Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 107–113

Zu metrischen affinen Ebenen der Charakteristik 2

ERHARD QUAISSER

In jüngerer Zeit wurden verschiedentlich metrische affine Ebenen der Charakteristik 2 untersucht.
Der Verfasser hat in seinen Arbeiten zu metrischen affinen Ebenen vor allem einen Zugang über Orthogonalitätsrelationen verfolgt. Dabei wurde der Fall der Charakteristik 2 ausgeschlossen. Dieser Beitrag soll die Lücke schließen.
Orthogonalitätsrelationen werden hier durch gewisse Eigenschaften $(O_1)-(O_4)$ charakterisiert, unter denen eine Höhenschließungsaussage (O_3) eine tragende Rolle spielt. Aus der Existenz einer Orthogonalitätsrelation ist die Pappossche Aussage nicht ableitbar; für eine generelle Existenz dieser Relationen ist sie jedoch auch notwendig.
Bei Charakteristik 2 sind entweder keine oder genau eine oder alle Richtungen isotrop (d. h. zu sich selbst orthogonal). Im letzten Fall sind Orthogonalitätsrelation und Parallelitätsrelation identisch; er kann deshalb bei den weiteren Betrachtungen unberücksichtigt bleiben. In endlichen Ebenen kann der erste Fall nicht auftreten.
Die Orthogonalitätsrelationen mit genau einer isotropen Richtung zeichnen sich vor allem dadurch aus, daß gerade für sie involutorische orthogonale Kollineationen existieren, die nicht Translationen sind, d. h., daß gerade für sie die Bewegungsgruppe die Translationsgruppe echt umfaßt. Diese metrischen affinen Ebenen werden weiter untersucht. Als Kreise ergeben sich Geraden in der isotropen Richtung.
Bei Charakteristik $\neq 2$ konnten die durch Orthogonalitätsrelationen beschriebenen metrischen affinen Ebenen, die dann gerade die euklidischen (im Sinne von BACHMANN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff) und die pseudo-euklidischen oder minkowskischen Ebenen (im Sinne von WOLFF, Math. Ann. *171*) umfassen, äquivalent durch Streckenkongruenz beschrieben werden (siehe [5]). Diese Möglichkeit geht nun im Fall der Charakteristik 2 verloren, da zwei Orthogonalitätsrelationen bereits dann (und nur dann) die gleiche Streckenkongruenz induzieren, wenn sie die gleiche isotrope Richtung besitzen.
Abschließend werden unabhängig von Orthogonalität mit Hilfe gewisser Eichfiguren die hier vorliegenden Kongruenzebenen beschrieben; und darauf aufbauend kann eine mit der Streckenkongruenz verträgliche Orthogonalitätsrelation eingeführt werden, die durch die Streckenkongruenz nur bezüglich der isotropen Richtung eindeutig bestimmt sein kann.

1. Bezeichnungen, Orthogonalität

In einer *affine Ebene* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Elemente von $\mathfrak{P}$ — die *Punkte* — mit $A, B, C, \ldots$ und die Elemente von $\mathfrak{G}$ — die *Geraden*, die wir als Punktmengen auffassen — mit $a, b, c, \ldots$; ferner bezeichnen wir mit $a \parallel b$ die *Parallelität* von a und b sowie mit AB die *Verbindungsgerade* von A, B $(\neq A)$. Unter einem *Parallelogramm* $ABCD$ wird ein geordnetes Quadrupel (A, B, C, D) von Punkten verstanden, von denen keine drei kollinear sind und $AB \parallel CD$ sowie $BC \parallel DA$ gilt; dabei heißen AC und BD die *Diagonalen* des Parallelogramms $ABCD$.
Die affinen Ebenen, in denen die *affine Aussage von* PAPPOS gilt (kurz *Papposschen Ebenen*), sind gerade die zweidimensionalen affinen Räume über einem Körper K. (Der Körper ist bis auf Isomorphie durch die Ebene bestimmt.) Mit der *Charakteristik* 2 ist gleichwertig, daß in der Ebene die *Verneinung der affinen Fano-Aussage* gilt:

$(\neg\, \mathrm{F})$ *In jedem Parallelogramm sind die Diagonalen parallel zueinander.*

In einer affinen Ebene $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ wird unter einer *Orthogonalitätsrelation* (kurz O-Relation) eine binäre Relation $\perp$ in $\mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften verstanden:

(O_1) *Wenn* $a \perp b$ *und* $a \parallel a'$ *und* $b \parallel b'$, *so* $a' \perp b'$ (Invarianz gegenüber der Parallelität).

