tag{4.11}$$

Aus (4.10) und (4.11) folgt: Neben der in Satz 1 angegebenen Basis von H_4M_5 ist auch $(M \mid P^3)$, $(M \mid E)$, $(M \mid L\widehat{PL})$ eine solche.
Wegen

$$(M \mid L_{(1)}X^2) \sim 2(M \mid P^3) - 3(M \mid E) + (M \mid L\widehat{PL}) \tag{4.12}$$

ist auch $(M \mid P^3)$, $(M \mid E)$, $(M \mid L_{(1)}X^2)$ eine Basis von H_4M_5 [9].
Übrigens sieht man daraus und aus (3.31), daß auch

$$(M \mid P_{(1)}W^2), \quad (M \mid P_{(1)}WL) \quad \text{und} \quad (M \mid L_{(1)}X^2)$$

eine Basis bilden.

4.1.7. Zum allgemeinen Punkt (π, λ) von $(M \mid E)$ ist durch Ψ eindeutig ein p-l-s-Kegelschnitt $(\pi, \lambda, \tilde{\sigma}^P, \tilde{\sigma}^L)$ bestimmt. Es sei $(N \mid E)$ die Untervarietät von N_5, die durch den allgemeinen Punkt $(\pi, \lambda, \tilde{\sigma}^P, \tilde{\sigma}^L)$ gegeben ist. Wir gehen nun von der Basis (3.62) für $\boldsymbol{H}_4 N_5$ aus. Um die α_i in der Relation

$$(N \mid E) \sim \alpha_1 (N \mid P^3) + \alpha_2 (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2) + \alpha_3 (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} WL) + \alpha_4 (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) + \alpha_5 (N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX)$$

zu finden, schneiden wir mit $(N \mid P^2)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W)$, $(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W)$, $(N \mid L^2)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} L)$. Die Schnittzahlen dieser Zyklen mit den Basiszyklen (3.62) können wir aus Abschnitt 2.2 erhalten. Die Schnittzahlen $(N \mid EP^2) = 1$ und $(N \mid EP^{\mathsf{T}}_{(1)} W) = 0$ findet man wie $(M \mid EP^2) = 1$ und $(M \mid EP_{(1)} W) = 0$ in 4.1.6. Entsprechend erhält man $(N \mid EP_{(1)} L_{(1)} W) = 0$. Da der Schnitt $(M \mid EL^2)$ keine p-l-Ausartungen enthält, ist $(N \mid EL^2) = (M \mid EL^2) = 3$. Schließlich findet man mit (4.7), (4.8) und Verwendung von (2.2) die Schnittzahl $(N \mid EP^{\mathsf{T}}_{(1)} L) = 1$. Dann folgt

$$(N \mid E) \sim (N \mid P^3) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2) - (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2). \tag{4.13}$$

Aus $(N \mid \widehat{PL}) \sim (N \mid P^2) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W) - (N \mid P_{(1)} L_{(1)} W)$ (vgl. die zu (3.57) führenden Überlegungen) erhält man durch Schnitt mit $(N \mid L) \sim 2(N \mid P) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}) - (N \mid P_{(1)} L_{(1)})$ (s. (3.49)) die Relation

$$(N \mid L\widehat{PL}) \sim 2(N \mid P^3) - 4(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2) - (N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} WL) - 4(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) - 2(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX). \tag{4.14}$$

Aus (3.52) und der zu (3.49) dualen Formel ensteht $(N \mid \tilde{S}^P) \sim 16(N \mid P) - 5(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)})$. Wir schneiden mit $(N \mid P^2)$, führen durch $(N \mid \tilde{S}^P P^2) = 4(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^P P^2}})$ den Zyklus $(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^P P^2}})$ ein und finden

$$(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^P P^2}}) \sim 4(N \mid P^3) - 5(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2) - 6(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2). \tag{4.15}$$

Für den entsprechend eingeführten Zyklus $(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^L L^2}})$ nennen wir zuletzt noch die Relation

$$(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^L L^2}}) \sim 11(N \mid P^3) - 19(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} W^2) - 7(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)} WL) - 18(N \mid P_{(1)} L_{(1)} W^2) - 15(N \mid P_{(1)} L_{(1)} WX). \tag{4.16}$$

Aus (4.13) bis (4.16) folgt, daß neben (3.62) auch $(N \mid P^3)$, $(N \mid E)$, $(N \mid L\widehat{PL})$, $(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^P P^2}})$, $(N \mid \widehat{\widehat{\tilde{S}^L L^2}})$ eine Basis für $\boldsymbol{H}_4 N_5$ bilden.

4.1.8. Wir stellen die Basen für die Homologiegruppen von N_5 zusammen.

Satz 3. *Basen für $\boldsymbol{H}_r N_5$ sind bei*

$r = 8$: $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid P_{(1)} L_{(1)})$;
oder $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)})$;
oder $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)})$;
oder $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid \tilde{S}^P)$;
oder $(N \mid P)$, $(N \mid L)$, $(N \mid \tilde{S}^L)$;

$r = 6$: $(N \mid P^2)$, $(N \mid \widehat{PL})$, $(N \mid L^2)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}X)$;

oder $(N \mid P^2)$, $(N \mid \widehat{PL})$, $(N \mid L^2)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W)$, $(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}X)$;

oder $(N \mid P^2)$, $(N \mid \widehat{PL})$, $(N \mid L^2)$, $(N \mid \widehat{S^PP})$, $(N \mid \widehat{S^LL})$;

$r = 4$: $(N \mid P^3)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}WL)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}WX)$;

oder $(N \mid P^3)$, $(N \mid E)$, $(N \mid L\widehat{PL})$, $(N \mid \widehat{\widehat{S^PP^2}})$, $(N \mid \widehat{\widehat{S^LL^2}})$;

$r = 2$: $(N \mid P^4)$, $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$;

oder $(N \mid P^{\mathsf{T}}_{(1)}W^2L)$, $(N \mid L^{\mathsf{T}}_{(1)}X^2P)$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$;

oder $(N \mid P^4)$, $(N \mid \widehat{PL^2})$, $(N \mid P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$;

oder $(N \mid P^4)$, $(N \mid \widehat{PL^2})$, $(N \mid \widehat{KP})$.

4.2. Schnittzahlformeln

4.2.1. Durch die Vorgabe einer Basis $(V_n \mid B_t^i)$, $i = 1, \ldots, \alpha$, ist für jeden t-Zyklus $(V_n \mid C_t)$ ein geordnetes α-Tupel von charakteristischen Zahlen vorgegeben, nämlich die Koeffizienten in der Basisdarstellung

$$(V_n \mid C_t) \sim \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_t^i (V_n \mid B_t^i). \tag{4.17}$$

Die Zyklen $(V_n \mid B_t^i)$ vertreten somit die klassischen *Charakteristiken* für die t-Zyklen.[1])

Die charakteristischen Zahlen λ_t^i lassen sich dadurch berechnen, daß man (4.17) mit α unabhängigen s-Zyklen, $s + t = n$, etwa mit einer Basis $(V_n \mid B_s^i)$, $i = 1, \ldots, \alpha$, schneidet und das Prinzip 3.1.7 verwendet.

In einer *Schnittzahlformel* wird die Schnittzahl zweier beliebiger Zyklen $(V_n \mid C_t)$ und $(V_n \mid D_s)$ auf V_n, $s + t = n$, auf den Schnitt dieser Zyklen mit festen Zyklen $(V_n \mid B_t^i)$ bzw. $(V_n \mid B_s^i)$ zurückgeführt. Man kann solche Schnittzahlformeln erhalten, indem man von einer Homologierelation (4.17) für $(V_n \mid C_t)$ und $(V_n \mid D_s)$ ausgeht und das Prinzip 3.1.7 verwendet.

4.2.2. Für $V_n = M_5$ und $t = 4$ folgt aus Satz 1

$$(M \mid C_4) \sim \lambda_4^1 (M \mid P) + \lambda_4^2 (M \mid L). \tag{4.18}$$

Durch Schnitte mit den Basen (3.34) bzw. (3.35) von $H_2 M_5$ [2]) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_4^1 &= 2(M \mid C_4\widehat{PL^2}) - (M \mid C_4P^4) = (M \mid C_4L_{(1)}X^2P), \\ \lambda_4^2 &= (M \mid C_4P^4) - (M \mid C_4\widehat{PL^2}) = (M \mid C_4P_{(1)}W^2L). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Schneiden wir mit einem 1-Zyklus $(M \mid C_1)$, d. h. $s = 1$, so ergibt sich die Schnittzahlformel

$$(M \mid C_1C_4) = \lambda_4^1 \varrho_1^1 + \lambda_4^2 \varrho_1^2 \tag{4.20}$$

mit

$$\varrho_1^1 = (M \mid C_1P) \quad \text{und} \quad \varrho_1^2 = (M \mid C_1L). \tag{4.21}$$

---

[1]) Dort heißt es $(n - t)$fache Bedingung [9, 12].

[2]) Es wird auf Schnittzahlen aus den Abschnitten 2, 3 und 4.1 zurückgegriffen.

Zu einer Formel (4.20) gelangt man selbstverständlich auch, wenn man von einer Basisdarstellung (3.34) bzw. (3.35) für ein $(M \mid C_1)$ ausgeht $(t = 1)$ und mit $(M \mid C_4)$ schneidet.

Durch Einsetzen von Basistransformationen kann man aus (4.20) weitere Schnittzahlformeln herleiten, etwa

$$(M \mid C_1C_4) = \lambda_1^1\varrho_4^1 + \lambda_1^2\varrho_4^2 \tag{4.22}$$

mit $\lambda_1^1 = (M \mid C_1P) - (M \mid C_1P_{(1)})$, $\lambda_1^2 = (M \mid C_1P_{(1)})$, $\varrho_4^1 = (M \mid C_4P^4)$, $\varrho_4^2 = (M \mid C_4\widehat{PL}^2)$.

Die Zahlen ϱ_1^i sind in (4.21) durch Schnitte von $(M \mid C_1)$ mit effektiven, nicht ausausgearteten[1]) Zyklen bestimmt. Die Zahlen λ_4^i sind nach (4.19) durch Schnitte mit effektiven Zyklen bestimmbar, allerdings für ausgeartete $(M \mid C_4)$ nicht direkt.

Bemerkung. Bei Verwendung der Basen $(M \mid P)$, $(M \mid L)$ für $t = 4$ und der Basen $(M \mid L_{(1)}X^2P)$, $(M \mid P_{(1)}W^2L)$ für $s = 1$ ergibt sich als Schnittzahlmatrix der Basiselemente die Einheitsmatrix.

4.2.3. Für $V_n = M_5$ und $t = 3$ folgt aus Satz 1 entsprechend

$$(M \mid C_3) \sim \lambda_3^1(M \mid P^2) + \lambda_3^2(M \mid \widehat{PL}) + \lambda_3^3(M \mid L^2). \tag{4.23}$$

mit $\lambda_3^1 = 2(M \mid C_3P^3) - 3(M \mid C_3E) + (M \mid C_3L\widehat{PL}) = (M \mid C_3L_{(1)}X^2)$,

$\lambda_3^2 = -5(M \mid C_3P^3) + 7(M \mid C_3E) - (M \mid C_3L\widehat{PL}) = (M \mid C_3P_{(1)}WL) - 3(M \mid C_3P_{(1)}W^2)$,

$\lambda_3^3 = (M \mid C_3P^3) - (M \mid C_3E) = (M \mid C_3P_{(1)}W^2)$.

Es ergibt sich eine Schnittzahlformel

$$(M \mid C_2C_3) = \lambda_3^1\varrho_2^1 + \lambda_3^2\varrho_2^2 + \lambda_3^3\varrho_2^3 \tag{4.24}$$

mit $\varrho_2^1 = (M \mid C_2P^2)$, $\varrho_2^2 = (M \mid C_2\widehat{PL})$, $\varrho_2^3 = (M \mid C_2L^2)$.

4.2.4. Für $V_n = N_5$ und $t = 4$ folgt aus Satz 3 entsprechend

$$(N \mid C_4) \sim \lambda_4^1(N \mid P) + \lambda_4^2(N \mid L) + \lambda_4^3(N \mid \tilde{S}^P) \tag{4.25}$$

mit $\lambda_4^1 = -(N \mid C_4P^4) - 4(N \mid C_4\widehat{PL}^2) + 6(N \mid C_4\widehat{KP})$
$= (N \mid C_4L_{(1)}^{\mathsf{T}}X^2P) - 4(N \mid C_4P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$,

$\lambda_4^2 = (N \mid C_4P^4) - 6(N \mid C_4\widehat{PL}^2) + 5(N \mid C_4\widehat{KP})$
$= (N \mid C_4P_{(1)}^{\mathsf{T}}W^2L) - 3(N \mid C_4P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$,

$\lambda_4^3 = (N \mid C_4\widehat{PL}^2) - (N \mid C_4\widehat{KP}) = (N \mid C_4P_{(1)}L_{(1)}W^2X)$.

Dazu gehört eine Schnittzahlformel

$$(N \mid C_1C_4) = \lambda_4^1\varrho_1^1 + \lambda_4^2\varrho_1^2 + \lambda_4^3\varrho_1^3 \tag{4.26}$$

mit $\varrho_1^1 = (N \mid C_1P)$, $\varrho_1^2 = (N \mid C_1L)$, $\varrho_1^3 = (N \mid C_1\tilde{S}^P)$.

Aus der Basisdarstellung

$$(N \mid C_4) \sim \nu_4^1(N \mid P) + \nu_4^2(N \mid L) + \lambda_4^3(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}) \tag{4.27}$$

mit $\nu_4^1 = (N \mid C_4L_{(1)}^{\mathsf{T}}X^2P) = -(N \mid C_4P^4) + 2(N \mid C_4\widehat{KP})$,

$\nu_4^2 = (N \mid C_4P_{(1)}^{\mathsf{T}}W^2L) + 3(N \mid C_4P_{(1)}L_{(1)}W^2X) = (N \mid C_4P^4) - (N \mid C_4\widehat{KP})$

---

[1]) nur aus ausgearteten Kegelschnitten bestehenden

ergibt sich die (4.26) entsprechende Schnittzahlformel

$$(N \mid C_1C_4) = \nu_4^1\varrho_1^1 + \nu_4^2\varrho_1^2 + \lambda_4^3\sigma_1^3 \tag{4.28}$$

mit $\sigma_1^3 = (N \mid C_1P_{(1)}^{\mathsf{T}})$.

4.2.5. Für $V_n = N_5$ und $t = 3$ folgen aus Satz 3

$$\begin{aligned}(N \mid C_3) \sim\, & \lambda_3^1(N \mid P^2) + \lambda_3^2(N \mid \widehat{PL}) + \lambda_3^3(N \mid L^2) + \lambda_3^4(N \mid \widehat{S^PP}) \\ & + \lambda_3^5(N \mid \widehat{\widehat{S^LL}})\end{aligned} \tag{4.29}$$

mit
$$\begin{aligned}
\lambda_3^1 &= (N \mid C_3L_{(1)}^{\mathsf{T}}X^2) - 2(N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}X^2),\\
\lambda_3^2 &= (N \mid C_3P_{(1)}^{\mathsf{T}}WL) - 3(N \mid C_3P_{(1)}^{\mathsf{T}}W^2) - 6(N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}W^2)\\
&\quad - 3(N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}X^2),\\
\lambda_3^3 &= (N \mid C_3P_{(1)}^{\mathsf{T}}W^2) - 2(N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}W^2),\\
\lambda_3^4 &= (N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}X^2), \quad \lambda_3^5 = (N \mid C_3P_{(1)}L_{(1)}W^2)
\end{aligned}$$

und die Formel

$$(N \mid C_2C_3) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_3^i\varrho_2^i \tag{4.30}$$

mit
$$\begin{aligned}
&\varrho_2^1 = (N \mid C_2P^2), \quad \varrho_2^2 = (N \mid C_2\widehat{PL}), \quad \varrho_2^3 = (N \mid C_2L^2),\\
&\varrho_2^4 = (N \mid C_2\widehat{S^PP}), \quad \varrho_2^5 = (N \mid C_2\widehat{\widehat{S^LL}}).
\end{aligned}$$

Geht man von der Basisdarstellung

$$\begin{aligned}(N \mid C_3) \sim\, & \nu_3^1(N \mid P^2) + \nu_3^2(N \mid PL) + \nu_3^3(N \mid L^2) + \nu_3^4(N \mid P_{(1)}^{\mathsf{T}}W) \\ & + \nu_3^5(N \mid L_{(1)}^{\mathsf{T}}X)\end{aligned} \tag{4.31}$$

mit
$$\begin{aligned}
\nu_3^1 &= -4(N \mid C_3P^3) + 6(N \mid C_3E) - 6(N \mid C_3L\widehat{PL}) + (N \mid C_3\widehat{\widehat{\widehat{S^LL^2}}}),\\
\nu_3^2 &= 3(N \mid C_3E) + 6(N \mid C_3L\widehat{PL}) - (N \mid C_3\widehat{\widehat{\widehat{S^PP^2}}}) - (N \mid C_3\widehat{\widehat{\widehat{S^LL^2}}}),\\
\nu_3^3 &= 2(N \mid C_3P^3) - 6(N \mid C_3E) + (N \mid C_3\widehat{\widehat{\widehat{S^PP^2}}}),\\
\nu_3^4 &= 6(N \mid C_3P^3) - 9(N \mid C_3E) + 7(N \mid C_3L\widehat{PL}) - (N \mid \widehat{\widehat{\widehat{S^LL^2}}}),\\
\nu_3^5 &= -(N \mid C_3P^3) + 5(N \mid C_3E) - (N \mid C_3\widehat{\widehat{\widehat{S^PP^2}}})
\end{aligned}$$

aus, so ergibt sich eine (4.30) entsprechende Formel

$$(N \mid C_2C_3) = \sum_{i=1}^{5} \nu_3^i\sigma_2^i \tag{4.32}$$

mit $\sigma_2^i = \varrho_2^i$ ($i = 1, 2, 3$) und $\sigma_2^4 = (N \mid C_2P_{(1)}^{\mathsf{T}}W)$, $\sigma_2^5 = (N \mid C_2L_{(1)}^{\mathsf{T}}X)$.

LITERATUR

[1] Chow, W.-L., und B. L. van der Waerden: Zur algebraischen Geometrie IX. Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. *113* (1937), 692–704.

[2] Drechsler, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Math. Nachr. *46* (1970), 107 bis 136.

[3] DRECHSLER, K.: Die Homologiegruppen der Varietät der vollständigen Kegelschnitte. Wiss. Z. Univ. Halle 19 M (1970), 107–113.
[4] DRECHSLER, K.: Über Homologiegruppen von Faserbündeln. Math. Nachr. *82* (1978), 219–230.
[5] DRECHSLER, K., und U. STERZ: Punkt-Linien-Superoskulanten-Kegelschnitte. Beiträge zur Algebra und Geometrie *6* (1977), 37–54.
[6] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, Princeton (N.Y.), 1952.
[7] HU, S.-T.: Homology Theory. Holden Day Inc., San Francisco 1966.
[8] KELLER, O.-H.: Vorlesungen über algebraische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1974.
[9] SEVERI, F.: I fondamenti della geometria numerativa. Annali di Matematica pura ed applicata IV, *19* (1940), 153–242. Übers.: GRÖBNER, W.: Grundlagen der abzählenden Geometrie. Math. Forsch. I, 2, Wolfenbüttel 1948.
[10] STEENROD, N.: The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press, Princeton (N.Y.) 1951.
[11] VAN DER WAERDEN, B. L.: Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie. Math. Ann. *97* (1927), 756–774.
[12] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzuzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1930), 337–362.
[13] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie XV. Lösung des Charakteristikenproblems für Kegelschnitte. Math. Ann. *115* (1938), 645–655.
[14] WEIL, A.: Foundations of Algebraic Geometry. American Mathematical Society, New York 1946.

Manuskripteingang: 16. 9. 1976

VERFASSER:

KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg