Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 125–131

Bemerkungen über Zusammenhangseigenschaften und mengentheoretische Darstellung projektiver algebraischer Mannigfaltigkeiten

HARTMUT ROLOFF und JÜRGEN STÜCKRAD

Einleitung

In [6] entwickelt R. HARTSHORNE für noethersche topologische Räume gewisse Zusammenhangsbedingungen. Hieraus kann er insbesondere notwendige Bedingungen dafür ableiten, wann eine (projektive) algebraische Mannigfaltigkeit $V \subset \mathbf{P}^n$ mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist, d. h. wann $r = n - \dim V$ Hyperflächen $H_1, \ldots, H_r$ existieren mit $V = H_1 \cap \cdots \cap H_r$ (über einem geeigneten — z. B. algebraisch abgeschlossenen — Körper). Hiermit kann er insbesondere zeigen (s. [6], 3.4.1. und 3.4.2.), daß

1. die Kurve $C \subset \mathbf{P}^3$, die Vereinigung der beiden Geraden $x_0 = x_1 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$ ist (s. auch [1], Satz 7.5.2.) und
2. die irreduzible Fläche $F \subset \mathbf{P}^4$, die durch die allgemeine Nullstelle $\big(t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_2(t_2 - t_0), t_0t_1t_2, t_2^2(t_2 - t_0)\big)$ gegeben ist (bei HARTSHORNE affin),

keine mengentheoretisch vollständigen Durchschnitte sind. Hieraus ergibt sich, daß projektive algebraische Mannigfaltigkeiten im allgemeinen keine vollständigen Durchschnitte sind. Selbst wenn man sich auf irreduzible projektive Mannigfaltigkeiten (d. h. projektive Varietäten) oder etwas allgemeiner auf zusammenhängende Mannigfaltigkeiten (s. Def. 1) beschränkt, so zeigt die Fläche F, daß auch diese im allgemeinen keine mengentheoretisch vollständigen Durchschnitte sind, wenn nur ihre Dimension größer als 1 ist. (Dasselbe gilt natürlich auch im Affinen.) Offen bleibt somit nur noch das sogenannte mengentheoretische Kurvenproblem:

Es sei $C \subset \mathbf{P}^n$ eine irreduzible (oder allgemeiner: eine zusammenhängende) projektive algebraische Kurve. Gibt es dann stets $n - 1$ Hyperflächen $H_1, \ldots, H_{n-1} \subset \mathbf{P}_n$, so daß $C = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}$ gilt?

Der erste nichttriviale Fall ergibt sich hierbei für $n = 3$ und besagt demzufolge:

Ist jede irreduzible (bzw. zusammenhängende) algebraische Raumkurve Durchschnitt zweier algebraischer Flächen?

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß EISENBUD und EVANS in [3], Cor. 2, zeigen konnten, daß jede projektive algebraische Mannigfaltigkeit $V \subset \mathbf{P}_n$ Durchschnitt von höchstens n Hyperflächen ist. (Ein analoges Ergebnis für den affinen Fall wurde erstmals von STORCH in [13] bewiesen, siehe aber auch EISENBUD und EVANS [3], Cor. 1.)

Bei allen uns aus der Literatur bekannten Beispielen algebraischer Kurven (sowohl projektiv als auch affin), von denen man weiß, daß sie Durchschnitt von $n - 1$

Hyperflächen sind, beobachteten wir folgenden bemerkenswerten Umstand:
Es sei $\mathfrak{a}$ das durch die entsprechende Kurve definierte Polynomideal. Dann kann eine der Hyperflächen stets als Nullstellenmenge eines der Basiselemente von $\mathfrak{a}$ gewählt werden. Zur Veranschaulichung wollen wir eine Reihe solcher Beispiele zusammenstellen:

1. (Perron, s. [11]) Es sei $C \subset \mathbf{P}^n$ die durch die allgemeine Nullstelle $(t_0^n, t_0^{n-1}t_1, \ldots, t_1^n)$ definierte Kurve. Das Ideal von C wird erzeugt von allen zweireihigen Determinanten der Matrix $\begin{pmatrix} x_0 \ldots x_{n-1} \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}$. Es gilt $C = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}$, wobei H_i für jedes $= 1, \ldots, n-1$ definiert ist durch

$$\begin{vmatrix} x_0 \ldots x_i \\ x_1 \ldots x_{i+1} \\ \vdots \quad \vdots \\ x_i \ldots x_{2i} \end{vmatrix} = 0 \qquad (x_j = 0, \text{ falls } j > n).$$

H_1 ist demzufolge gegeben durch das Basiselement $x_0x_2 - x_1^2$.