(O_2) *Wenn* $a \perp b$ *und* $a \perp c$, *so* $b \parallel c$ (Eindeutigkeit der (Rechts-) Lote).

(O_3) *Ist* ABC *ein Dreieck und gibt es Geraden* h_a *durch* A *und* h_b *durch* B *mit* $BC \perp h_a$ *bzw.* $CA \perp h_b$, *die sich in einem Punkt* $H \neq C$ *schneiden, dann ist* $AB \perp CH$ (Schließungssatz für (Rechts-) Lote).

(O_4) *Es gibt geordnete Paare* (a_1, b_1) *und* (a_2, b_2) *mit* $a_1, b_1 \nparallel a_2, b_2$ *und* $a_1 \perp b_1$ *und* $a_2 \perp b_2$ (Reichhaltigkeitsforderung).

Bereits in affinen Ebenen gilt

(1) *Jede O-Relation ist symmetrisch.* (Somit kommt der bevorzugten „Rechtsseitigkeit" bei der Charakterisierung der O-Relationen keine wesentliche Bedeutung zu.)

(2) *Bezüglich einer O-Relation gibt es zu jedem Punkt* P *und jeder Geraden* g *(genau) ein Lot von* P *auf* g.

In Papposschen Ebenen gilt:

(3) *Zu zwei beliebig vorgegebenen Geradenpaaren* (a_1, b_1) *und* (a_2, b_2) *mit* $a_1, b_1 \nparallel a_2, b_2$ *gibt es genau eine O-Relation mit* $a_1 \perp b_1$ *und* $a_2 \perp b_2$.

Die in [4] sowie in [5] (konstruktiv-synthetisch) geführten Beweise für (1)—(3) bleiben auch unter der Voraussetzung $(\neg\, \mathrm{F})$ gültig. Für (3) ist die Papposche Aussage auch notwendig, wie folgende Überlegung zeigt (Abb. 1):

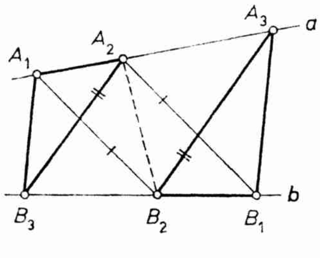

Abb. 1

Wegen $a, b \nparallel A_1B_2, A_2B_3$ existiert nach (3) eine O-Relation mit $a \perp b$ und $A_1B_2 \perp A_2B_3$, bezüglich der nun B_2 bzw. A_2 der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1A_2B_3$ bzw. des Dreiecks $B_1B_2A_3$ ist. Folglich gilt $B_3A_1 \perp A_2B_2$ und $A_3B_1 \perp B_2A_2$ und damit $B_3A_1 \parallel A_3B_1$.

In affinen Ebenen mit ($\neg$ F) folgt aus der Existenz einer O-Relation allein im allgemeinen noch nicht die Gültigkeit der Papposschen Aussage. (Dies ergibt sich aus den weiteren Darlegungen. Wird die Fano-Aussage vorausgesetzt, so scheint hier noch eine offene Frage vorzuliegen.)
Mit (3) und (O_3) ist in konstruktiver Weise eine gewisse vollständige Übersicht über die möglichen O-Relationen in einer Papposschen Ebene gegeben.
Eine Gerade g heißt *isotrop* genau dann, wenn $g \perp g$ gilt; ansonsten *regulär*. Da mit g auch jede dazu parallele Gerade isotrop ist, wird die zugehörige Richtung ebenfalls isotrop genannt. Auf Grund von ($\neg$ F) gilt offenbar bereits in affinen Ebenen:

(4) *Bei einer O-Relation sind entweder keine oder genau eine oder alle Richtungen isotrop.*

Der letzte ausgeartete Fall beansprucht kaum Interesse, da hier die O-Relation mit der Parallelitätsrelation identisch ist. In unseren weiteren Betrachtungen schließen wir ihn deshalb aus und sprechen von *eigentlichen* O-Relationen. Weiterhin setzen wir Pappossche Ebenen mit ($\neg$ F) voraus.
Für endliche Ebenen ist $n := |K| = 2^f$ die Ordnung und $|g| = n$ für alle Geraden g. Demnach ist die Anzahl $n + 1$ der Richtungen ungerade, und es gilt:

(5) *In einer endlichen Ebene besitzt jede eigentliche O-Relation genau eine isotrope Richtung.*

Damit gibt es $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$ eigentliche O-Relationen. Aus der folgenden analytischen Darstellung der O-Relationen ergibt sich, daß die Aussage (5) für nicht endliche Ebenen im allgemeinen nicht gilt.
Eine eigentliche O-Relation ist bestimmt durch zwei Paare (a_1, b_1), (a_2, b_2) kopunktaler Geraden mit $a_1 \neq b_1$, und wir können ein (affines) Koordinatensystem so einführen, daß den Geraden a_1, b_1, a_2 die Koeffiziententripel $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, 1, 0]$ ihrer Gleichungen und damit der Geraden b_2 das Tripel $[\lambda, 1, 0]$ mit $\lambda\ (\neq 0) \in K$ zugeordnet wird. Vollzieht man die durch (O_3) gegebene konstruktive Darstellung der O-Relation durch Rechnung nach, so erhält man (vgl. dazu auch [5], S. 28)

(i) $[u_1, v_1, w_1] \perp [u_2, v_2, w_2] \Leftrightarrow u_1u_2 + \lambda v_1v_2 = 0$

und damit für Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2)$

(ii) $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{y} \Leftrightarrow \lambda x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$

Mit (i) ist eine analytische Übersicht über alle eigentlichen O-Relationen gegeben, denn λ kann irgendein von 0 verschiedenes Element aus K sein. Insbesondere besitzt nach (i) die O-Relation eine (und nur eine) isotrope Richtung genau dann, wenn λ quadratisch ist. Eine Bestätigung von (5) ergibt sich nun nochmals daraus, daß in einem endlichen Körper mit Charakteristik 2 jedes Element quadratisch ist. Außerdem lassen sich Beispiele für nichtendliche angeben, die nicht quadratische Elemente enthalten.

2. Bewegungen und Kongruenz

Die Kollineationen sind gerade die Abbildungen der Ebene auf sich, die sich darstellen lassen in der Form

(iii) $$(x_1', x_2') = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (t_1, t_2) \quad \text{mit } a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \neq 0$$

und

$$a_{ij}, t_k \in K \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

wobei (x_1', x_2') das Bild des Punktes (x_1, x_2) ist. Wir setzen $\mathfrak{A} := (a_{ij})$.

Für die Invarianz der Orthogonalität ist notwendig und hinreichend, daß

(iv) $\quad a_{12} = \lambda a_{21}$ und $a_{22} = a_{11}$

gilt. Denn aus $(0, 1) \perp (1, 0)$ und $(1, 1) \perp (1, \lambda)$ ergeben sich die Gleichungen $\lambda a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ und $\lambda a_{11}^2 + a_{12}^2 + \lambda^2 a_{21}^2 + \lambda a_{22}^2 = 0$ und daraus die Notwendigkeit der Bedingung (iv). Durch Rechnung bestätigt man, daß sie auch hinreichend ist. Damit sind die *orthogonalen Kollineationen* gekennzeichnet.

Die *Bewegungen* (oder *Kongruenztransformationen*) seien wie üblich als endliche Produkte involutorischer orthogonaler Kollineationen erklärt; sie bilden eine Gruppe. Die nicht identischen Translationen sind wegen $(\neg\mathrm{F})$ selbst bereits involutorisch. Zusätzliche involutorische orthogonale Kollineationen sind — bis auf Transformationen mit Translationen — schon bestimmt durch $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$. Für Matrizen $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ mit $a_{11}^2 + \lambda a_{21}^2 \neq 0$ ist

$$\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + \lambda a_{21}^2 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + \lambda a_{21}^2 \end{pmatrix}$$

und damit

(v) $\quad \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E} \Leftrightarrow a_{11}^2 + \lambda a_{21}^2 = 1.$

Die Gleichung $a_{11}^2 + \lambda a_{21}^2 = 1$ ist äquivalent zu $\lambda a_{21}^2 = 1 + a_{11}^2 = (1 + a_{11})^2$ und besitzt demnach genau dann eine von $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$ verschiedene Lösung, wenn λ quadratisch ist. Folglich gilt:

(6) *Die Bewegungsgruppe umfaßt dann und nur dann echt die Translationsgruppe, wenn die zugrunde liegende eigentliche* O*-Relation (genau) eine isotrope Richtung besitzt.*

Für die folgenden Überlegungen sind demnach nur die eigentlichen O-Relationen mit einer isotropen Richtung von Interesse. Bei der analytischen Beschreibung der O-Relation kann die Wahl des Koordinatensystems nun so vorgenommen werden, daß $\lambda = 1$ ist. Die involutorischen orthogonalen Kollineationen $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\mathfrak{A}$ sind dann gegeben durch $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 + a_{11} \\ 1 + a_{11} & a_{11} \end{pmatrix}$ mit $a_{11}(\neq 1) \in K$.

Aus $(1, 1)\,\mathfrak{A} = (1, 1)$ und $(x_1, x_2)\,\mathfrak{A} = (x_1, x_2) + (1, 1)\,(1 + a_{11})\,(x_1 + x_2)$ für $x_1 \neq x_2$ erhalten wir:

(7) *Die involutorischen orthogonalen Kollineationen mit einem Fixpunkt F sind genau die Scherungen, deren Achse durch F geht und isotrop ist. Die involutorischen orthogonalen Kollineationen mit einem gleichen Fixpunkt bilden eine kommutative Gruppe.*

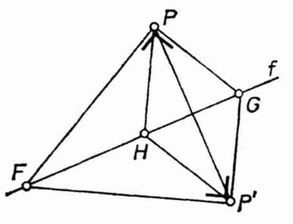

Abb. 2

Die Ergebnisse (6) und (7) können ohne größeren Aufwand auch im Rahmen synthetischer Darstellungen gewonnen werden. Da wir auf derartige Darstellungen zurückgreifen möchten, seien einige Beweisüberlegungen skizziert (Abb. 2).

Wir gehen von einer involutorischen orthogonalen Kollineation α mit F als Fixpunkt aus. Dann gibt es einen Punkt $P \neq F$, dessen Bild P' von F, P verschieden ist; zunächst seien zusätzlich F, P, P' nicht kollinear. Die Orthogonale zu FP durch P schneidet wegen $FP \nparallel FP'$ die Orthogonale zu FP' durch P' in einem Punkt $G \neq F$. Der Punkt H, der P, G, P' zu dem Parallelogramm $PGP'H$ ergänzt, ist der Höhenschnittpunkt im Dreieck FPP'. Auf Grund der Voraussetzungen für α ist PP' und damit auch das Lot f von F auf PP' Fixgerade; folglich ist noch $G \in f$, der Punkt G ein weiterer Fixpunkt von α und damit f Achse. Nach ($\neg$ F) ist $PP' \parallel f$ und somit f isotrop. — In entsprechender Weise erkennt man, daß F, P, P' nicht kollinear sein können. — Diese synthetischen Betrachtungen zu (6) und (7) mögen genügen.
Unter dem *Kreis um F durch P* — kurz $\mathfrak{K}(F, P)$; für $P \neq F$ auch die *Eichkurve durch P mit dem Zentrum F* genannt — wird die Menge aller Bildpunkte P' von P bei den Bewegungen mit F als Fixpunkte verstanden.
Nach (7) ist

(vi) $$\mathfrak{K}(F, P) = \begin{cases} \{P\}, \text{ falls } P = F \text{ oder } FP \text{ isotrop,} \\ \text{die isotrope Gerade durch } P, \text{ falls } FP \text{ regulär.} \end{cases}$$

Anhand der Abb. 2 erkennt man eine einfache, unmittelbare und konstruktive Beschreibung von $\mathfrak{K}(F, P)$ mit Hilfe der Orthogonalität allein (Abb. 3):

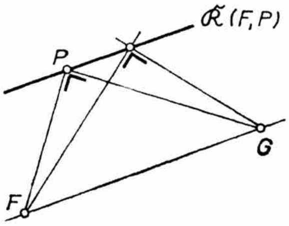

Abb. 3

Ist FP regulär und G der Schnittpunkt des Lotes zu FP durch P mit der isotropen Geraden f durch F, so ist jeder Punkt des Kreises gerade der Schnittpunkt einer beliebigen regulären Geraden durch F mit der dazu Orthogonalen durch G.

3. Streckenkongruenz

Die Streckenkongruenz $\equiv$ erklären wir als binäre Relation in $\mathfrak{P}^2$ mit Hilfe des in (vi) elementar beschriebenen Kreisbegriffs; dabei bezeichne $\overrightarrow{AB}$ die Translation τ mit $A^\tau = B$:

(vii) $(A, B) \equiv (C, D)$ *genau dann, wenn es einen Punkt B' mit $B' \in \mathfrak{K}(A, B)$ und $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CD}$ gibt.*

Anhand von (vi) ist offensichtlich:

(8) *Zwei* O-*Relationen induzieren dann und nur dann die gleiche Streckenkongruenz, wenn ihre isotropen Richtungen übereinstimmen.*

Das bedeutet: *Die durch* O-*Relationen charakterisierten metrischen affinen Ebenen können im Fall der Charakteristik 2 nicht äquivalent mit Streckenkongruenz als einzige metrische Grundrelation dargestellt werden.*
Ergänzend sei noch bemerkt, daß die hier erklärte Streckenkongruenz $\equiv$ eine Reihe von Eigenschaften besitzt, die modifiziert bei Nevanlinna/Kustaanheimo [3], Karzel [1] und in [5] zur Beschreibung metrisch affiner Ebenen benutzt werden.

Überdies zeigt sich auch hier die für metrische affine Ebenen der Charakteristik 2 typische Eigenschaft, daß sich die Tangenten eines Kreises in einem Punkt schneiden. (In Abb. 3 ist G dieser Schnittpunkt, wobei unter der Tangente durch $Q \in \mathfrak{K}(F, P)$ die Gerade t durch Q mit $t \perp FQ$ verstanden wird.) Die vorliegende „Kongruenzebene" ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$, $\equiv$) ist zwar eine „fanosche metrische affine Ebene" im Sinne von [1] bzw. „fanosche affine Ebene mit Kongruenz" (vgl. [2]), sie ist jedoch nicht in dem vollen Rahmen metrischer affiner Ebenen enthalten, der in [3] bzw. [1] zugrunde gelegt ist.

Die in diesem Beitrag erhaltenen Kongruenzebenen lassen sich ohne Orthogonalität kurz so beschreiben:

Die Ebenen sind Pappossche Ebenen mit ($\neg$ F), in der zu einer beliebigen, aber dann festen Richtung ϱ mit Hilfe der Punktmengen

$$\mathfrak{K}(F, P) := \begin{cases} \{P\}, \text{ falls } P = F \text{ oder } PF \in \varrho \\ \text{die Gerade durch } F \text{ in der Richtung } \varrho, \text{ falls } PF \notin \varrho \end{cases}$$

die Streckenkongruenz entsprechend (vi) definiert ist.

In diesen Kongruenzebenen ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$, $\equiv$) kann umgekehrt eine mit der Streckenkongruenz $\equiv$ verträgliche Orthogonalitätsrelation erklärt werden, d. h. eine O-Relation, die gerade die vorliegende Streckenkongruenz wieder induziert, und zwar auf folgende Weise:

Man wählt einen beliebigen, aber dann festen „Eich"-Kreis $\mathfrak{K}(F, P)$ mit $FP \notin \varrho$ und dazu einen Punkt $G(\neq F)$ mit $FG \in \varrho$. Für beliebige Geraden a und b sei a' die Parallele zu a durch F und b' die Parallele zu b durch G. Nun wird erklärt:

$a \perp b$ genau dann, wenn entweder $a' = b'$ (d. h. $a \in \varrho$ und $b \in \varrho$) ist oder a', b' sich auf $\mathfrak{K}(F, P)$ schneiden.

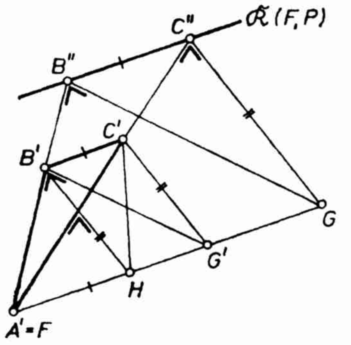

Abb. 4

Offensichtlich erfüllt diese Relation die Eigenschaften (O_1), (O_2) und (O_4). Zum Nachweis von (O_3) zeigen wir zunächst den Höhensatz für Dreiecke mit einer in ϱ liegenden Seite; es sei ABC ein Dreieck mit $BC \in \varrho$. Bei der Translation $\overrightarrow{AF}$ gehen B und C in Punkte B', C' mit $B'C' \parallel FG$ über (Abb. 4). Sind B'', C'' die Schnittpunkte von FB' bzw. FC' mit $\mathfrak{K}(F, P)$ und H, G' die Schnittpunkte der zu $C''G$ Parallelen durch B' bzw. C' mit FG, so ist wegen $FC'' \perp C''G$ und $FB'' \perp GB''$ auch $A'C' \perp B'H$ und $A'B' \perp G'B'$, denn nach dem Satz von DESARGUES ist $G'B' \parallel GB''$ (siehe Abb. 4). Nach ($\neg$ F) ist noch $G'B' \parallel C'H$ und damit $A'B' \perp C'H$. Außerdem gilt $B'C' \perp A'G'$, und damit ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A'B'C'$. Auf Grund der Translationsinvarianz schneiden sich nun auch die Höhen im Dreieck ABC.

Ist schließlich ABC ein Dreieck, bei dem keine Seite in ϱ liegt, so gibt es auf BC einen Punkt $D(\neq B, C)$ mit $AD \in \varrho$. Nach dem bereits Gezeigten besitzen die Dreiecke ABD und ACD Höhenschnittpunkte H_1 und H_2, die auf der Parallelen zu AD durch B bzw. C und außerdem auf einer gemeinsamen Geraden durch A liegen, nämlich auf dem Lot l von A auf BC (Abb. 5). Nach dem Satz von **Pappos** bezüglich der Trägergeraden BC und l schneiden sich das Lot von C auf AB (als Parallele zu DH_1) und das Lot von B auf AC (als Parallele zu DH_2) auf l. Damit ist (O_3) bewiesen.

Diese Orthogonalitätsrelation induziert nach (vi) und (vii) offenbar gerade wieder die Streckenkongruenz, von der wir ausgegangen sind. Sie ist nach (8) durch die Streckenkongruenz jedoch nur bezüglich der isotropen Richtung eindeutig bestimmt.

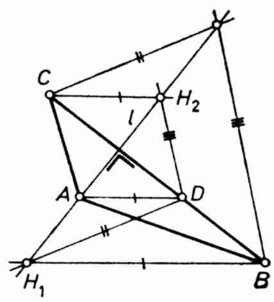

Abb. 5

LITERATUR

[1] Karzel, H.: Fanosche metrische affine Ebenen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *43* (1975), 166–178.
[2] Karzel, H., und R. Stanik: Metrische affine Ebenen. Preprint 1975.
[3] Nevanlinna, R., und P. E. Kustaanheimo: Grundlagen der Geometrie. Birkhäuser-Verlag. Basel und Stuttgart 1976.
[4] Quaisser, E.: Metrische Relationen in affinen Ebenen. Dissertation (A). Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam 1971.
[5] Quaisser, E.: Metrische Relationen in affinen Ebenen. Math. Nachr. *48* (1971), 1–31.

Manuskripteingang: 20. 4. 1977

VERFASSER:

Erhard Quaisser, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam