

Werk

Titel: Die Homologiegruppen singularitätenfreier algebraischer Hyperflächen

Autor: SCHIEMANN, GÜNTHER

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0008|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Die Homologiegruppen singularitätenfreier algebraischer Hyperflächen

GÜNTHER SCHIEMANN

0. Im komplexen projektiven Raum P_{n+1} sei V_n^r eine singularitätenfreie projektive algebraische Hyperfläche der Ordnung r . Wir fragen nach den Homologiegruppen von V mit ganzzahligen Koeffizienten.

Dies wird auf anschauliche Weise beantwortet, wenn V

- eine ebene Kurve ist, z. B. [10], oder
- ein projektiver Raum, vgl. [12], oder
- eine Quadrik, etwa [13], oder
- eine kubische Fläche im P_3 , z. B. [4].

Für beliebige n und r fällt in [3] und [2] die Antwort ab beim Einsatz von Methoden, die mehr liefern, als wir wissen wollen, und die tiefer liegen, als das für unseren Zweck notwendig ist.

Wir wollen im folgenden die Gruppen $H_d(V)$ mit vergleichsweise einfachen homologietheoretischen Hilfsmitteln berechnen.

1. Wir definieren für jedes Indexpaar n, r mit $n \geq 0, r \geq 1$ die Zahl

$$b_n = b_n(V^r) = \begin{cases} r & \text{für } n = 0, \\ (r-1)(r-2) & \text{für } n = 1, \\ b_{n-2} + (r-2)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

und behaupten:

$$H_d(V) \approx \begin{cases} \bigoplus_{b_n} \mathbf{Z} & \text{für } d = n, {}^1) \\ H_d(P_n) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Für $r = 1$ ist (1) richtig, vgl. [12]. Wir setzen das voraus, beschränken uns auf $r \geq 2$ und führen den Beweis durch vollständige Induktion nach n .

Induktionsanfang. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist (1) richtig.

Induktionsvoraussetzung. (1) sei richtig für ein $n_0 \geq 1$.

Der Induktionsschritt erfolgt in den Abschnitten 2 bis 5.

2. Wir betrachten n_0 als Dimension eines singularitätenfreien Schnittes $W := V \cap P_{n_0}$ mit einer geeigneten Hyperebene P_{n_0} , setzen $n_0 = n - 1$ und beweisen (1) für n , die Dimension von V .

¹⁾ $\mathbf{Z}$ ist der Ring der ganzen Zahlen.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen und o. B. d. A. wählen wir

- als V die Hyperfläche $0 = x_0^r + \dots + x_{n+1}^r$,
- als W und W' die Schnitte von V mit den Hyperebenen P_n ($x_{n+1} = 0$) bzw. P'_n ($x_n = 0$).

W und W' und $U := W \cap W'$ sind singularitätenfrei. Diese spezielle Wahl ermöglicht zusammen mit der Induktionsvoraussetzung die Beschreibung bequemer Repräsentanten für Erzeugende der Gruppen $H_d(W)$, wenn $d \neq 2n - 2$ gilt, und $H_d(U)$, wenn $d \neq 2n - 4$ gilt, sowie die Berechnung der Gruppen $H_d(W, U)$ für alle d .

2.1. Wir beschreiben zunächst Repräsentanten für Erzeugende von $H_d(W)$. (Diese heißen künftig kürzer d -Repräsentanten von W .)

Für alle geraden $d \in \{0, \dots, n - 2, n, \dots, 2n - 2\}$ ist $H_d(W) \approx \mathbf{Z}$, wir brauchen also jeweils nur einen d -Repräsentanten. Als solchen wählen wir – vgl. [8] – einen $P_{d/2}$, wenn $d < n - 1$, oder einen ebenen Schnitt $S_{d/2} := W \cap P_{1+d/2}$ mit $P_{1+d/2} \subset P_n$, wenn $d > n - 1$ ist.

Über $(n - 1)$ -Repräsentanten von W wissen wir fast nichts. Ist $n - 1$ gerade, läßt sich wenigstens so viel sagen: Ein beliebiger ebener Schnitt $S_{(n-1)/2} := W \cap P_{(n+1)/2}$ mit $P_{(n+1)/2} \subset P_n$ ist $(n - 1)$ -Repräsentant von W . Das sehen wir so:

Ist $a := (a_1, \dots, a_{b_{n-1}})$ irgendein $(n - 1)$ -Repräsentantensystem von W , so gibt es mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen m_i eine Relation

$$S \approx m_1 a_1 + \dots + m_{b_{n-1}} a_{b_{n-1}}.$$

Ein $P_{(n-1)/2} \subset W$, der den schnitterzeugenden $P_{(n+1)/2}$ in genau einem Punkte trifft, hat mit S die Schnittzahl 1. Mit a_i habe er die Schnittzahl g_i . Aus dem Homologieprinzip – vgl. [5] – folgt dann

$$1 = m_1 g_1 + \dots + m_{b_{n-1}} g_{b_{n-1}}.$$

Wir ergänzen das Koeffizientensystem $(m_1, \dots)$ zu einer b_{n-1} -reihigen quadratischen Matrix $\mathfrak{M}$ derart, daß für die zu m_i gehörende Unterdeterminante M_i von $\mathfrak{M}$ gilt: $M_i = g_i$. Damit ist $\mathfrak{M}$ eine unimodulare Matrix und $\mathfrak{M}a$ ein System von erzeugenden Homologieklassen, dessen eine durch S repräsentiert werden kann.

Durch im wesentlichen dieselbe Überlegung finden wir: Ein beliebiger $P_{(n-1)/2} \subset W$ ist auch ein $(n - 1)$ -Repräsentant von W . (Daß dieser und der vorher betrachtete Schnitt S ein und demselben Repräsentantensystem angehören können, wird nicht behauptet, jedoch vermutet.)

2.2. Analoge Aussagen wie im vorigen Abschnitt können wir über Repräsentanten von U machen. Insbesondere sehen wir, daß es für jedes gerade $d \in \{0, \dots, 2n - 4\}$ eine erzeugende Klasse von $H_d(W)$ und eine erzeugende Klasse von $H_d(U)$ gibt, die – nach der Inklusion $i: U \rightarrow W$ – durch ein und denselben $P_{d/2} \subset U$ (falls $d \leq n - 2$) bzw. ebenen Schnitt $S_{d/2} \subset U$ (falls $d \geq n - 1$) repräsentiert werden können.

2.3. Wir finden nun

$$H_d(W, U) \approx \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } d = 2n - 2, \\ \bigoplus_{b_{n-1} + b_{n-1} - 1} \mathbf{Z} & \text{für } d = n - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Schreiben wir nämlich die exakte Homologiesequenz des Paares W, U auf und setzen ein, was wir dank der Induktionsvoraussetzung über die Gruppen $H_d(W)$ und $H_d(U)$

wissen, so erkennen wir einige exakte Teilsequenzen:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} H_{2n-2}(W, U) \longrightarrow 0, \quad (2.1)$$

für alle geraden $d \in \{0, \dots, n-3, n, \dots, 2n-4\}$

$$0 \longrightarrow H_{d+1}(W, U) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \longrightarrow H_d(W, U) \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

für gerades $n-1$

$$0 \longrightarrow H_n(W, U) \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \longrightarrow H_{n-1}(W, U) \longrightarrow \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

für ungerades $n-1$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \longrightarrow H_{n-1}(W, U) \longrightarrow \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \longrightarrow H_{n-2}(W, U) \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

Die Exaktheit von (2.1) liefert $H_{2n-2}(W, U) \approx \mathbf{Z}$. Unter Beachtung von 2.1 und 2.2 ist i_* in (2.2) ein Isomorphismus, in (2.3) ein Epimorphismus auf einen der b_{n-1} direkten Summanden, in (2.4) ebenfalls ein Epimorphismus. Daraus und aus der Exaktheit der Folgen (2.2) bis (2.4) folgt der Rest der Behauptung (2).

3. Wir konstruieren in V eine abgeschlossene Punktmenge Q der (topologischen) Dimension $2n-1$ derart, daß sich für $d \neq 2n, 2n-1$ ergibt: $H_d(V) \approx H_d(Q)$.

Dazu verabreden wir die folgenden Bezeichnungen:

- $I := [0, 1]$, $\tau, \tau' \in I$, $\tau^r + \tau'^r = 1$,
- $L := \{0, \dots, r-1\}$, $\sigma := e^{2i\pi/r}$, $\varrho := e^{i\pi/r}$.

3.1. Es sei $Y := (y_0, \dots, y_n, 0)$ ein allgemeiner Punkt von W . Wir definieren r stetige Abbildungen $F^l: W \times I \rightarrow V$, $l \in L$, durch

$$F^l(Y, \tau) := (y_0, \dots, y_{n-1}, y_n \tau, y_n \sigma^l \tau').$$

Eine partielle Abbildung mit konstantem τ bezeichnen wir mit F^l_* . Der Definition von F^l entnehmen wir:

- $F^l_*(W) = W$, $F^l_*(W) = W'$ für alle $l \in L$.
- $F^l(W \times I) \cap F^j(W \times I) = W \cup W'$ für $l \neq j$.
- $F^l(U \times I) = U$ für alle $l \in L$.

Nunmehr definieren wir

$$Q := \bigcup_{l \in L} F^l(W \times I).^{1)}$$

Wir können W — als algebraische Mannigfaltigkeit — zu einem endlichen, orientierten, nicht-augmentierten Zellenkomplex unterteilen. Diese Eigenschaft überträgt sich durch die „Prismenkonstruktion“ — vgl. [6] — auf $W \times I$ und von dort auf die $F^l(W \times I)$ und auf Q . Wir können also auch auf Q Homologiegruppen definieren.

3.2. Wir wollen zeigen, daß $V - Q$ in r paarweise disjunkte offene Teilmengen zerfällt, jede von einfachem Zusammenhang.

¹⁾ Zur Veranschaulichung betrachte man V als die Gesamtheit der Schnitte, die die Hyper-ebenen des Büschels mit dem Träger $x_{n+1} = x_n = 0$ auf V erzeugen. Als Büschelparameter diene ein allgemeiner Punkt $(0, \dots, 0, t_0, t_1)$ der zu dem Büschelträger windschiefen „Kante“ T des „Koordinatensimplexes“ von P_{n+1} . Dann ist Q gerade die Vereinigung jener — sämtlich zu W homöomorpher — Schnitte, deren Parameterpunkt $t_0: t_1$ auf einem der r „Meridiane“ von T liegt, die durch je eines der Punktetripel $1:0, 1:\sigma^l, 0:1$ bestimmt sind, $l \in L$.

Wir projizieren V aus $(0, \dots, 0, 1)$ auf P_n , vgl. Abschnitt 2. Die Projektion bezeichnen wir mit p . P_n wird durch $p(V)$ r -fach überlagert. Das Verzweigungsgebilde der Überlagerung ist W .

Jeder Weg $w \subset V - W$ zwischen zwei beliebigen verschiedenen Punkten A und B , von denen wir nur $p(A) = p(B)$ verlangen, wird auf einen geschlossenen Weg $p(w)$ projiziert. In $P_n - W$ ist $p(w)$ nicht nullhomotop.

Wir nehmen das Gegenteil an: $p(w)$ sei homotop zu dem „Punktweg“ $p(A)$. Dann gibt es — vgl. [9], Hochheben von Homotopien — einen Weg $w' \subset V - W$ mit $p(w') = p(A)$. Das ist aber ein Widerspruch: Das vollständige Urbild von $p(A)$ ist ein r -Tupel diskreter Punkte und enthält keinen Weg von A nach B .

Die Projektion von V impliziert die von Q :

$$p(Q) = (y_0, \dots, y_{n-1}, y_n \tau, 0) =: Q''.$$

Q'' enthält insbesondere W und den durch $x_{n+1} = x_n = 0$ definierten P_{n-1} . Dieser ist Deformationsretrakt von Q'' .

$P_n - Q''$ ist einfach zusammenhängend.

Wir können, um dies zu zeigen, mit affinen Koordinaten $(x_0, \dots, x_{n-1})$ rechnen, denn $P_n - Q''$ liegt in dem affinen Raum $P_n - P_{n-1}$. Durch $O := (0, \dots, 0)$ und einen beliebigen Punkt $X \in P_n - Q''$, $X \neq O$, $X := (v_0, \dots, v_{n-1})$, wird eindeutig eine affine Gerade $OX \subset P_n - P_{n-1}$ bestimmt. Wir denken OX als reelle euklidische Ebene mit O als Ursprung. Ihre Metrik werde durch die o. B. d. A. euklidisch vorausgesetzte Metrik von $P_n - P_{n-1}$ induziert. $\|X\| := \sqrt{|v_0|^2 + \dots + |v_{n-1}|^2}$ ist dann die Länge der Strecke $\overline{OX}$.

Die Gerade OX schneidet Q''

- nicht, wenn $v_0^r + \dots + v_{n-1}^r = 0$;
- sonst in r Strahlen s_l , $l \in L$, die zentralsymmetrisch bezüglich O liegen; s_l habe den Anfangspunkt $X_l := \left(\rho \sigma^l / \sqrt[r]{v_0^r + \dots + v_{n-1}^r} \right) X$ mit beliebig fixiertem Wurzelwert und $\frac{1}{\tau} X_l$ als „allgemeinem Punkt“¹⁾, $0 < \tau \leq 1$.

Also ist $P_n - Q''$ die Punktmenge eines Büschels komplexer affiner Geraden durch O , die „fast alle“ — nämlich bis auf jene, die Q'' nicht treffen — durch Wegnahme der Strahlen s_l aufgeschlitzt sind. $P_n - Q''$ ist bogenweise zusammenhängend, denn jeder Punkt $X \in P_n - Q''$ kann — z. B. in OX durch die Strecke $\overline{OX}$ — mit O verbunden werden. Zwei beliebige Punkte von $P_n - Q''$ bestimmen bereits die Homotopieklasse ihrer Verbindungswege, denn jeder Weg w von A nach B ist homotop zu $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$. Man betrachte hierzu den Verbindungskegel OW , d. h. die Vereinigung aller Strecken $\overline{OX}$ mit $X \in w$.

Damit ist der einfache Zusammenhang von $P_n - Q''$ gezeigt.

In $P_n - Q''$ ist also jeder geschlossene Weg nullhomotop. Dann gibt es, wie wir gesehen haben, in $V - Q$ keinen Weg, der zwei Punkte A und B mit $p(A) = p(B)$ verbindet. Also zerfällt $V - Q$ in r paarweise disjunkte offene Teilmengen $p_i^{-1}(P_n - Q'')$, $i \in L$, deren jede zu jedem Punkt $A \in P_n - Q''$ genau ein Urbild $A_i := p_i^{-1}(A)$ enthält. Damit ist jedes p_i^{-1} eine eindeutige Abbildung.

Da weiter jedes p_i^{-1} und seine Umkehrung p stetig sind — das Urbild jeder offenen Menge ist offen —, ist jedes p_i^{-1} eine topologische Abbildung.

Daher ist $V - Q$ homöomorph zur „topologischen Summe“ — vgl. [9] — aus r Exemplaren $P_n - Q''$, bezeichnet durch $\sum_r (P_n - Q'')$.

¹⁾ Bei einem nicht-algebraischen Gebilde von „allgemeinem Punkt“ zu sprechen ist nicht üblich, hier aber nicht zu mißdeuten.

3.3. Wir zeigen jetzt $H_d(V) \approx H_d(Q)$ für $d \neq 2n, 2n - 1$. Weil P_{n-1} Deformationsretrakt von Q'' ist, sind die exakten Homologiefolgen der Paare P_n, Q'' und P_n, P_{n-1} isomorph, vgl. [9]. Insbesondere ist $H_d(P_n, Q'') \approx H_d(P_n, P_{n-1})$. Bei der Inklusion $i: P_{n-1} \rightarrow P_n$ kann für jedes $d \neq 2n$ ein d -Repräsentant von P_{n-1} mit einem solchen von P_n identifiziert werden, vgl. [12]. Daher ist in der Homologiefolge des Paares P_n, P_{n-1} der von i induzierte Homomorphismus i_* ein Isomorphismus. Wegen $H_d(P_n) \approx H_d(P_{n-1}) \approx 0$ für alle ungeraden d läßt sich dann aus der Homologiefolge ablesen:

$$H_d(P_n, P_{n-1}) \approx H_d(P_n, Q'') \approx \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für } d = 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach einem Satz aus [1] induziert ein relativer Homöomorphismus zweier Raumpaare einen Isomorphismus ihrer relativen Homologiegruppen. Die Raumpaare V, Q und $\sum_r P_n, \sum_r Q''$ sind relativ homöomorph, vgl. Abschnitt 3.2. Daher gilt

$$H_d(V, Q) \approx H_d(\sum P_n, \sum Q'')$$

oder, vgl. [9],

$$\approx \bigoplus_r H_d(P_n, Q'')$$

oder, s. o.,

$$\approx \begin{cases} \bigoplus_r \mathbf{Z} & \text{für } d = 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der exakten Homologiefolge des Paares V, Q kennen wir nunmehr

- alle $H_d(V, Q)$,
- $H_{2n}(V) \approx \mathbf{Z}$, denn V ist eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit, vgl. [6],
und
- $H_{2n-1}(Q) \approx \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z}$, denn die $r - 1$ Zyklen $F^l(W \times I) - F^0(W \times I)$, $l \in \{1, \dots, r - 1\}$,
bilden ein System von $(2n - 1)$ -Repräsentanten von Q .

Setzen wir dies in die Folge von V, Q ein, so erhalten wir die exakten Teilfolgen

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \bigoplus_r \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial_*} \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} H_{2n-1}(V) \longrightarrow 0$$

und für alle $d \neq 2n, 2n - 1$

$$0 \longrightarrow H_d(Q) \xrightarrow{i_*} H_d(V) \longrightarrow 0.$$

Wegen der Exaktheit der Folge kann $H_{2n-1}(V)$ keinen freien Summanden haben, und als orientierbare topologische Mannigfaltigkeit hat V in der Dimension $2n - 1$ keine Torsion, vgl. [10]. Also ist

$$H_{2n-1}(V) \approx 0.$$

Für die Dimensionen $d \neq 2n, 2n - 1$ folgt zunächst nur

$$H_d(Q) \approx H_d(V). \quad (3)$$

Wir kommen darauf zurück.

4. Wir berechnen jetzt die Gruppen $H_d(Q, W)$.

Bezeichnen wir mit M das in der Fußnote S. 93 beschriebene Meridian- r -Tupel von

T und mit N den „Nordpol“ von T , so ist

$Q - W$ homöomorph zu $(W - U) \times (M - N) = W \times M - (W \times N \cup U \times M)$.

Mit anderen Worten:

Q, W ist relativ homöomorph zu $W \times M$, $W \times N \cup U \times M =: (W, U) \times (M, N)$, vgl. [11].

Nach dem bereits benutzten Satz aus [1] gilt dann zunächst

$$H_d(Q, W) \approx H_d((W, U) \times (M, N)).$$

Auf die rechte Seite wenden wir die Künneth-Formel an, vgl. [11], und erhalten

$$H_d(Q, W) \approx \bigoplus_{d' + d'' = d} (H_{d'}(W, U) \otimes H_{d''}(M, N)).$$

Von den $H_d(M, N)$ ist nur $H_1(M, N) \approx \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z}$ nicht trivial. Die $H_d(W, U)$ kennen wir aus (2). Damit erhalten wir

$$H_d(Q, W) \approx \begin{cases} \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z} & \text{für } d = 2n - 1, \\ \bigoplus_{(r-1)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1)} \mathbf{Z} & \text{für } d = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5. Wir kommen jetzt zu den $H_d(V)$.

Die Homologiefolge des Paares Q, W zerfällt unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung und des Ergebnisses von Abschnitt 4 in exakte Teilfolgen. Zunächst gilt

$$0 \longrightarrow H_{2n-1}(Q) \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} H_{2n-2}(Q) \longrightarrow 0.$$

Hierin kennen wir bereits $H_{2n-1}(Q) \approx \bigoplus_{r-1} \mathbf{Z}$ aus 3.3. Die Exaktheit liefert dann

$$H_{2n-2}(Q) \approx \mathbf{Z},$$

mit (3) also auch $H_{2n-2}(V) \approx \mathbf{Z}$. Für alle $d \in \{0, \dots, n-2, n+1, \dots, 2n-3\}$ erhalten wir

$$0 \longrightarrow H_d(W) \xrightarrow{i_*} H_d(Q) \longrightarrow 0$$

und daraus

$$H_d(W) \approx H_d(Q) \approx H_d(V) \approx \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{für gerades } d, \\ 0 & \text{für ungerades } d. \end{cases}$$

Es ist noch $d = n - 1, n$ zu erledigen. Für gerades $n - 1$ erhalten wir

$$0 \longrightarrow H_n(Q) \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{(r-1)(b_{n-1} + b_{n-2} - 1)} \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial_*} \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(Q) \longrightarrow 0.$$

Wir stellen fest:

- $H_n(Q)$ ist torsionsfrei wegen der Exaktheit der Folge.
- Dann ist $H_n(V)$ torsionsfrei wegen (3) und $H_{n-1}(V)$ torsionsfrei wegen des Poincaréschen Dualitätssatzes (PDS).
- Die Bettizahl von $H_{n-1}(V)$ ist die von $H_{n+1}(V)$, vgl. PDS, also = 1.
- Das bedeutet $H_{n-1}(V) \approx \mathbf{Z}$ und wegen (3) auch $H_{n-1}(Q) \approx \mathbf{Z}$.
- Die Exaktheit der Folge und (3) liefern schließlich

$$H_n(Q) \approx H_n(V) \approx \bigoplus_{b_n} \mathbf{Z}.$$

Für ungerades $n - 1$ heißt die Teilfolge

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow H_n(Q) \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{(r-1)(b_{n-1} + b_{n-1}-1)} \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial_*} \bigoplus_{b_{n-1}} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(Q) \longrightarrow 0.$$

Wie soeben benutzen wir deren Exaktheit und den PDS und erhalten

$$H_{n-1}(Q) \approx H_{n-1}(V) \approx 0$$

und

$$H_n(Q) \approx H_n(V) \approx \bigoplus_{b_n} \mathbf{Z}.$$

Damit ist der Satz (1) bewiesen.

LITERATUR

- [1] DRECHSLER, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. *Math. Nachr.* **46** (1970), 107—136.
- [2] FÁRY, I.: Cohomologie des variétés algébriques. *Ann. Math.* **63** (1957), 21—73.
- [3] HIRZEBRUCH, F.: Der Satz von Riemann-Roch in faisceau-theoretischer Formulierung, einige Anwendungen und offene Fragen. *Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam III* (1954), S. 457—473.
- [4] KELLER, O.-H.: Die Homologiegruppen der Flächen 3. Ordnung. *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Klasse*, **107** (1965), 1—15.
- [5] KELLER, O.-H.: Über eine Definition von S. Lefschetz in der topologischen Schnitttheorie, *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Klasse*, **108** (1969), 1—29.
- [6] KELLER, O.-H.: Vorlesungen über algebraische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1974.
- [7] SCHIEMANN, G.: Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **4** (1975), 65—70.
- [8] SCHIEMANN, G.: Die Homologiegruppen der Umgebungsränder gewisser Kegelspitzen. *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **6** (1977), 7—11.
- [9] SCHUBERT, H.: *Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart 1969.
- [10] SEIFERT, H., und W. THRELFAH: *Topologie*. B. G. Teubner, Leipzig 1934.
- [11] SPANIER, E. H.: *Algebraic Topology*, New York 1966.
- [12] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. *Math. Ann.* **102** (1929), 337—362.
- [13] VAN DER WAERDEN, B. L.: Zur algebraischen Geometrie IV: Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen in der Liniengeometrie. *Math. Ann.* **109** (1933), 7—12.

Manuskripteingang: 18. 2. 1977

VERFASSEN:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Halle—Wittenberg