2. (Hartshorne, s. [6]) Es sei $C \subset \mathbf{A}^3$ die durch (t^3, t^4, t^5) gegebene Kurve. C ist Durchschnitt der zu $x_3^2 - x_1^2x_2$ und $x_1^4 + x_2^3 - 2x_1x_2x_3$ gehörenden Flächen. Das Ideal von C ist gegeben durch die Basiselemente $x_1x_3 - x_2^2$, $x_2x_3 - x_1^3$, $x_3^2 - x_1^2x_2$.

3. (Hartshorne, s. [6]) Es sei $C \subset \mathbf{P}^3$ die durch das Ideal $\mathfrak{c} = (x_0x_2, x_1x_2, x_1x_3) = (x_0, x_1) \cap (x_1, x_2) \cap (x_2, x_3)$ gegebene projektive Kurve (C ist zusammenhängend). Dann ist C Durchschnitt der durch $x_1x_2 = 0$ und $x_0x_2 + x_1x_3 = 0$ gegebenen Flächen.

4. (Ferrand, s. [4]) Es sei $F \subset \mathbf{P}^4$ die Fläche, die durch das von den zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ erzeugte Ideal definiert ist. F ist Durchschnitt der durch $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ und $x_2x_3^2 + x_0x_4^2 - 2x_1x_3x_4$ gegebenen Hyperflächen.

Nach F. S. Macaulay (s. [10], S. 98) betrachten wir nun das durch die allgemeine Nullstelle $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$ definierte Primideal

$$\mathfrak{p} = (x_0x_3 - x_1x_2, x_1^3 - x_0^2x_2, x_2^3 - x_1x_3^2, x_1^2x_3 - x_0x_2^2) \subset K[x_0, \ldots, x_3],$$

wobei K ein beliebiger Körper ist. $C \subset \mathbf{P}^3$ sei die entsprechende irreduzible Raumkurve. Nach [8], III, § 5, Ex. 5.16, ist C für den Fall char $K > 0$ ein mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt. Wir geben in dieser Arbeit eine Methode an (s. Abschnitt II), mit der man folgende Aussagen gewinnt:

1. Im Fall char $K > 0$ kann eine der beiden Flächen, deren Durchschnitt C ist, als Nullstellengebilde von $x_1^3 - x_0^2x_2$ oder von $x_2^3 - x_1x_3^2$ gewählt werden. Damit ordnet sich C im Fall char $K > 0$ in die Reihe der oben erwähnten Beispiele ein.
2. Im Fall char $K = 0$ seien $H_1, \ldots, H_4$ die durch die Basisformen von $\mathfrak{p}$ definierten Flächen. Dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, 4$ und jede Fläche $H \subset \mathbf{P}^3$: $H_i \cap H \neq C$.

Ließe sich nun zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen bei mengentheoretisch vollständigen Durchschnitten eine der beteiligten Hyperflächen als Nullstellenmenge eines Basiselements des entsprechenden Polynomideals gewählt werden kann, so wäre zu hoffen, daß im Fall char $K = 0$ die Raumkurve von Macaulay ein Gegenbeispiel für das klassische Kurvenproblem ist. Offenbar ist aber diese Vermutung

zumindest ohne zusätzliche Voraussetzung falsch. Zum Beispiel gewinnt man durch eine lineare Variablentransformation aus dem im 3. Beispiel erwähnten Ideal $\mathfrak{c}$ das Ideal $\mathfrak{c}' = (x_0x_2, x_1x_2, (x_1 - x_0)\, x_3)$, für das deshalb gilt: Die zu $\mathfrak{c}'$ gehörende Kurve ist Durchschnitt der Flächen $(x_1 - x_0)\, x_2 = 0$ und $x_0x_2 + (x_1 - x_0)\, x_3 = 0$. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß man hierbei mit keiner durch ein Basiselement definierten Fläche starten kann.
Inzwischen hat sich jedoch der von HARTSHORNE in [8], Conj. 5.17, vorgeschlagene Weg, die Raumkurve von MACAULAY in der Charakteristik Null als Gegenbeispiel für das Kurvenproblem darzustellen (s. [8], Ex. 5.18) als nicht gangbar erwiesen. COWSIK und NORI konnten in [2] nachweisen, daß HARTSHORNES diesbezügliche Vermutung (s. [8], 5.17) auch für die Charakteristik Null falsch ist. Für weitere explizite Gegenbeispiele siehe auch [9].

I. Zusammenhangseigenschaften projektiver algebraischer Mannigfaltigkeiten

Wir geben zwei Ergebnisse über Zusammenhangseigenschaften projektiver algebraischer Mannigfaltigkeiten. Satz 5 stellt dabei eine Verallgemeinerung eines Resultats von HARTSHORNE dar, siehe [6], Rem. 3.4.6, oder [7], Theorem 1.3. Zunächst sei aber an einige bekannte Definitionen erinnert:

Definition 1. Es sei X noetherscher topologischer Raum.

1. X heißt *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar abgeschlossener Teilmengen X_1, X_2 von X mit $X = X_1 \cup X_2$ gilt: $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.
2. X heißt *zusammenhängend in der Kodimension* k ($k \geqq 0$, ganze Zahl), wenn für jede abgeschlossene Untermenge $Y \subseteqq X$ mit $\operatorname{codim}(Y, X) > k$ die Menge $X - Y$ zusammenhängend ist.

Offenbar impliziert die Eigenschaft *zusammenhängend in der Kodimension* k die Eigenschaft *zusammenhängend in der Kodimension* l für jedes $l \geqq k$. Für $k \geqq \dim X$ ist die Eigenschaft *zusammenhängend in der Kodimension* k äquivalent zu der Eigenschaft *zusammenhängend*.
Es sei X ein beliebiger topologischer Raum und $y \in X$. Dann heißt der topologische Raum $X_y := \{x \in X \mid \overline{\{x\}} \ni y\}$ (für $A \subseteqq X$ sei $\bar{A}$ die Abschließung von A in X) lokaler Raum von X in y.

Definition 2. X sei noetherscher topologischer Raum. X heißt *lokal zusammenhängend in der Kodimension* k, wenn X_y zusammenhängend in der Kodimension k ist für alle $y \in X$.

Es sei darauf hingewiesen, daß keine der Eigenschaften *zusammenhängend in der Kodimension* k und *lokal zusammenhängend in der Kodimension* k die jeweils andere impliziert.
Nach [6], Rem. 1.3.2, gilt aber folgendes

Lemma 3. *Ein noetherscher zusammenhängender topologischer Raum, der lokal zusammenhängend in der Kodimension* k *ist, ist auch global zusammenhängend in der Kodimension* k.

Der nächste Satz stellt eine Anwendung von Theorem 2.2 aus [6] auf projektive algebraische Mannigfaltigkeiten dar.

Satz 4. *Es sei* K *unendlicher Körper und* $V \subset \mathbf{P}_K^n$ *eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit mit* $\dim V \geqq 1$, *die durch ein homogenes Ideal* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ *definiert sei.*

A sei der (durch $\mathfrak{a}$ gegebene) lokale Ring in der Spitze des affinen Kegels über V. Wenn depth $A \geqq 2$, *so ist V zusammenhängend.*

Beweis. Es sei X der affine Kegel über V mit der Spitze x_0. Wir betrachten die Prägarbe $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei wie üblich $\mathcal{O}_{X,x}$ die entsprechende Lokalisierung von $K[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ ist für alle $x \in X$. X ist noetherscher zusammenhängender topologischer Raum (X ist ein Kegel). Es sei $Y := \{x_0\}$. Da depth $\mathcal{O}_{X,x_0} =$ depth $A \geqq 2$ gilt, ist nach [6], Theorem 2.2, $X - \{x_0\}$ zusammenhängend. Damit ist V zusammenhängend, q. e. d.

Wir geben nun eine Folgerung, die — wie schon oben erwähnt — eine Verallgemeinerung von [6], Rem. 3.4.6, bzw. [7], Theorem 1.3, darstellt, da insbesondere vollständige Durchschnitte die hier geforderten Voraussetzungen erfüllen.

Satz 5. *Es seien V und $\mathfrak{a}$ wie in Satz 4 mit den zusätzlichen Bedingungen:*

(i) *$\mathfrak{a}$ ist ungemischt und*

(ii) *für jede Form $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ mit $\mathfrak{a}: f = \mathfrak{a}$ ist $(\mathfrak{a}, f)$ wieder ungemischt.*

Dann ist V sowohl lokal als auch global zusammenhängend in der Kodimension 1.

Beweis. Nach Satz 4 ist V zusammenhängend. Nach Voraussetzung erfüllen die lokalen Ringe $R\mathfrak{p}/\mathfrak{a}R\mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p} \subset K[x_0, \ldots, x_n] =: R$ die Bedingung S_2 von SERRE. Damit ist nach [6], Cor. 2.4, V lokal zusammenhängend in der Kodimension 1 und nach Lemma 3 dann auch global zusammenhängend in der Kodimension 1, q. e. d.

Satz 5 besitzt ein „lokales" Analogon, das der Vollständigkeit halber mit angegeben sei:

Satz 5'. *Es sei A lokaler ungemischter Ring mit* dim $A \geqq 2$, *so daß für jeden Nichtnullteiler $x \in A$ A/xA wieder ungemischt ist. Dann ist $X =$* Spec A *sowohl lokal als auch global zusammenhängend in der Kodimension* 1.

(A heißt ungemischt, wenn $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ für alle zum Nullideal von A assoziierten Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ ist. Spec A ist die Menge aller Primideale von A, ausgestattet mit der Zariski-Topologie.)

Die eingangs erwähnte Fläche F von HARTSHORNE zeigt, daß Satz 5 nicht umkehrbar ist. Da F irreduzibel ist, ist F somit auch zusammenhängend in der Kodimension 1. Gäbe es nun ein Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, \ldots, x_4]$, das F definiert und das die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so hätte man für den durch $\mathfrak{a}$ gegebenen lokalen Ring A von F im Nullpunkt $(1, 0, 0, 0, 0)$: $\dim A =$ depth $A = 2$. Dasselbe gilt dann aber auch für die Komplettierung $\hat{A}$ von A bezüglich des maximalen Ideals von A, d. h., Spec $\hat{A}$ ist nach Satz 5' zusammenhängend in der Kodimension 1. Das ist aber nicht möglich, da F formal im Nullpunkt (d. h. bezüglich der Komplettierung im Nullpunkt) „aussieht" wie die Vereinigung zweier Ebenen, die sich in genau einem Punkt schneiden (dem Nullpunkt), also nicht zusammenhängend in der Kodimension 1 sind (s. [6], Ex. 3.4.2).

Offen bleibt damit nur noch die Frage nach der Umkehrbarkeit von Satz 4. Wir geben daher folgendes Problem, das offenbar eine Verallgemeinerung des Kurvenproblems (für eindimensionale Mannigfaltigkeiten) darstellt.

Problem. *Es sei $V \subset \mathbf{P}_K^n$ (K unendlicher Körper) eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit. Dann ist V genau dann zusammenhängend, wenn V durch ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ definiert werden kann mit folgender Eigenschaft: Für den durch $\mathfrak{a}$ gegebenen lokalen Ring A in der Spitze des affinen Kegels über V gilt* depth $A \geqq 2$, *d. h., es gibt zwei nicht konstante Formen* $f, g \in K[x_0, \ldots, x_n]$ *mit*

$$\mathfrak{a} : f = \mathfrak{a} \quad und \quad (\mathfrak{a}, f) : g = (\mathfrak{a}, f).$$

Im Fall von Kurven besagt das gerade:
Eine projektive algebraische Kurve $C \subset \mathbf{P}^n$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn* C *durch ein perfektes Ideal* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ *definiert werden kann* (Perfektheit s. etwa [5], 144.3).
Die Fläche F von HARTSHORNE ordnet sich hier ein. Die Rechnungen aus [12], Kor. 7, zeigen, daß man für $\mathfrak{a}$ das durch F definierte Primideal wählen kann und z. B. $f = x_3$, $g = x_0 + x_2$ setzt. Die Raumkurve C von MACAULAY zeigt aber, daß $\mathfrak{a}$ nicht immer das durch C bestimmte Primideal sein kann. Dieses ist hierbei nämlich nicht perfekt (s. [5], 144.10). Im Fall char $K > 0$ kann C aber durch ein Hauptklassenideal (das natürlich perfekt ist) definiert werden, siehe hierzu Einleitung und Abschnitt II dieser Arbeit. Für die Charakteristik Null ist das Problem aber noch offen.

II. Über die mengentheoretische Darstellung der Raumkurve von Macaulay

Jetzt sei K ein beliebiger Körper und $R := K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ der homogene Polynomring in den Unbestimmten x_0, x_1, x_2, x_3. Es sei $C \subset \mathbf{P}_K^3$ die durch die allgemeine Nullstelle $(t_0^4, t_0^3t_1, t_0t_1^3, t_1^4)$ gegebene irreduzible Raumkurve mit dem zugehörigen Primideal

$$\mathfrak{p} = (x_0x_3 - x_1x_2, x_1^3 - x_0^2x_2, x_2^3 - x_1x_3^2, x_1^2x_3 - x_0x_2^2)\, R \subset R$$

(Raumkurve von MACAULAY, s. [10], S. 98). $f_1, \ldots, f_4$ bezeichne die Basisformen von $\mathfrak{p}$ in dieser Reihenfolge.
Für irgendein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ bezeichnen wir mit $\sqrt{\mathfrak{a}}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$, d. h. das Ideal $\{r \in R \mid r^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \in \mathbf{N}\}$. Offenbar ist C genau dann mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt, wenn zwei Formen $f, g \in \mathfrak{p}$ existieren mit

$$\mathfrak{p} = \sqrt{(f, g)\, R}.$$

Es seien y_0, y_1, y_2 weitere Unbestimmte, $S := K[y_0, y_1, y_2]$ und $\varphi_i : R \to S$ für $i = 1, 2, 4$ K-Homomorphismen, die durch

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_0y_2, y_2^2, y_0y_1, y_1y_2) \quad (\text{d. h. } \varphi_1(x_0) = y_0y_2, \ldots),$$

$$\varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_1^3, y_1^2y_2, y_2^3, y_0^3),$$

$$\varphi_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_1^2y_2, y_0^2y_1, y_0^2y_2, y_2^3)$$

definiert sind. Dann gilt für $i = 1, 2, 4$:

$$f_iR = \operatorname{Ker} \varphi_i.$$

Bezeichnen wir mit R_i den Ring Im $\varphi_i \subset S$, so gilt für $i = 1, 2, 4$: $R/f_iR \cong R_i$, also $R/f_1R \cong K[y_0y_2, y_2^2, y_0y_1, y_1y_2]$ usw.
Wir haben nun:

Lemma 1. *Für jede Form* $g \in \mathfrak{p}$ *gilt*

$$\sqrt{(f_1, g)\, R} \neq \mathfrak{p} \quad und \quad \sqrt{(f_4, g)\, R} \neq \mathfrak{p}.$$

Beweis. Wegen $f_4^2 = -f_2f_3 + x_1x_2f_1^2$ ist $\mathfrak{p} = \sqrt{(f_1, f_2, f_3)\, R}$. Angenommen, es gibt ein $g \in \mathfrak{p}$ mit $\sqrt{(f_1, g)\,R} = \mathfrak{p} = \sqrt{(f_1, f_2, f_3)\,R}$. Dann folgt:

$$\sqrt{(\varphi_1(g)\,S)} = \sqrt{(\varphi_1(f_2), \varphi_1(f_3))\,S} = \sqrt{(y_2^6 - y_0^3 y_1 y_2^2,\, y_0^3 y_1^3 - y_1^2 y_2^4)\,S}$$
$$= \sqrt{((y_2^4 - y_0^3 y_1)\,y_2^2,\, (y_0^3 y_1 - y_2^4)\,y_1^2)\,S} = (y_2^4 - y_0^3 y_1)\,S,$$

d. h., bis auf Konstanten gilt $\varphi_1(g) = (y_2^4 - y_0^3 y_1)^k$, wobei $k \geqq 1$ eine natürliche Zahl ist. Da aber für jedes k $(y_0^3 y_1)^k = y_0^{3k} y_1^k \notin R_1$ gilt, folgt $\varphi_1(g) \notin R_1$. Die Annahme war also falsch, d. h. $\sqrt{(f_1, g)\,R} \neq \mathfrak{p}$ für alle $g \in \mathfrak{p}$.

Nehmen wir nun an, daß ein $g \in \mathfrak{p}$ existiert mit $\sqrt{(f_4, g)\,R} = \mathfrak{p}$, so liefern die entsprechenden Überlegungen $\sqrt{(\varphi_4(g)\,S)} = (y_0^4 - y_1 y_2^3)\,S \cap (y_1, y_2)\,S$. Links steht aber das Radikal eines Hauptideals und rechts ein gemischtes Ideal. Das ist unmöglich, und auch diese Annahme ist damit falsch, q. e. d.

Vertauscht man x_0 mit x_3 und x_1 mit x_2, so geht dabei das Primideal $\mathfrak{p}$ in sich über, wobei aber die Basisformen f_2 und f_3 miteinander vertauscht werden. Deshalb braucht das nachfolgende Lemma nur für die Basisform f_2 bewiesen zu werden.

Lemma 2. (i) *Ist* char $K = 0$, *so gilt für jede Form* $g \in \mathfrak{p}$

$$\sqrt{(f_2, g)\,R} \neq \mathfrak{p} \quad \textit{und} \quad \sqrt{(f_3, g)\,R} \neq \mathfrak{p}.$$

(ii) *Ist* char $K =: p > 0$ *und sind* $n \geqq 1$, $r, s \geqq 0$ *natürliche Zahlen mit* $p^n = 3r + 2s$, *so gilt mit* $g = (x_2^4 - x_0 x_3^3)^{p^n} + 3x_0^r x_1^s x_2^{4r+2s} x_3^{p^n} (x_0^r x_1^s x_3^{p^n} - x_2^{4r+3s})$ *bzw.* $g = (x_1^4 - x_0^3 x_3)^{p^n} + 3x_0^{p^n} x_1^{4r+2s} x_2^s x_3^r (x_0^{p^n} x_2^s x_3^r - x_1^{4r+3s})$

$$\sqrt{(f_2, g)\,R} = \mathfrak{p} \quad \textit{bzw.} \quad \sqrt{(f_3, g)\,R} = \mathfrak{p}.$$

Beweis. (i) Angenommen, es gibt ein $g \in \mathfrak{p}$ mit $\sqrt{(f_2, g)\,R} = \mathfrak{p} = \sqrt{(f_1, f_2, f_3)\,R}$. Die Überlegungen im Beweis zu Lemma 1 liefern dann $\sqrt{(\varphi_2(g))\,S} = (y_2^4 - y_0^3 y_1)\,S$, d. h., bis auf Konstanten gilt $\varphi_2(g) = (y_2^4 - y_0^3 y_1)^k$, wobei $k \geqq 1$.

Hierbei tritt der Summand $k y_0^3 y_1 y_2^{4(k-1)}$ auf. Da aber $y_0^3 y_1 y_2^{4(k-1)} \notin R_2 = K[y_1^3, y_1^2 y_2, y_2^3, y_0^3]$, liegt wegen $k \neq 0$ in K (char $K = 0$) $\varphi_2(g)$ nicht in R_2. Dieser Widerspruch beweist (i).

(ii) Man sieht sofort, daß $\varphi_2(f_1^{3p^n} + x_0^{2p^n} g) = 0$, d. h. $f_1^{3p^n} \in (f_2, g)\,R$, also $f_1 \in \sqrt{(f_2, g)\,R}$ gilt. Hieraus folgt: $x_1^2 f_3 = -x_3^2 f_2 - x_2(x_0 x_3 + x_1 x_3)\,f_1 \in \sqrt{(f_2, g)\,R}$. Nun sei $\mathfrak{q}$ ein zu $(f_2, g)\,R$ assoziiertes Primideal. Wäre $x_1 \in \mathfrak{q}$, so folgt $x_0 x_3 \in \mathfrak{q}$ wegen $f_1 \in \mathfrak{q}$. Da entweder $r > 0$ oder $s > 0$ und $g \in \mathfrak{q}$, liefert das sofort $x_2 \in \mathfrak{q}$. Damit wäre $(x_1, x_2, x_0 x_3) \subset \mathfrak{q}$, d. h. ht $\mathfrak{q} \geqq 3$. Das ist aber unmöglich, da $(f_2, g)\,R$ ungemischt ist und somit ht $\mathfrak{q}$ = ht $(f_2, g)\,R = 2$. Also ist $x_1 \notin \mathfrak{q}$, und damit folgt sofort: $f_3 \in \sqrt{(f_2, g)\,R}$. Dies liefert $\mathfrak{p} = \sqrt{(f_1, f_2, f_3)\,R} \subseteqq \sqrt{(f_2, g)\,R} \subseteqq \mathfrak{p}$, also $\sqrt{(f_2, g)\,R} = \mathfrak{p}$, q. e. d.

Anmerkung. Eine Analyse des Beweises von (i) zeigt, daß $(y_2^4 - y_0^3 y_1)^k$ genau dann in R_2 liegt, wenn char $K > 0$ und char K und 3 Teiler von k sind, z. B. $k = 3p^n$ (p = char K). Auf diese Weise kommt man zur oben angegebenen Gestalt von g. Es läßt sich außerdem zeigen, daß $rS \cap R_2 = rR_2$ für jedes $r \in R_2$ gilt, wenn nur $r \notin (y_1^3, y_1^2 y_2)\,R_2 = \varphi_2((x_0, x_1)\,R)$. Hiermit kann man (ii) beweisen, ohne die spezielle Gestalt von g zu kennen.

Abschließend fassen wir Lemma 1 und 2 zusammen in folgendem

Satz 3. (i) *Es sei* char $K = 0$. *Dann gilt für jedes* $i = 1, \ldots, 4$ *und jede Form* $g \in \mathfrak{p}$

$$\sqrt{(f_i, g)\,R} \neq \mathfrak{p}.$$

(ii) *Ist* char $K > 0$, *so gibt es Formen* g_1, g_2 *in* $\mathfrak{p}$ *mit* $\sqrt{(f_2, g_1)\,R} = \mathfrak{p}$ *und* $\sqrt{(f_3, g_2)\,R} = \mathfrak{p}$ (s. [8], Ex. 5.16).

LITERATUR

[1] BUDACH, L.: Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] COWSIK, R. C., and M. V. NORI: On Cohen-Macaulay rings. J. Algebra *38* (1976), 536 to 538.

[3] EISENBUD, D., and E. D. EVANS: Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces. Inventiones math. *19* (1973), 107–112.

[4] FERRAND, D.: Un critère explicite pour les intersectiones complètes ensemblistes d'ordre de nilpotence deux. Preprint Univ. Rennes.

[5] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag, Wien–Innsbruck 1949.

[6] HARTSHORNE, R.: Complete intersections and connectedness. Amer. J. Math. *84* (1962), 497–508.

[7] HARTSHORNE, R.: Cohomological dimension of algebraic varieties. Ann. Math. *88* (1968), 403–450.

[8] HARTSHORNE, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties. Lecture Notes in Mathematics 156, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[9] HERZOG, B.: Syzygien und die Flachheit normaler Erweiterungen. (In Vorbereitung.)

[10] MACAULAY, F. S.: Algebraic theory of modular systems. Cambridge tracts No. 19, Cambridge 1916.

[11] PERRON, O.: Über die Bedingung, daß eine binäre Form n-ten Grades eine n-te Potenz ist und die rationale Kurve n-ter Ordnung, Math. Ann. *118* (1941/43), 305–309.

[12] RENSCHUCH, B., J. STÜCKRAD und W. VOGEL: Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnitttheorie und über ein Maß von A. Seidenberg für die Imperfektheit. J. Algebra *37* (1975), 447–471.

[13] STORCH, U.: Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser. Arch. Math. *23* (1972), 403–404.

Manuskripteingang: 21. 6. 1977

VERFASSER:

HARTMUT ROLOFF, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer" Erfurt
JÜRGEN STÜCKRAD, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig