Beiträge zur Algebra und Geometrie
8 (1979), 67–89

Über die Existenz simplizialer d-Polytope mit vorgeschriebener Seitenstruktur

Wolfgang Schöne

1. Einleitung

Unter einem d-Polytop versteht man eine kompakte und konvexe Punktmenge eines euklidischen Raumes R^n $(n \geqq d)$ mit endlich vielen Extremalpunkten, deren affine Hülle die Dimension d hat. Der Durchschnitt einer Stützhyperebene des Polytops mit diesem wird als (eigentliche) Seite des Polytops bezeichnet. Man unterscheitet Seiten der Dimension 0, die Eckpunkte des Polytops, Seiten der Dimension 1, die Kanten des Polytops, Seiten der Dimension 2, die 2-Seiten usw. bis zu den Seiten der Dimension $d - 1$, auch $(d - 1)$-Seiten genannt. Zu diesen eigentlichen Seiten kommen noch die leere Menge und das Polytop selbst als zwei uneigentliche Seiten der Dimension -1 und d hinzu. Die eigentlichen und uneigentlichen Seiten eines d-Polytops P bilden bezüglich der mengentheoretischen Inklusion einen Verband, den Seitenverband $\mathscr{F}(P)$ des d-Polytops P. Ein d-Polytop heißt simplizial, wenn seine $(d - 1)$-Seiten sämtlich $(d - 1)$-Simplexe sind. Es heißt einfach, wenn jeder seiner Eckpunkte mit genau d Seiten der Dimension $d - 1$ inzidiert. Die Eckpunktmenge eines d-Polytops P werde mit vert P bezeichnet. Sie stimmt überein mit der Menge der Extremalpunkte von P. Zwei d-Polytope P, P' heißen zueinander kombinatorisch äquivalent, wenn es eine eineindeutige Abbildung φ der Seiten von P auf die Seiten von P' gibt, derart, daß aus $F_1, F_2 \in \mathscr{F}(P)$ und $F_1 \subseteqq F_2$ stets $\varphi(F_1)$, $\varphi(F_2) \in \mathscr{F}(P')$ und $\varphi(F_1) \subseteqq \varphi(F_2)$ folgt. Zwei d-Polytope sind genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn ihre Seitenverbände isomorph sind. Zwei d-Polytope $P, P' \subset R^d$ heißen affin, äquivalent, wenn es eine affine Abbildung des R^d auf sich gibt, die das Polytop P auf das Polytop P' abbildet. Ein d-Polytop wird auch als konvexes Polytop der Dimension d bezeichnet.
Ein euklidischer Komplex $\mathfrak{K}$ ist eine nichtleere, höchstens abzählbare Menge von konvexen Polytopen, den sogenannten Zellen, in einem euklidischen Raum beliebiger, endlicher Dimension mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist z eine Zelle aus $\mathfrak{K}$ und z' eine Seite von z, so gehört z' zu $\mathfrak{K}$.
b) Der Durchschnitt zweier Zellen von $\mathfrak{K}$ ist leer oder eine gemeinsame Seite beider Zellen.
c) Jeder Punkt einer Zelle aus $\mathfrak{K}$ besitzt eine Umgebung, die mit nur endlich vielen Zellen von $\mathfrak{K}$ Punkte gemeinsam hat.

Das Maximum der Dimensionszahlen aller Zellen eines Komplexes $\mathfrak{K}$ heißt die Dimension von $\mathfrak{K}$. Eine Zelle eines Komplexes $\mathfrak{K}$ heißt eine Grundzelle, wenn sie nicht echte Seite irgendeiner Zelle aus $\mathfrak{K}$ ist. Ein euklidischer Komplex heißt endlich, wenn er nur endlich viele Zellen enthält. Er heißt simplizial, wenn alle seine Zellen

Simplexe sind. Für endliche Komplexe ist die Bedingung c) überflüssig (vgl. [6], S. 313). Ein simplizialer Komplex $\mathfrak{K}$ der Dimension n wird rein genannt, wenn jedes l-Simplex von $\mathfrak{K}$ ($l < n$) mit mindestens einem n-Simplex von $\mathfrak{K}$ inzidiert. Im folgenden werden Pseudomannigfaltigkeiten im Sinn des Lehrbuches von SEIFERT-THRELLFALL ([9], S. 88) betrachtet. Eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit der Dimension n ist ein reiner, endlicher, n-dimensionaler, simplizialer Komplex ($n \geqq 1$) mit den beiden folgenden Eigenschaften. Jedes (n — 1)-Simplex ist mit genau zwei n-Simplexen inzident (Unverzweigtheitsbedingung). Je zwei n-Simplexe lassen sich durch eine Reihe von abwechselnd n- und (n — 1)-Simplexen verbinden, deren jedes mit dem folgenden inzident ist (Verbindbarkeitsbedingung).
Das System der Seiten eines d-Polytops P stellt einen (d — 1)-dimensionalen euklidischen Komplex dar, den man als Randkomplex $bd(P)$ des d-Polytops P bezeichnet. Der Randkomplex $bd(P)$ eines simplizialen d-Polytops P ist eine geschlossene (d — 1)-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit.
Das System der Eckpunkte und Kanten eines d-Polytops einschließlich ihrer Inzidenzbeziehungen heißt der Graph oder das 1-Skelett des d-Polytops. Wie B. GRÜNBAUM bemerkt (vgl. [1], S. 1134, 1136), ist die Frage der Charakterisierung der Graphen der d-Polytope allgemein noch nicht gelöst und wahrscheinlich sehr schwierig. Für $d = 3$ wird diese Frage durch den Satz von STEINITZ ([2], S. 235) beantwortet. Dieser besagt, daß ein schlichter, ungerichteter, zusammenhängender Graph genau dann zum 1-Skelett eines 3-Polytops isomorph ist, wenn er planar und 3fach zusammenhängend ist. Wegen der graphentheoretischen Begriffe vergleiche man den Abschnitt 2 dieser Arbeit. Im Jahre 1961 zeigte M. L. BALINSKI (vgl. [1], S. 1134) für den Fall $d \geqq 3$, daß der Graph eines d-Polytops stets d-fach zusammenhängend ist. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend. Für den Sonderfall der einfachen d-Polytope konnte der Verfasser hinreichende und notwendige Bedingungen ableiten (vgl. [8], S. 169—178). Dieses Ergebnis wird im Abschnitt 2 dieser Arbeit ohne Beweis dargestellt. Im Zusammenhang damit wird in der Arbeit die Aufgabe behandelt, hinreichende und notwendige Bedingungen dafür anzugeben, daß eine vorgelegte (d — 1)-dimensionale, geschlossene Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ zum Randkomplex $bd(P)$ eines simplizialen d-Polytops P isomorph ist. Um solche Bedingungen zu finden, ist es notwendig, zunächst die Theorie der Gale-Transformierten (vgl. [1], S. 1166, und [2], S. 85) zu behandeln. Mit Hilfe dieser Theorie gelingt es, einen Satz zu beweisen, der besagt, daß es zu jedem d-Polytop mit n Eckpunkten ein kombinatorisch äquivalentes, ja sogar affin äquivalentes gibt, das durch Orthogonalprojektion eines regulären (n — 1)-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ in einen geeigneten Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$ entsteht. Dies lehrt, daß man sich beim Existenznachweis eines simplizialen d-Polytops, dessen Seitenstruktur durch eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit der Dimension d — 1 gegeben ist, auf die Betrachtung von d-Polytopen, die durch Orthogonalprojektion regulärer Simplexe entstehen, beschränken kann. Polytope dieser Art wurden auch schon in [3] untersucht. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich dann ein weiterer Satz beweisen, der notwendige und hinreichende Bedingungen dafür liefert, daß eine gegebene geschlossene (d — 1)-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph zum Randkomplex $bd(P)$ eines simplizialen d-Polytops P ist. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind zwar im allgemeinen schwer überprüfbar, doch gibt es Sonderfälle, in denen diese Überprüfung leichter möglich ist. Ein solcher Sonderfall, der auf eine bestimmte Klasse von simplizialen bzw. einfachen d-Polytopen führt, wird im Abschnitt 7 behandelt. Außerdem besteht die Aussicht, daß man durch den Satz zu rein kombinatorischen Bedingungen gelangt, die das gleiche wie die im Satz geforderten Voraussetzungen leisten. Damit wäre auch im allgemeinen Fall eine Charakterisierung der Graphen einfacher und simplizialer d-Polytope möglich.

Schließlich wird gezeigt, daß die Voraussetzungen des zuletzt erwähnten Satzes gleichwertig damit sind, daß ein bestimmtes System von Gleichungen und Ungleichungen nach Wahl gewisser Parameter eindeutig lösbar ist, und daß es noch ein zweites derartiges System mit der gleichen Eigenschaft gibt. Hieraus folgt sofort, daß die Existenz eines simplizialen d-Polytops die Lösbarkeit gewisser, ziemlich umfangreicher Systeme von Gleichungen und Ungleichungen nach sich zieht, was für die Theorie der Ungleichungssysteme von Nutzen sein kann.

Außerdem ist der gefundene Satz von Interesse für den Fall, daß man eine lineare Optimierungsaufgabe durch Polarisieren lösen möchte.

Die Frage der Isomorphie einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit zum Randkomplex eines simplizialen Polytops hängt eng mit einem berühmten, bisher ungelösten Homöomorphieproblem der kombinatorischen Topologie zusammen. Es handelt sich dabei um die Frage, wann ein Komplex, zum Beispiel eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit der Dimension n, homöomorph zu einer n-Sphäre ist.

Von H. Poincaré wurde die Vermutung ausgesprochen, daß eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit der Dimension 3, deren Fundamentalgruppe aus dem Einselement besteht, stets homöomorph zu einer 3-Sphäre ist (vgl. [9], S. 157). Diese Vermutung ist bis heute noch unbewiesen. Jedoch konnte die sogenannte verallgemeinerte Poincarésche Vermutung für die Dimensionen $n \geqq 5$ inzwischen bewiesen werden (vgl. [10], S. 373).

Ist nun eine geschlossene $(d-1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops, so ist sie homöomorph zu einer $(d-1)$-Sphäre, weil es der Rand des d-Polytops auch ist. Die Arbeit stellt somit einen Beitrag zu dem erwähnten Homöomorphieproblem dar, und da der vorhin genannte Satz für alle Dimensionen d mit $2 \leqq d$ gilt, ist nicht auszuschließen, daß man mit seiner Hilfe auch noch zu Ergebnissen über die Poincarésche Vermutung gelangt.

Schließlich möchte der Verfasser dieser Arbeit es nicht versäumen, Herrn Professor Keller für zahlreiche Hinweise und Anregungen zu danken. Dadurch wurde die Arbeit wesentlich gefördert.

2. Graphen und konvexe Polytope

Da im Zusammenhang mit d-Polytopen auch ungerichtete Graphen von Bedeutung sind, werden zunächst einige grundlegende Begriffe aus der Graphentheorie angeführt (vgl. [7]).

Ein ungerichteter Graph $\mathbf{G}$ ist ein Paar $(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ von zwei Mengen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{U}$ mit folgenden Eigenschaften. Die Elemente von $\mathbf{X}$ heißen die Knotenpunkte, die Elemente von $\mathbf{U}$ die Kanten des Graphen $\mathbf{G}$. Beide Mengen haben kein gemeinsames Element. Es gibt eine auf $\mathbf{U}$ erklärte Funktion, die Inzidenzfunktion, die jedem $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ eindeutig ein ungeordnetes Paar $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nicht notwendig verschiedener Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ von $\mathbf{X}$ zuordnet. Man sagt, die Kante $\mathbf{u}$ verbindet die Knotenpunkte $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, oder $\mathbf{u}$ indiziert mit $\mathbf{x}$ und mit $\mathbf{y}$, wobei man $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Endknotenpunkte der Kante $\mathbf{u}$ bezeichnet. Ist speziell $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, so nennt man $\mathbf{u}$ eine Schlinge. Zwei durch eine Kante verbundene Knotenpunkte heißen adjazent. Ebenso heißen zwei Kanten, die mit demselben Knotenpunkt inzidieren, adjazent. Zwei oder mehr Kanten, die dieselben zwei Knotenpunkte verbinden, heißen Parallelkanten. Ein Graph, der weder Parallelkanten noch Schlingen besitzt, wird schlicht genannt. Wenn bei einem Graphen $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ die Knotenpunktmenge $\mathbf{X}$ und die Kantenmenge $\mathbf{U}$ endlich sind, so heißt $\mathbf{G}$ ein endlicher Graph. Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zwei Knotenpunkte eines ungerichteten Graphen, so nennt man eine alternierende Folge von Knotenpunkten und Kanten $\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{y}$ des Graphen einen die Knotenpunkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ verbindenden Weg, wenn alle in der Folge auftretenden Knotenpunkte und Kanten verschieden sind und jede Kante mit den zwei Knotenpunkten inzidiert, von denen der eine in der Folge unmittelbar vor, der andere unmittelbar nach ihr steht. Der Knotenpunkt $\mathbf{x}$ heißt der Anfangspunkt, $\mathbf{y}$ der Endpunkt des Weges. Ein Weg, bei dem der Anfangspunkt mit dem Endpunkt zusammenfällt, während alle übrigen Knotenpunkte und Kanten verschieden sind, heißt ein Kreis. Die Anzahl der Kanten eines Weges bzw. Kreises heißt die Länge des Weges bzw. Kreises. Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Knotenpunkte durch einen Weg im Graphen verbunden sind. Ein zusammenhängender, ungerichteter Graph heißt d-fach zusammenhängend, wenn je zwei seiner Knotenpunkte durch d Wege im Graphen verbunden sind, die außer Anfangs- und Endpunkt keine Knotenpunkte gemeinsam haben. Wenn im folgenden Graphen erwähnt werden, so handelt es sich, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, stets um ungerichtete, schlichte, endliche und zusammenhängende Graphen.

Ein Graph $\mathbf{G}' = (\mathbf{X}', \mathbf{U}')$ heißt Untergraph eines Graphen $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$, wenn $\mathbf{X}' \subseteq \mathbf{X}$ und $\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{U}$ gilt.

Ein Graph $\mathbf{G}'$ wird isomorph zu einem Graphen $\mathbf{G}$ genannt, wenn es eine eineindeutige Abbildung gibt, die jedem Knotenpunkt von $\mathbf{G}'$ einen Knotenpunkt von $\mathbf{G}$, jeder Kante von $\mathbf{G}'$ eine Kante von $\mathbf{G}$ zuordnet, so daß jedem inzidenten Paar Knotenpunkt — Kante von $\mathbf{G}'$ eineindeutig ein inzidentes Paar Knotenpunkt — Kante von $\mathbf{G}$ entspricht. Die Anzahl der mit einem Knotenpunkt inzidierenden Kanten, wobei die Schlingen doppelt gezählt werden, heißt der lokale Grad oder die Valenz des Knotenpunktes. Ein Graph heißt regulär vom Grad d, wenn jeder seiner Knotenpunkte die Valenz d hat. Ein regulärer Graph vom Grad 3 wird auch als kubischer Graph bezeichnet. Ein ungerichterer Graph mit n Knotenpunkten heißt ein vollständiger Graph der Ordnung n, wenn jeder seiner Knotenpunkte mit jedem anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

Man kann einen Graphen durch eine Zeichnung veranschaulichen, indem man die Knotenpunkte durch Punkte und die Kanten durch Kurvenbögen oder geradlinige Strecken darstellt und einen Kurvenbogen genau dann in einen der Punkte einlaufen läßt, wenn der Punkt einen Knotenpunkt und der Kurvenbogen eine Kante darstellen, die miteinander inzidieren. Man sagt, daß sich bei einer solchen anschaulichen Darstellung eines Graphen zwei Kanten überschneiden, wenn sich die den Kanten entsprechenden Kurvenbögen in einem Punkt schneiden, der keinen Knotenpunkt darstellt. Ein Graph, der sich ohne Überschneidungen von Kanten auf eine euklidische Ebene bzw. auf die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel zeichnen läßt, heißt planar.

Die Frage, wann ein gegebener Graph der Graph eines d-Polytops ist oder, anders ausgedrückt, wann ein Graph isomorph zum Graph eines d-Polytops ist, läßt sich für $d > 3$, wie schon bemerkt wurde, nicht allgemein beantworten. Sicher ist nur, daß ein solcher Graph schlicht, ungerichtet, zusammenhängend und endlich ist und daß er die von BALINSKI angegebene Bedingung des d-fachen Zusammenhangs erfüllt. Beschränkt man sich auf einfache d-Polytope, so kann man für $d > 3$ den folgenden Satz aufstellen (vgl. [8], S. 169—178).

Ein endlicher Graph ist genau dann isomorph zum Graphen eines einfachen d-Polytops, wenn gilt:

1. *$\mathbf{G}$ ist schlicht, zusammenhängend und regulär vom Grad d.*
2. *In $\mathbf{G}$ existiert ein spezielles System von Kreisen (reguläres Basiskreissystem), das vier mit a), b), c), d) bezeichnete Eigenschaften besitzt.*
3. *Zum dualen Graphen $\mathbf{G}'$ von $\mathbf{G}$ existiert eine passende Gale-Transformierte.*

Dabei wird unter einem speziellen System von Kreisen in einem regulären Graphen vom Grad d ein System K von Kreisen verstanden, das folgende vier Bedingungen erfüllt.

a) Je zwei mit einem Knotenpunkt von $\mathbf{G}$ inzidierende Kanten gehören beide zu genau einem Kreis des Systems K.

b) Zwei verschiedene Kreise von K haben höchstens zwei Knotenpunkte gemeinsam, und wenn dies der Fall ist, sind beide Knotenpunkte adjazent, und die sie verbindende Kante gehört beiden Kreisen an.

Ist $\mathbf{A}_r$ $(3 \leqq r \leqq d)$ ein Untergraph von $\mathbf{G}$, der aus einem Knotenpunkt und r mit ihm inzidierenden Kanten sowie deren Endknotenpunkten besteht, so läßt sich ein Abschließungsprozeß definieren. Dazu erweitert man den Untergraphen $\mathbf{A}_r$ durch schrittweises Hinzufügen von geeigneten Knotenpunkten und Kanten von $\mathbf{G}$ und erhält eine Folge von Untergraphen $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r^0, \mathbf{A}_r^1, \mathbf{A}_r^2, \ldots, \mathbf{A}_r^l, \mathbf{A}_r^{l+1}, \ldots, \mathbf{A}_r^k$ des Graphen $\mathbf{G}$, von denen jeder alle seine Vorgänger als Untergraphen enthält. Für $l = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$ entsteht der Untergraph $\mathbf{A}_r^{l+1}$ aus $\mathbf{A}_r^l$, indem man zwei mit demselben Knotenpunkt inzidierende Kanten von $\mathbf{A}_r^l$ betrachtet, die wegen a) beide zu einem eindeutig bestimmten Kreis k des Systems K gehören, und indem man alle Knotenpunkte und Kanten dieses Kreises k zu $\mathbf{A}_r^l$ hinzufügt, die noch nicht in $\mathbf{A}_r^l$ enthalten sind. Gehört der Kreis k jedoch schon zu $\mathbf{A}_r^l$, so muß man zu zwei anderen adjazenten Kanten von $\mathbf{A}_r^l$ übergehen und den Prozeß ausgehend von diesen beiden Kanten fortsetzen. Nach k Schritten erhält man einen Untergraphen $\mathbf{A}_r^k$ von $\mathbf{G}$ mit der Eigenschaft, daß je zwei seiner Kanten, die mit dem gleichen Knotenpunkt inzidieren, einem Kreis von K angehören, der bereits in $\mathbf{A}_r^k$ enthalten ist. Dann bricht der Abschließungsprozeß ab, und der Untergraph $\mathbf{A}_r^k$ wird mit $\mathbf{G}_r$ bezeichnet. Der Untergraph $\mathbf{G}_r$ ist stets zusammenhängend und regulär von einem Grad $\varrho \geqq r$. Dann lauten die Bedingungen c) und d):

c) Mit $3 \leqq r \leqq d$ sei für jeden Untergraphen $\mathbf{A}_r$ der nach dem Abschließungsprozeß aus $\mathbf{A}_r$ entstandene Untergraph $\mathbf{G}_r$ regulär vom Grad r.

d) Der Durchschnitt zweier durch den Abschließungsprozeß entstandener regulärer Untergraphen sei leer oder zusammenhängend.

Dabei wird unter dem Durchschnitt $\mathbf{G}_i \cap \mathbf{G}_j$ der Untergraphen $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}_j$ von $\mathbf{G}$ der größte Untergraph von $\mathbf{G}$ verstanden, dessen Knotenpunkte und Kanten sowohl zu $\mathbf{G}_i$ als auch zu $\mathbf{G}_j$ gehören. Der Untergraph $\mathbf{G}_i \cap \mathbf{G}_j$ ist wieder regulär von einem Grad $j \leqq \operatorname{Min}(i, l)$. Für die Untergraphen $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ sind die Bedingungen c), d) trivialerweise erfüllt.

Ein spezielles System von Kreisen in einem regulären Graphen, das nur die Bedingungen a) und b) erfüllt, soll im folgenden auch als Basiskreissystem bezeichnet werden. Von D. Haustein (vgl. [2a]) wurde gezeigt, daß ein regulärer Graph, der ein Basiskreissystem enthält, wenn er regulär vom Grad d ist, stets d-fach zusammenhängend ist.

Ein Basiskreissystem werde regulär genannt, wenn es auch noch den Bedingungen c) und d) genügt.

Die Kreise eines Basiskreissystems sind sehnenlos, d. h., jede Kante, die zwei Knotenpunkte eines Kreises des Systems verbindet, gehört zum Kreis. Enthält ein regulärer Graph ein Basiskreissystem, so gehört jeder Kreis der Länge 3 des Graphen zum System.

Um die Voraussetzung 3 des zitierten Satzes verstehen zu können, lese man den Abschnitt 4 dieser Arbeit „Über Gale-Transformierte" nach. Die Voraussetzung 3 des Satzes kann auch durch die einfachere Voraussetzung 3' „Der zum Graphen $\mathbf{G}$

duale Graph $\mathbf{G}'$ ist isomorph zum Graphen eines simplizialen d-Polytops mit einem durch $\mathbf{G}'$ gegebenen Randkomplex" ersetzt werden.
Dies ist auch der Grund, warum in dieser Arbeit die Frage untersucht wird, wann ein gegebener Graph isomorph zum Graphen eines simplizialen d-Polytops ist.
Erfüllt ein regulärer Graph $\mathbf{G}$ vom Grad d ($d > 3$) die Bedingungen des erwähnten Satzes, so kann man ihm immer einen dualen Graphen $\mathbf{G}'$ zuordnen. Es sei $\mathbf{R}_k = \{\mathbf{G}_k^l\}_{l=1,2,\ldots,f_k}$ das durch den Abschließungsprozeß gefundene System von regulären Untergraphen vom Grad k des Graphen $\mathbf{G}$. Dabei kann $k = 0, 1, 2, \ldots, \boldsymbol{d} - 1$ sein. Jedem Untergraphen $\mathbf{G}_{d-1}^i \in \{\mathbf{G}_{d-1}^l\}_{l=1,2,\ldots,f_{d-1}}$ von $\mathbf{G}$ ordnet man einen Knoten-

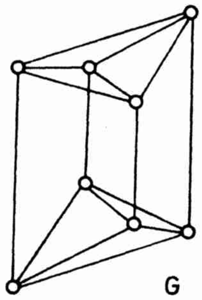

Abb. 1

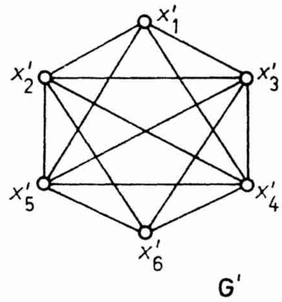

Abb. 2

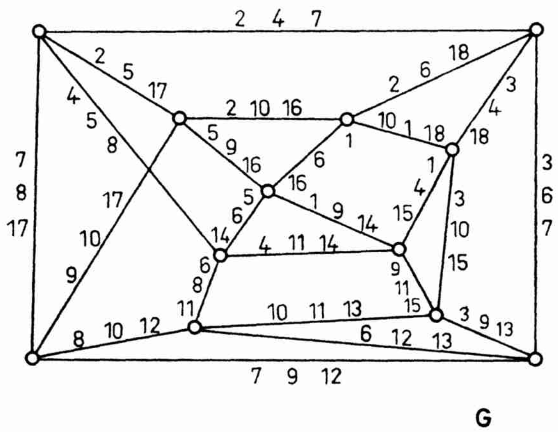

Abb. 3

punkt $\mathbf{x}_i'$ von $\mathbf{G}'$ zu. Zwei Knotenpunkte $\mathbf{x}_i'$, $\mathbf{x}_j'$ von $\mathbf{G}'$ sind genau dann adjazent, wenn der Durchschnitt $\mathbf{G}_{d-1}^i \cap \mathbf{G}_{d-1}^j$ nicht leer ist. Der Durchschnitt $\mathbf{G}_{d-1}^i \cap \mathbf{G}_{d-1}^j$ ist, wenn er nicht leer ist, ein regulärer Untergraph vom Grad $d - 2$ des Systems $\{\mathbf{G}_{d-2}^l\}_{l=1,2,\ldots,f_{d-2}}$. Jedem regulären Untergraphen $\mathbf{G}_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, d - 1$) aus dem System $\mathbf{R}_k$ des Graphen $\mathbf{G}$ entspricht eineindeutig ein vollständiger Untergraph $\mathbf{V}_{d-k}$ der Ordnung $d - k$ von $\mathbf{G}'$. Für den dualen Graphen $\mathbf{G}'$ ist besonders das System $\mathbf{V}^d = \{\mathbf{V}_{di}\}_{i=1,2,\ldots,f_0}$ von vollständigen Untergraphen der Ordnung d von Bedeutung. Jedem vollständigen Untergraph $\mathbf{V}_{di} \in \mathbf{V}^d$ entspricht eineindeutig ein Knotenpunkt $\mathbf{x}_i$ von $\mathbf{G}$, wenn man $\mathbf{x}_i$ als regulären Untergraphen $\mathbf{G}_0^i$ vom Grad 0 auffaßt. In Abb. 1 ist ein regulärer Graph vom Grad 4 dargestellt, der ein reguläres Basiskreissystem enthält, das aus 14 Kreisen besteht. Es sind 8 Dreiecke und 6 als konvexe Vierecke gezeichnete Kreise der Länge 4. Abb. 2 zeigt den zugehörigen dualen Graphen. Er enthält ein System von 8 vollständigen Untergraphen der Ordnung 4, die durch die Eckpunktmengen $\{x_1', x_2', x_3', x_4'\}$, $\{x_1', x_2', x_3', x_5'\}$, $\{x_1', x_2', x_4', x_5'\}$, $\{x_1', x_3', x_4', x_5'\}$

und die aus diesen entstehenden vier Eckpunktmengen gegeben sind, wenn man x_1' durch x_6' ersetzt. Abb. 3 zeigt einen Graphen, der regulär vom Grad 4 ist und ein Kreissystem enthält, das b) nicht erfüllt. Jede Kante des Graphen ist mit drei Nummern versehen, und die Kanten eines Kreises des Systems haben ein und dieselbe Nummer gemeinsam. Schließlich werde noch folgendes vereinbart. Ist A eine Menge, so werde mit card A die Kardinalzahl von A bezeichnet. Falls A endlich ist, so ist card A gleich der Anzahl der Elemente von A.

3. Pseudomannigfaltigkeiten mit einer speziellen Eigenschaft

Es sei $\mathbf{G}' = (\mathbf{X}', \mathbf{U}')$ der duale Graph eines regulären Graphen $\mathbf{G}$, der ein reguläres Basiskreissystem enthält. Der Graph $\mathbf{G}'$ habe n Knotenpunkte, und das in $\mathbf{G}'$ enthaltene System $\mathbf{V}^d$ bestehe aus m vollständigen Untergraphen $\mathbf{V}_{di}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ der Ordnung d.

Bettet man $\mathbf{G}'$ in den Randkomplex bdS_{n-1} eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ derart ein, daß die Knotenpunkte von $\mathbf{G}'$ mit den Eckpunkten von S_{n-1} übereinstimmen und die Kanten von $\mathbf{G}'$ zugleich Kanten von S_{n-1} sind, so erhält man eine geschlossene $(d - 1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ im Randkomplex bdS_{n-1}. Diese besteht aus m Randsimplexen $S_{d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ der Dimension $d - 1$ von S_{n-1}. Die Eckpunkte und Kanten des Simplexes $S_{d-1,i}$ entsprechen den Knotenpunkten und Kanten des Untergraphen $\mathbf{V}_{di}$. Außerdem gehören zu $\mathfrak{M}^{d-1}$ noch alle Randsimplexe der Simplexe $S_{d-1,i}$.

Die Gültigkeit der Unverzweigtheitsbedingung folgt daraus, daß den $(d - 1)$-Simplexen von $\mathfrak{M}^{d-1}$ im Graphen $\mathbf{G}$ die Knotenpunkte entsprechen, und da in $\mathbf{G}$ jeder Knotenpunkt mit genau d anderen durch eine Kante verbunden ist, hat jedes $(d - 1)$-Simplex von $\mathfrak{M}^{d-1}$ mit genau d anderen $(d - 1)$-Simplexen von $\mathfrak{M}^{d-1}$ ein $(d - 2)$-Simplex gemeinsam. Daraus folgt aber, daß jedes $(d - 2)$-Simplex von $\mathfrak{M}^{d-1}$ zu genau zwei $(d - 1)$-Simplexen von $\mathfrak{M}^{d-1}$ gehört. Die Verbindbarkeitsbedingung ist deswegen erfüllt, weil $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist. Außerdem besitzt $\mathfrak{M}^{d-1}$ jedoch noch eine zusätzliche Eigenschaft, die nicht jede Pseudomannigfaltigkeit hat. Ist S_{d-3} ein beliebiges, festes $(d - 3)$-Simplex von $\mathfrak{M}^{d-1}$ und besteht M aus der Menge aller $(d - 1)$-Simplexe $S_{d-1,i}$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$, die S_{d-3} als Randsimplex enthalten, so lassen sich die $(d - 1)$-Simplexe von M so zu einem Zyklus ordnen, daß aufeinanderfolgende Simplexe des Zyklus ein $(d - 2)$-Simplex gemeinsam haben. Diese Eigenschaft von $\mathfrak{M}^{d-1}$ soll als Zykleneigenschaft bezeichnet werden. Daß $\mathfrak{M}^{d-1}$ die Zykleneigenschaft besitzt, folgt daraus, daß $\mathfrak{M}^{d-1}$ durch die Einbettung des zu $\mathbf{G}$ dualen Graphen $\mathbf{G}'$ in den Randkomplex bdS_{n-1} entstanden ist. Dem Simplex S_{d-3} entspricht in $\mathbf{G}'$ ein vollständiger Untergraph der Ordnung $d - 2$, und diesem wird in $\mathbf{G}$ ein regulärer Untergraph $\mathbf{G}_2$, also ein Kreis k des Systems K zugeordnet. Den $(d - 1)$-Simplexen von M entsprechen in $\mathbf{G}$ die Knotenpunkte von k. Da die Knotenpunkte von k einen Zyklus bilden und aufeinanderfolgende Knotenpunkte des Kreises durch eine Kante des Kreises verbunden sind, ordnen sich auch die $(d - 1)$-Simplexe von M zu einem Zyklus, und aufeinanderfolgende $(d - 1)$-Simplexe des Zyklus haben ein $(d - 2)$-Simplex von $\mathfrak{M}^{d-1}$ gemeinsam. Pseudomannigfaltigkeiten, die die Zykleneigenschaft nicht besitzen, sind nicht isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops. In dieser Arbeit sind daher gerade Pseudomannigfaltigkeiten, die die Zykleneigenschaft haben, von Interesse, weil die Frage der Isomorphie einer $(d - 1)$-dimensionalen geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops im Mittelpunkt steht.

Im folgenden wird eine $(d - 1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit, die die Zykleneigenschaft besitzt, immer mit $\mathfrak{M}^{d-1}$ bezeichnet. Man ordnet nun die Eckpunkte von S_{n-1} in irgendeiner Reihenfolge an, bezeichnet ihre Ortsvektoren mit x_k^0, wobei der Index k der Reihenfolge entsprechend die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchläuft. Desgleichen werden auch die $(d-1)$-Simplexe $S_{d-1,i}$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$ in einer Reihenfolge geordnet, so daß der Index i die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ durchläuft. Dann lassen sich die Eigenschaften von $\mathfrak{M}^{d-1}$ durch die Eigenschaften gewisser Indexmengen D_i beschreiben. Es sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $D = \{D_i: i = 1, 2, \ldots, m\}$ ein System von m Teilmengen der Indexmenge N mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jede Menge $D_i \in D$ besteht aus genau d verschiedenen Elementen $i_1, i_2, \ldots, i_d \in N$, und zwar sind $i_1, i_2, \ldots, i_d$ die Indizes der d Eckpunkte x_k^0 von S_{n-1}, die das Randsimplex $S_{d-1,i}$ aufspannen.

(2) Zu jeder Menge $D_i \in D$ mit $D_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$ existieren genau d andere Mengen $D_{j_1}, D_{j_2}, \ldots, D_{j_d}$ aus D, wobei $j_1, j_2, \ldots, j_d$ aus der Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$ sind und $D_{j_k} = (D_i \setminus \{i_k\}) \cup \{i'_k\}$ mit $i'_k \in N \setminus D_i$ für $k = 1, 2, \ldots, d$ gilt und die Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_d$ alle voneinander verschieden sind.

(3) Je zwei Mengen $D_i, D_j \in D$ mit $\operatorname{card}(D_i \cap D_j) < d - 1$ können durch eine Kette von Mengen $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_r}$ aus D verbunden werden, so daß $\operatorname{card}(D_i \cap D_{i_1}) = d - 1$, $\operatorname{card}(D_{i_k} \cap D_{i_{k+1}}) = d - 1$ für $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ und $\operatorname{card}(D_{i_r} \cap D_j) = d - 1$ gilt, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_r, i, j$ aus der Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$ sind.

(4) Es sei D' das System aller Teilmengen von Mengen aus D, die $d - 1$ Elemente enthalten, und D'' das System aller Teilmengen von Mengen aus D, die $d - 2$ Elemente enthalten.
Ist $D''_l \in D''$ $(l = 1, 2, \ldots, m'')$ und sind $D_{l_1}, D_{l_2}, \ldots, D_{l_r}$ alle Mengen aus D, die D''_l enthalten, so gibt es eine Permutation $k_1, k_2, \ldots, k_r$ der Indizes $l_1, l_2, \ldots, l_r$, so daß $D_{k_{\nu-1}} \cap D_{k_\nu} = D'_{q_\nu}$ für $\nu = 2, 3, \ldots, r$ und $D_{k_1} \cap D_{k_r} = D'_{q_1}$; D'_{q_1}, D'_{q_ν} aus D' mit $q_1, q_2, \ldots, q_r \in \{1, 2, \ldots, m'\}$ erfüllt sind.

Aus den Eigenschaften (1) und (2) folgt die Unverzweigtheitsbedingung und aus (3) die Verbindbarkeitsbedingung. Durch (4) wird die Zykleneigenschaft gesichert.
Man kann alle Eigenschaften einer Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ in einer $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{L} = (l_{ik})_{i=1}^{m}{}_{k=1}^{n}$ speichern. Die Matrix $\boldsymbol{L}$ stellt eine Art von Inzidenzmatrix dar. Daß dies möglich ist, folgt daraus, daß die Simplexe $S_{d-1,i}$ die Grundzellen von $\mathfrak{M}^{d-1}$ sind und daß ein simplizialer Komplex durch seine Grundzellen völlig bestimmt ist (vgl. [6], S. 314). Die Zeilen der Matrix $\boldsymbol{L}$ entsprechen den $(d-1)$-Simplexen $S_{d-1,i}$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$, die Spalten den Eckpunkten von S_{n-1} bzw. den 0-Simplexen von $\mathfrak{M}^{d-1}$. Für die Elemente l_{ik} von $\boldsymbol{L}$ setzen wir

$$l_{ik} = 0 \quad \text{für } k \in D_i,$$

$$l_{ik} > 0 \quad \text{für } k \in N \setminus D_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Die positiven Elemente l_{ik} der Matrix $\boldsymbol{L}$ sind zunächst unbekannt. Jedoch fordern wir, falls sie bestimmt werden können, daß

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

gilt.

4. Gale-Transformierte

Es sei $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel von diskreten, nicht notwendig verschiedenen Punkten eines R^d. Die affine Hülle von X werde mit aff X bezeichnet, und es gelte aff $X = R^d$. Der Punkt x_i soll für $i = 1, 2, \ldots, n$ mit seinem Ortsvektor, der als

d-dimensionaler Zeilenvektor geschrieben wird, identifiziert werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß im R^d ein orthogonales oder affines Koordinatensystem gewählt wurde, auf das die Vektoren x_i bezogen sind. Ordnet man die n Zeilenvektoren x_i untereinander an und fügt zu der entstehenden Matrix eine Spalte aus lauter Einsen hinzu, so erhält man eine $n \times (d+1)$-Matrix $\boldsymbol{A}_1$, die man auch durch ihre $d+1$ Spaltenvektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{d+1}$ darstellen kann. Es ist

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = (\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_{d+1}).$$

Da dim aff $X = d$ gilt, ist der Rang von $\boldsymbol{A}_1$ gleich $d+1$. Folglich gibt es $n-d-1$ linear unabhängige, n-dimensionale Spaltenvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-d-1)$, die zu den $d+1$ Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}_1$ orthogonal sind. Fügt man diese $n-d-1$ Spaltenvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_i$ in der Reihenfolge ihrer Indizes zu den Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{A}_1$ hinzu, so erhält man eine $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$. Es ist

$$\boldsymbol{A} = (\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_{d+1}\ \bar{\mathfrak{x}}_1\ \bar{\mathfrak{x}}_2 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_{n-d-1}) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \bar{x}_1 \\ x_2 & 1 & \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & \bar{x}_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Größen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ Zeilenvektoren der Dimension $n-d-1$, die durch Zusammenfassung der Elemente jeweils einer Zeile aus den letzten $n-d-1$ Spalten von $\boldsymbol{A}$ entstanden sind. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist nicht singulär. Faßt man die n Zeilenvektoren $\bar{x}_i$ als Ortsvektoren von n Punkten eines R^{n-d-1} auf und identifiziert man jeden Ortsvektor $\bar{x}_i$ mit dem durch ihn dargestellten Punkt, so heißt das n-Tupel $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Gale-Transformierte von X. Dabei sind die Vektoren $\bar{x}_i$ alle auf ein festes orthogonales oder affines Koordinatensystem im R^{n-d-1} bezogen. Die Punkte $\bar{x}_i$ können, aber müssen nicht verschieden sein. Infolge der Indizierung entspricht für $i = 1, 2, \ldots, n$ dem Punkt $x_i \in X$ eineindeutig der Punkt $\bar{x}_i \in \bar{X}$, und einem Teilsystem $X_1 \subset X$ wird das Teilsystem $\bar{X}_1 \subset \bar{X}$ zugeordnet, das durch $\bar{X}_1 = (\bar{x}_i : \bar{x}_i \in \bar{X}$ und $x_i \in X_1)$ erklärt wird. Weil die Spaltenvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_{n-d-1}$ linear unabhängig sind, folgt aus aff $X = R^d$ stets aff $\bar{X} = R^{n-d-1}$. Ist $n > d+1$, so gibt es zu jedem n-Tupel $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des R^d mit aff $X = R^d$ unendlich viele Gale-Transformierte. Ist $\boldsymbol{B}$ eine quadratische, nicht singuläre Matrix der Ordnung $n-d-1$ und $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Gale-Transformierte von $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, so ist $\bar{X}' = (\bar{x}_1', \bar{x}_2', \ldots, \bar{x}_n')$ mit $\bar{x}_i' = \bar{x}_i\boldsymbol{B}$ ebenfalls eine Gale-Transformierte von X. Ist dagegen $n = d+1$ und $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel des R^d mit aff $X = R^d$, so wird das aus n Nullen bestehende n-Tupel $\bar{X} = (0, 0, \ldots, 0)$ als Gale-Transformierte des n-Tupels X erklärt. Wegen $n = d+1$ ist der Raum R^{n-d-1} ein R^0, und $\bar{X}$ besteht aus dem n-fach gezählten Ursprung und einzigen Punkt dieses Raumes. Weil die $(d+1)$-te Spalte von $\boldsymbol{A}$ lauter Einsen enthält und die letzten $n-d-1$ Spalten von $\boldsymbol{A}$ auch zu dieser orthogonal sind, folgt sofort

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 0.$$

Der Ursprung 0 des R^{n-d-1} ist stets Schwerpunkt der Punkte einer Gale-Transformierten. Aus dem gleichen Grund ist die Gale-Transformierte $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ von $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auch Gale-Transformierte von $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, wo $x_i' = x_i + a \cdots$ und a ein beliebiger, fester d-dimensionaler Vektor ist.

Bildet man das n-Tupel X durch eine Affinität des R^d auf sich in ein anderes n-Tupel X' ab und ist $\overline{X}$ eine Gale-Transformierte von X, so ist $\overline{X}$ auch Gale-Transformierte von X'. Hieraus ergibt sich leicht, daß die Eigenschaft eines n-Tupels $\overline{X}$ des R^{n-d-1}, Gale-Transformierte eines n-Tupels X des R^d zu sein, von der Wahl des Koordinatensystems im R^d unabhängig ist. Wenn man die Einschränkung macht, daß der Ursprung des Koordinatensystems im R^{n-d-1} stets der Schwerpunkt des n-Tupels $\overline{X}$ sein soll, ist die erwähnte Eigenschaft auch von der Wahl des Koordinatensystems im R^{n-d-1} unabhängig.
Mit Hilfe der Gale-Transformierten $\overline{X}$ einer diskreten Punktmenge X in einem R^d lassen sich nun Aussagen über Eigenschaften von X gewinnen. Die folgenden Sätze über Gale-Transformierte sind der Arbeit [1], S. 1166, bzw. dem Buch [2], S. 85, von B. GRÜNBAUM entnommen und sollen hier ohne Beweis angeführt werden. Die Kenntnis dieser Sätze ist notwendig für das Verständnis der Abschnitte 5 und 6 dieser Arbeit.

Satz 1. *Ein n-Tupel von Punkten $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit* aff $X = R^d$ *ist genau dann die Eckpunktmenge eines d-Polytops P, wenn die Gale-Transformierte $\overline{X}$ entweder aus lauter Nullen besteht (P ist dann ein d-Simplex) oder wenn jeder offene Halbraum $H \subset R^{n-d-1}$ mit $0 \in$* bd *H (wo* bd *H den Rand von H bedeutet) die Eigenschaft hat, daß* card $\{i : \bar{x}_i \in H\} \geq 2$ *ist.*

Ist A eine Punktmenge des R^d, so wird ihre abgeschlossene, konvexe Hülle mit conv A bezeichnet. Faßt man eine abgeschlossene konvexe Menge K des R^d als Teilmenge ihrer affinen Hülle auf, so ist die Menge aff K ein linearer Unterraum des R^d, sofern sie nicht mit R^d übereinstimmt, und zwar ist aff k der lineare Unterraum niedrigster Dimension von R^d, der K enthält. Bezüglich dieses Unterraumes besitzt K innere Punkte. Die Menge aller solchen bezüglich aff K inneren Punkte von K bildet das relativ Innere von K und wird mit relint K gekennzeichnet. Demnach ist relint conv A das relativ Innere der konvexen Hülle von A. Es besteht aus allen bezüglich aff (conv A) = aff A inneren Punkten von conv A, sofern aff $A \subset R^d$ gilt. Ist jedoch aff $A = R^d$, so ist relint conv A = int conv A, wobei mit int conv A die Menge der inneren Punkte von conv A bezeichnet wird.

Satz 2. *Es sei X die Eckpunktmenge eines d-Polytops $P \subset R^d$, und $\overline{X}$ sei eine Gale-Transformierte von X. Es gelte $X = X_1 \cup X_2$, wo $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ist. Mit $\overline{X}_2$ werde die Teilmenge von $\overline{X}$ bezeichnet, die aus den Punkten von $\overline{X}$ besteht, die den Elementen von X_2 entsprechen. Dann ist* conv X_1 *genau dann eine eigentliche Seite von P, wenn $0 \in$* relint conv $\overline{X}_2$ *gilt.*

Satz 3. *Es seien R^d, R^{n-d-1} zwei orthogonale Unterräume durch den Ursprung 0 des R^{d-1}, und es sei S_{n-1} ein reguläres $(n-1)$-Simplex mit dem Mittelpunkt 0. Falls X die Orthogonalprojektion von* vert S_{n-1} *in den R^d und $\overline{X}$ die Orthogonalprojektion von* vert S_{n-1} *in den R^{n-d-1} ist, so ist $\overline{X}$ eine Gale-Transformierte von X und X eine solche von $\overline{X}$.*

Definition. Zwei Gale-Transformierte $\overline{V}$, $\overline{V}'$ von zwei Mengen $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $V' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ des R^d werden *isomorph* genannt, falls es eine Permutation ϑ der Indizes $1, 2, \ldots, n$ gibt, so daß für jede Indexmenge $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ die Bedingung $0 \in$ relint conv $\overline{V}(I)$ äquivalent zu $0 \in$ relint conv $\overline{V}'(\vartheta(I))$ ist, wo $\vartheta(I) = \{\vartheta(j) : j \in I\}$ und $\overline{V}(I) = \{\bar{v}_j : \bar{v}_j \in \overline{V} \wedge j \in I\}$ ist.

Satz 4. *Zwei d-Polytope P und P' sind genau dann kombinatorisch äquivalent, falls die Gale-Transformierten ihrer Eckpunktmengen isomorph sind.*

Man kann auch Gale-Transformierte von Punktmengen $X \subset R^d$ mit dim (aff X) $< d$ einführen (vgl. [2], S. 85). In dieser Arbeit werden aber nur Gale-Transformierte von solchen n-Tupeln X benötigt, für die aff $X = R^d$ und demnach aff $\overline{X} = R^{n-d-1}$ ist. Außerdem ist immer $n > d + 1$. Daher wird noch folgendes definiert.

Definition. Eine Gale-Transformierte $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ mit aff $\overline{X} = R^{n-d-1}$ und $n > d + 1$ heiße *nicht trennbar*, wenn jede Hyperebene des R^{n-d-1} durch den Ursprung 0 zwei offene Halbräume bestimmt, die jeder mindestens zwei Punkte von $\overline{X}$ enthalten. Andernfalls heiße $\overline{X}$ *trennbar*. Dann gilt:

Satz 1'. *Die Punktmenge* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *mit* aff $X = R^d$ *ist genau dann die Eckpunktmenge eines d-Polytops, wenn eine Gale-Transformierte von* $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *von* X *nicht trennbar ist. Dabei ist* $n > d + 1$.

Der Beweis folgt aus Satz 1. Ist eine Gale-Transformierte eines n-Tupels nicht trennbar, so sind auch alle anderen Gale-Transformierten von X nicht trennbar. Gäbe es zu dem n-Tupel $X \in R^d$ zwei Gale-Transformierte $\overline{X}$ und $\overline{X}'$ im R^{n-d-1}, von denen die erste nicht trennbar, die zweite trennbar wäre, so existierte ein Element $\overline{x}'_{i_0} \in \overline{X}'$, das durch eine Hyperebene h des R^{n-d-1}, die durch 0 geht, von den Punkten der Menge $\overline{X} \setminus \{x'_{i_0}\}$ getrennt würde. Dann liegt der Punkt $x_{i_0} \in X$, wie sich leicht zeigen läßt, im Innern der konvexen Hülle von $X \setminus \{x_{i_0}\}$, was einen Widerspruch darstellt, weil wegen der Nichttrennbarkeit von $\overline{X}$ aus Satz 1 folgt, daß X die Eckpunktmenge eines d-Polytops ist.

Satz 5. *Eine Gale-Transformierte* $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \subset R^{n-d-1}$ *mit* $n > d + 1$ *und* aff $X = R^{n-d-1}$ *ist genau dann nicht trennbar, wenn die Bedingung* $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *erfüllt ist.*

Beweis. Es sei $\overline{X}$ nicht trennbar, und es werde angenommen, daß $0 \notin$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{x_{i_0}\})$ für ein bestimmtes i_0 gilt. Dann liegt 0 entweder auf dem Rand (bzw. relativen Rand) oder außerhalb von conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_{i_0}\})$. In jedem Fall gibt es eine Hyperebene h durch 0, so daß $\overline{X} \setminus \{\overline{x}_{i_0}\}$ ganz in einem der beiden abgeschlossenen Halbräume liegt, die durch h begrenzt werden. Dann kann $\overline{x}_{i_0}$ nicht in demselben Halbraum liegen, weil 0 der Schwerpunkt des n-Tupels $\overline{X}$ ist. Daher wird $\overline{x}_{i_0}$ durch h von den übrigen Punkten des n-Tupels X getrennt, im Widerspruch dazu, daß $\overline{X}$ als nicht trennbar vorausgesetzt wurde. Also gilt $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_{i_0}\})$.
Gilt umgekehrt $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$ für alle i und wäre $\overline{X}$ trennbar, dann existierten ein Punkt $\overline{x}_{i_0} \in \overline{X}$ und eine Hyperebene h des R^{n-d-1} durch 0, so daß $\overline{x}_{i_0}$ von den übrigen Punkten des n-Tupels $\overline{X}$ getrennt wird. Da 0 auf h liegt, folgt $0 \notin$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_{i_0}\})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist $\overline{X}$ nicht trennbar.

Satz 6. *Sind* P, P' *d-Polytope im* R^d *mit* $(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$ vert P *und* $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ $=$ vert P', *dann sind* P *und* P' *genau dann affin äquivalent (d. h., es existiert eine affine Transformation* A *des* R^d *auf sich, so daß* $v'_i = Av_i$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ist), wenn es eine nicht singuläre lineare Transformation* B *des* R^{n-d-1} *auf sich gibt, so daß* $\overline{v}'_i = B\overline{v}_i$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ist. Dabei ist* $\overline{V} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ *eine Gale-Transformierte von* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *und* $\overline{V}' = (\overline{v}'_1, \ldots, \overline{v}'_n)$ *eine solche von* $(\overline{v}'_1, \ldots, \overline{v}'_n)$.

Im Zusammenhang mit dem im Abschnitt 2 zitierten Satz sei noch die folgende Definition erwähnt.

Definition. Es sei $\mathbf{G}' = (\mathbf{X}', \mathbf{U}')$ der duale Graph eines regulären Graphen $\mathbf{G}$ vom Grad d, der ein spezielles Kreissystem (reguläres Basiskreissystem) enthält und $\mathbf{V}^d = \{\mathbf{V}_{di}\}_{i=1}^m$ das System der vollständigen Untergraphen der Ordnung d von $\mathbf{G}'$.

Ferner sei $\mathbf{X}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$ die Knotenpunktmenge von $\mathbf{G}'$, $n > d + 1$, und $\mathbf{X}'_{di}$ die Knotenpunktmenge des Untergraphen $\mathbf{V}_{di}$. Kann man den Knotenpunkten von $\mathbf{G}'$ die Punkte einer nichttrennbaren Gale-Transformierten $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ mit $\operatorname{aff} \overline{X} = R^{n-d-1}$ eineindeutig zuordnen und gilt für jede Teilmenge $\overline{X}_d \subset \overline{X}$ mit $\operatorname{card} \overline{X}_d \geqq d$ die Bedingung $0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} (\overline{X} \setminus \overline{X}_d)$ genau dann, wenn $\overline{X}_d = \overline{X}_{di}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ mit $\overline{X}_{di} = \{\overline{x}_i \in \overline{X} : \mathbf{x}'_i \in \mathbf{X}'_{di}\}$ ist, so heiße $\overline{X}$ eine *zu* $\mathbf{G}'$ *passende Gale-Transformierte*.

5. Orthogonalprojektion eines regulären $(n - 1)$-Simplexes in einen d-dimensionalen Unterraum

Wir betrachten die Eckpunktmenge $X^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\} = \operatorname{vert} S_{n-1}$ eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$. Es sei $2 \leqq d \leqq n - 2$. Mit R^d und R^{n-d-1} werden zwei zueinander orthogonale und komplementäre Unterräume des R^{n-1} durch den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} bezeichnet. Der Unterraum R^d werde durch die $(n - 1)$-dimensionalen Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_d$, der Unterraum R^{n-d-1} durch die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_{n-d-1}$ der gleichen Dimension aufgespannt. Die Vektorsysteme (a_i) und (b_j) seien orthonormiert. Dann gilt

$$a_i \cdot a_j = \delta_{ij}, \qquad b_k \cdot b_l = \delta_{kl}, \qquad a_i \cdot b_k = 0$$

für $i, j = 1, 2, \ldots, d$; $k, l = 1, 2, \ldots, n - d - 1$.
Hierbei bedeutet δ_{ij} das Kroneckersche Symbol und $a_i \cdot a_j$ das skalare Produkt der Vektoren a_i, a_j. Die Vektoren $a_1, \ldots, a_d, b_1, b_2, \ldots, b_{n-d-1}$ bilden eine orthonormierte Basis des R^{n-1}. Projiziert man jeden Eckpunkt x_i^0 von S_{n-1} orthogonal in den R^d bzw. in den R^{n-d-1}, so erhält man die Punkte x_i bzw. $\overline{x}_i$. Aus dem Satz 3 des Abschnitts 4 folgt, daß die Menge $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ eine Gale-Transformierte von $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist. Mit Hilfe der Theorie der Gale-Transformierten ergibt sich der folgende

Satz 7. *Zu jedem d-Polytop P mit n Eckpunkten $(n > d + 1,\ 2 \leqq d \leqq n - 2)$ existiert ein affin äquivalentes d-Polytop P', das durch Orthogonalprojektion eines regulären $(n - 1)$-Simplexes S_{n-1} in einen geeigneten Unterraum $H^d \subset R^{n-1}$ durch den Mittelpunkt* 0 *von $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ entsteht.*

Beweis. Es sei $\operatorname{vert} P = Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \overline{R}^d$ und $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \subset \overline{R}^{n-d-1}$ eine Gale-Transformierte von Y. Die Punkte y_i, $\overline{y}_i$ sollen mit ihren Ortsvektoren identifiziert werden. Die in $\overline{R}^d$ bzw. $\overline{R}^{n-d-1}$ gewählten Koordinatensysteme, auf die y_i und $\overline{y}_i$ bezogen sind, seien orthogonal. Es ist $\operatorname{aff} Y = \overline{R}^d$ und $\operatorname{aff} \overline{Y} = \overline{R}^{n-d-1}$. Außerdem ist $\overline{Y}$ nicht trennbar. Faßt man $y_i, \overline{y}_i$ als Zeilenvektoren auf, so sind in der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & 1 & \overline{y}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & \overline{y}_n \end{pmatrix}$$

die letzten $n - d - 1$ Spalten orthogonal zu den ersten $d + 1$ Spalten. Sind $u_1, u_2, \ldots, u_{n-d-1}$ linear unabhängige Vektoren des $\overline{R}^{n-d-1}$, so stellen die Vektoren

$$\overline{y}_i(u) = (\overline{y}_i \cdot u_1, \overline{y}_i \cdot u_2, \ldots, \overline{y}_i \cdot u_{n-d-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

ebenfalls eine Gale-Transformierte von Y dar. Sie werde mit $\overline{Y}(u)$ bezeichnet. Wir betten $\overline{Y}(u)$ in den Unterraum R^{n-d-1} ein, indem wir schreiben

$$\bar{x}_i(u) = \sum_{l=1}^{n-d-1} (y_i \cdot u_l)\, b_l, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Die Punkte $\bar{x}_i(u)$ bilden wieder eine Gale-Transformierte $\overline{X}(u)$. Das n-Tupel $\overline{X}(u)$ ist kongruent zum n-Tupel $\overline{Y}(u)$. Bringt man den Unterraum $\overline{R}^{n-d-1}$ mit dem Unterraum R^{n-d-1} zur Deckung, so daß das in $\overline{R}^{n-d-1}$ gewählte orthogonale Koordinatensystem mit dem durch die Vektoren b_i bestimmten Koordinatensystem übereinstimmt, so entsteht $\overline{X}(u)$ durch eine lineare Transformation aus $\overline{Y}$.
Man kann nun die Vektoren u_l so wählen, daß jeder Punkt $\bar{x}_i(u)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ die Orthogonalprojektion des Eckpunktes x_i^0 von S_{n-1} ist. Dazu müssen die Gleichungen

$$\left(\sum_{l=1}^{n-d-1} (\bar{y}_i \cdot u_l)\, b_l - x_i^0\right) \cdot b_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-d-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

und

$$\left(\sum_{l=1}^{n-d-1} (\bar{y}_i \cdot u_l)\, b_l\right) \cdot a_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, d, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

erfüllt sein. Das System (4) ist wegen $b_l \cdot a_j = 0$ stets erfüllt. Aus (3) folgt wegen $b_k \cdot b_l = \delta_{kl}$

$$(\bar{y}_i \cdot u_k) = x_i^0 \cdot b_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n-d-1. \tag{5}$$

Aus (5) ergibt sich für jedes k ein lineares, inhomogenes System für die Unbekannten $u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{k,n-d-1}$. Ein solches System ist genau dann lösbar, wenn seine rechte Seite orthogonal zu allen ([4], S. 123) Lösungen des adjungierten homogenen Systems ist. Dieses lautet

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{il} v_i = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, n-d-1, \tag{6}$$

und hat die $d+1$ linear unabhängigen Lösungssysteme $v_i^{(j)} = y_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, und $v_i^{(d+1)} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Gleichungen (5) sind also genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} (x_i^0 \cdot b_k)\, y_{ij} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 \cdot b_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, d, \quad k = 1, 2, \ldots, n-d-1.\end{gathered} \tag{7}$$

Das zweite System ist wegen $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 = 0$ immer erfüllt, Das erste geht mit $w_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_{ij}$ in

$$w_j \cdot b_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, d, \quad k = 1, 2, \ldots, n-d-1, \tag{8}$$

über. Für festes k stellt (8) ein homogenes lineares System von d Gleichungen dar, welches mindestens $n-d-1$ linear unabhängige Lösungen b_k^r $(r = 1, 2, \ldots, n-d-1)$ hat. Wir wählen für jedes k eine Lösung aus, indem wir $b_k = b_k^k$ setzen (wobei über k nicht summiert wird), und erhalten so $n-d-1$ linear unabhängige Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_{n-d-1}$, die einen Unterraum $H^{n-d-1} \subset R^{n-1}$ aufspannen. Zu diesem existiert ein anderer Unterraum $H^d \subset R^{n-1}$, der zu H^{n-d-1} orthogonal und bezüglich R^{n-1} komplementär ist und den Punkt 0 enthält. Demnach sind die Systeme (5), wenn die Vektoren b_k in der beschriebenen Weise gewählt werden, immer lösbar. Es gibt also ein System von $n - d - 1$ Vektoren u_k der Dimension $n - d - 1$. Man kann leicht zeigen, daß die u_k linear unabhängig sind. Das mit diesen u_k bestimmte n-Tupel $\overline{X}(u)$ ist dann die Orthogonalprojektion der Eckpunktmenge von S_{n-1} in den Unterraum H^{n-d-1}. Aus dem Satz 3 folgt, daß $\overline{X}(u)$ eine Gale-Transformierte der Orthogonalprojektion $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von vert S_{n-1} in den Unterraum H^d ist. Da $\overline{X}(u)$ aus Y durch eine lineare Transformation entsteht, ergibt sich aus Satz 6, daß X die Eckpunktmenge eines d-Polytops P' ist, das zu P affin äquivalent ist. Damit ist der Beweis von Satz 7 erbracht.

Es werden nun noch zwei Hilfssätze behandelt, die im nächsten Abschnitt gebraucht werden.

Hilfssatz 1. *Es gelte $2 \leq d \leq n - 2$. Sind R^d, R^{n-d-1} zwei zueinander orthogonale und komplementäre Unterräume eines R^{n-1}, die durch den Mittelpunkt 0 eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ gehen, und sind X bzw. $\overline{X}$ die Orthogonalprojektionen von $X^0 =$ vert S_{n-1} in den R^{n-d-1} bzw. R^d, so ist $\overline{X}$ als Gale-Transformierte von X genau dann nicht trennbar, wenn $R^d \cap$ relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\}) \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.*

Beweis. Es sei $\overline{X}$ nicht trennbar. Dann folgt die Bedingung $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{x_i\})$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ aus Satz 5. Die Menge relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$ entsteht durch Orthogonalprojektion aus relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\})$. Der Punkt 0 kann aufgefaßt werden als Schnitt des projizierenden Unterraums R^d mit dem Unterraum R^{n-d-1}. Da 0 in relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$ liegt, muß es Punkte in relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\})$ geben, deren Orthogonalprojektion auf 0 fällt. Das können aber nur solche Punkte sein, die zu R^d gehören. Daher gilt

$$R^d \cap \text{relint conv } (X^0 \setminus \{x_i^0\}) \neq \emptyset \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Gilt andererseits $R^d \cap$ relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\}) \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, dann gibt es mindestens einen Punkt P mit $P \in$ relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\})$ und $P \in R^d$. Durch die Orthogonalprojektion von S_{n-1} in den R^{n-d-1} geht P in 0 und relint conv $(X^0 \setminus \{x_i^0\})$ in relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$ über. Da bei Orthogonalprojektion Inzidenzen erhalten bleiben, folgt $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \{\overline{x}_i\})$, und $\overline{X}$ ist nach Satz 5 eine nicht trennbare Gale-Transformierte.

Hilfssatz 2. *Es sei P ein d-Polytop mit* vert $P = X$ *und* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n > d + 1$, *das durch Orthogonalprojektion eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ in den Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$ entsteht, der den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} enthält. Ferner sei $X_1 \subset X$, $X_1 \neq \emptyset$ und $X_1^0 \subset X^0$, wo X_1^0 aus genau den Eckpunkten von S_{n-1} besteht, die bei der Orthogonalprojektion in Punkte von X_1 übergehen. Dann ist* conv X_1 *genau dann eine eigentliche Seite von P, wenn gilt*

$$R^d \cap \text{relint conv } (X^0 \setminus X_1^0) \neq \emptyset.$$

Beweis. Nach Satz 3 erhält man durch Orthogonalprojektion von X^0 in den zu R^d orthogonalen und komplementären Unterraum R^{n-d-1} durch den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} eine Gale-Transformierte $\overline{X}$ der Menge X, die durch Orthogonalprojektion von X^0 in den R^d entsteht. Da $X =$ vert P, ist $\overline{X}$ nach Satz 1' nicht trennbar. Ist conv X_1 eine Seite von P, so folgt wegen Satz 2 die Bedingung $0 \in$ relint conv $(\overline{X} \setminus \overline{X}_1)$ mit $\overline{X}_1 = \{\overline{x}_i \in \overline{X} : x_i \in X_1\}$. Daher gibt es einen Punkt Q mit $Q \in R^d \cap$ relint conv $(X^0 \setminus X_1^0)$. Denn relint conv $(\overline{X} \setminus \overline{X}_1)$ ergibt sich durch Orthogonalprojektion von relint conv $(X^0 \setminus X_1^0)$ in den R^{n-d-1}, und nur die Punkte von R^d werden nach 0 abgebildet.

Umgekehrt folgt aus $R^d \cap \operatorname{relint} \operatorname{conv} (X^0 \setminus X_1^0) \neq \emptyset$ wegen der Inzidenztreue der Orthogonalprojektion $0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} (\bar{X} \setminus \bar{X}_1)$, und $\operatorname{conv} X_1$ ist nach Satz 2 eigentliche Seite von P.

6. Existenz eines simplizialen d-Polytops mit vorgeschriebener Seitenstruktur

Es sei $\mathfrak{M}^{d-1}$ eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit der Dimension $d - 1$ mit n Simplexen der Dimension 0 und m Simplexen der Dimension $d - 1$, die in den Randkomplex eines regulären $(n - 1)$-Simplexes S_{n-1} des R^{n-1} derart eingebettet ist, daß die 0-Simplexe von $\mathfrak{M}^{d-1}$ die Eckpunkte von S_{n-1}, die 1-Simplexe von $\mathfrak{M}^{d-1}$ zugleich Kanten von S_{n-1} und die $(d - 1)$-Simplexe von $\mathfrak{M}^{d-1}$ mit gewissen $(d - 1)$-Simplexen $S_{d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ des Randes von S_{n-1} übereinstimmen. $\mathfrak{M}^{d-1}$ möge die im Abschnitt 3 erwähnte Zykleneigenschaft besitzen. Außerdem bestehe zwischen d und n die Beziehung $2 \leqq d \leqq n - 2$. Bezeichnet man die Eckpunktmenge von S_{n-1} mit $\operatorname{vert} S_{n-1} = X^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ und identifiziert jeden Eckpunkt x_i^0 mit seinem Ortsvektor, wobei man diesen als Zeilenvektor auffaßt, so kann man die $n \times (n - 1)$-Matrix

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{x}_1^0 \ \mathfrak{x}_2^0 \ \cdots \ \mathfrak{x}_n^0)$$

bilden, wo $\mathfrak{x}_j^0$ der j-te Spaltenvektor von X^0 ist. Die Matrix X^0 entsteht aus einer orthogonalen $n \times n$-Matrix X_n^0, deren n-te Spalte lauter untereinander gleiche Elemente der Größe $1/\sqrt{n}$ enthält, durch Weglassen dieser n-ten Spalte. Es gilt daher

$$x_i^0 \cdot x_j^0 = \delta_{ij} - \frac{1}{n}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Die topologische Struktur von $\mathfrak{M}^{d-1}$ sei durch die Inzidenzmatrix $L = (l_{ik})_{i=1}^{m} {}_{k=1}^{n}$ festgelegt. Dabei gilt für $i = 1, 2, \ldots, m$ entweder $l_{ik} = 0$, $k \in D_i$, oder $l_{ik} > 0$, $k \in N \setminus D_i$, und $\sum_{k=1}^{n} l_{ik} = 1$. Die Indexmengen D_i sind durch $D_i = \{j : x_j^0 \in \operatorname{vert} S_{d-1,i}\}$ gegeben. Zu jedem $(d - 1)$-Simplex $S_{d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Co-Simplex $S_{n-d-1,i}$ der Dimension $n - d - 1$, das durch genau die $n - d$ *Eckpunkte* von S_{n-1} aufgespannt wird, die nicht zu $S_{d-1,i}$ gehören. Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops ist. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft.

Satz 8. *Eine in den Randkomplex* $\operatorname{bd} S_{n-1}$ *eines regulären* $(n - 1)$-*Simplexes* $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ *in der beschriebenen Weise eingebettete, geschlossene* $(d - 1)$-*dimensionale Pseudomannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{d-1}$ *ist dann und nur dann isomorph, zum Randkomplex eines simplizialen* d-*Polytops* P, *wenn es einen Unterraum* $R^d \subset R^{n-1}$ *durch den Mittelpunkt* 0 *von* S_{n-1} *gibt, der mit jedem Co-Simplex* $S_{n-d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *genau einen Punkt des relativ Inneren von* $S_{n-d-1,i}$ *gemeinsam hat. Das Polytop* P *ergibt sich durch Orthogonalprojektion von* S_{n-1} *in den* R^d.

Beweis. Es sei R^d ein derartiger Unterraum. Mit R^{n-d-1} werde der zu R^d orthogonale und komplementäre Unterraum des R^{n-1} bezeichnet, der ebenfalls den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} enthält. Das n-Tupel $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, das durch Orthogonalprojektion der Eckpunktmenge X^0 von S_{n-1} in den R^{n-d-1} entsteht, ist nach Satz 3 eine Gale-

Transformierte des n-Tupels $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, das sich durch Orthogonalprojektion von X^0 in den R^d ergibt. Nach Voraussetzung existieren Punkte P_i, so daß für $i = 1, 2, \ldots, m$ die Bedingung $P_i \in R^d \cap \operatorname{relint} (S_{n-d-1,i})$ erfüllt ist. Dabei ist P_i der einzige Punkt, der zugleich in R^d und im relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ liegt. Dann lassen sich die Ortsvektoren p_i der Punkte P_i in der Form

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j^0 \quad \text{mit} \quad l_{ij} > 0 \quad \text{für} \quad j \in N \setminus D_i$$

und

$$l_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad j \in D_i, \qquad \text{sowie} \quad \sum_{j=1}^{n} l_{ij} = 1$$

schreiben. Die Vektoren p_i sind die Zeilenvektoren der Matrix LX^0, deren Rang höchstens gleich d ist, weil die Punkte P_i sämtlich in R^d liegen. Um nachzuweisen, daß $\bar{X}$ nicht trennbar ist, wendet man den Hilfssatz 1 an und zeigt, daß $R^d \cap \operatorname{relint} \operatorname{conv} (X^0 \setminus \{x_i^0\}) \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.
Man kann aus der Matrix L eine $n \times n$-Matrix L^* gewinnen, in deren Hauptdiagonale lauter Nullen stehen, während alle anderen Elemente streng positiv sind. Es sei $l_{ik} = 0$ für $k \in D_i$ und $l_{ii_s} = 0$ mit $i_s \in D_i$, $i_s \neq k$. Dann gibt es, weil das System D der Indexmengen D_i die Eigenschaften (1)—(4) besitzt, wegen (2) eine Indexmenge

$$D_{j_s} = (D_i \setminus \{i_s\}) \cup \{i_s'\}, \quad i_s' \in N \setminus D_i.$$

Addiert man die j_s-te Zeile von L zur i-ten Zeile, so erhält man eine neue Zeile $l_i' = (l_{i1}', \ldots, l_{in}')$ mit $l_{ik}' = l_{ik} = 0$ und $l_{ii_s}' = l_{ii_s} + l_{j_s i_s} > 0$. Indem man auf l_i' wieder dasselbe Verfahren anwendet, kann man so nach und nach alle verschwindenden Elemente mit Ausnahme von l_{ik} in der k-ten Spalte durch positive Elemente ersetzen. Hat man dies erreicht, so multipliziert man die geänderte i-te Zeile von L mit einem geeigneten positiven Faktor, so daß die Summe der Elemente dieser Zeile gleich Eins wird. Man verwendet die so erhaltene Zeile als k-te Zeile mit der Matrix L^*. Dann gilt für den k-ten Zeilenvektor von L^*

$$l_k^* = (l_{k1}^*, \ldots, l_{kn}^*), \quad l_{kk}^* = l_{ik} = 0,$$
$$l_{kj}^* > 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} l_{kj}^* = 1.$$

Da k die Werte $1, 2, \ldots, n$ annehmen kann, erhält man eine $n \times n$-Matrix L^* der gewünschten Art. Sämtliche Zeilen von L^* sind Linearkombinationen der Zeilenvektoren von L. Daher sind auch die Zeilenvektoren von L^*X^0 Linearkombinationen der Zeilenvektoren der Matrix LX^0. Geometrisch bedeutet das, daß die Zeilenvektoren von L^*X^0 die Ortsvektoren von n Punkten Q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ des R^d mit der Eigenschaft $Q_j \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} (X^0 \setminus \{x_j^0\})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ sind. Folglich gilt $R^d \cap \operatorname{relint} \operatorname{conv} (X^0 \setminus \{x_j^0\}) \neq \emptyset$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Nun folgt aus $2 \leqq d \leqq n - 2$ sofort $n > d + 1$, und wegen Hilfssatz 1 ist dann die Gale-Transformierte $\bar{X}$ nicht trennbar, und X ist die Eckpunktmenge eines d-Polytops P. Weil der Unterraum R^d nach Voraussetzung mit jedem Co-Simplex $S_{n-d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ genau einen Punkt P_i des relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ gemeinsam hat, gilt

$$R^d \cap \operatorname{relint} S_{n-d-1,i} \neq \emptyset, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Daher ergibt die Orthogonalprojektion jedes $(d-1)$-Simplexes $S_{d-1,i}$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$ in den R^d nach Hilfssatz 2 eine Seite F_i von P.

Wäre $\dim F_i < d - 1$, so wäre F_i kein Simplex, denn die Eckpunkte von $S_{d-1,i}$ gehen bei der Orthogonalprojektion in Eckpunkte von F_i über. Da P als d-Polytop $(d - 1)$-Seiten hat, muß F_i Seite einer Seite F von P mit $\dim F > \dim F_i$ sein. F ist Orthogonalprojektion eines gewissen Randsimplexes S_k von S_{n-1} mit $k > d - 1$, das $S_{d-1,i}$ als Seite enthält. Daher ist auch das Co-Simplex S_{n-k-2} von S_k Seite des Co-Simplexes $S_{n-d-1,i}$. Wegen Hilfssatz 2 liegt in relint S_{n-k-2} ein Punkt $P \in R^d$. Andererseits gibt es einen Punkt $P_i \in$ relint $S_{n-d-1,i}$ für alle i. Da S_{n-k-2} ein Randsimplex von $S_{n-d-1,i}$ ist, liegen alle Punkte der offenen Strecke (P, P_i) im relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ und in R^d im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist die Annahme $\dim F_i < d - 1$ falsch. Es gilt vielmehr $\dim F_i = d - 1$. Die Seiten F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sind also sämtlich Simplexe der Dimension $d - 1$. Die Menge aller Simplexe F_i einschließlich ihrer Randsimplexe niedrigerer Dimension bildet im R^d eine geschlossene, $(d - 1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^{d-1}$, die zu $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph ist. Hätte P noch andere $(d - 1)$-Seiten, so müßte eine solche mit einem Simplex F_{i_0} genau $d - 1$ Eckpunkte gemeinsam haben. Das kann aber wegen der in $\overline{\mathfrak{M}}^{d-1}$ gültigen Unverzweigtheitsbedingung nicht der Fall sein. Somit stellen die Simplexe F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sämtliche $(d - 1)$-Seiten von P dar. Das d-Polytop P ist daher simplizial, und sein Randkomplex ist isomorph zur Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$.

Ist umgekehrt die Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops P, so gibt es nach Satz 7 ein zu P affin äquivalentes d-Polytop P', das durch Orthogonalprojektion von $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ in einen geeigneten Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$ durch den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} entsteht. Den $(d - 1)$-Seiten von P' entspricht im Randkomplex von S_{n-1} eine Menge von $(d - 1)$-Simplexen $S_{d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Nach Hilfssatz 2 hat R^d mit jedem Co-Simplex $S_{n-d-1,i}$ Punkte gemein, die im relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ liegen. Es kann aber im relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ nicht mehr als ein Punkt des R^d liegen, weil sonst R^d auch mit einem gewissen Randsimplex von $S_{n-d-1,i}$ einen Punkt von dessen relativ Inneren gemein hätte, woraus wieder nach Hilfssatz 2 folgte, daß P' noch andere Seiten hätte, die mehr als d Eckpunkte besäßen. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, wonach P und auch P' simplizial sind. Es hat daher der Unterraum R^d mit jedem Co-Simplex $S_{n-d-1,i}$ nur genau einen Punkt des relativ Inneren von $S_{n-d-1,i}$ gemein, und der Unterraum R^d erfüllt die Voraussetzungen des Satzes.

Es sei noch bemerkt, daß bei diesem Beweis die Zykleneigenschaft von $\mathfrak{M}^{d-1}$ nicht benutzt wurde.

7. Eine Anwendung des gefundenen Satzes

Es sei P_1 ein simpliziales d_1-Polytop mit n_1 Eckpunkten, m_1 Seiten der Dimension $d_1 - 1$ und P_2 ein simpliziales d_2-Polytop mit n_2 Eckpunkten und m_2 Seiten der Dimension $d_2 - 1$. Mit $\mathfrak{M}^{d_1-1}$, $\mathfrak{M}^{d_2-1}$ werden die durch die Randkomplexe von P_1, P_2 bestimmten geschlossenen Pseudomannigfaltigkeiten bezeichnet. Wir setzen $d_1 + d_2 = d$, $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m$ und betten $\mathfrak{M}^{d_1-1}$, $\mathfrak{M}^{d_2-1}$ derart in den Randkomplex eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ ein, daß die 0-Simplexe von $\mathfrak{M}^{d_1-1}$ mit den n_1 Eckpunkten eines $(n_1 - 1)$-Simplexes S_{n_1-1} des Randes von S_{n-1} und die 0-Simplexe von $\mathfrak{M}^{d_2-1}$ mit den n_2 Eckpunkten des zu S_{n_1-1} komplementären Randsimplex S_{n_2-1} von S_{n-1} übereinstimmen. Die höherdimensionalen Simplexe von $\mathfrak{M}^{d_1-1}$ bzw. $\mathfrak{M}^{d_2-1}$ gehen in gewisse Randsimplexe von S_{n_1-1} bzw. S_{n_2-1} über. Es ist aff $S_{n_1-1} = R^{n_1-1}$ und aff $S_{n_2-1} = R^{n_2-1}$, $R^{n_1-1} \cap R^{n_2-1} = \emptyset$. Ferner seien $\bar{R}^{n_1-1}$, $\bar{R}^{n_2-1}$ die zu R^{n_1-1} bzw. R^{n_2-1} parallelen Unterräume durch 0. Es gilt $\bar{R}^{n_1-1} \cap \bar{R}^{n_2-1} = \{0\}$, und $\bar{R}^{n_1-1}$, $\bar{R}^{n_2-1}$ sind orthogonal zueinander und komplementär bezüglich einer gewissen Hyperebene des R^{n-1} durch 0. Mit $S_{d_1-1,i}$ ($i = 1, 2, \ldots, m_1$) bzw. $S_{d_2-1,j}$ ($j = 1, 2, \ldots, m_2$) werden die den Simplexen der Dimension $d_1 - 1$ von $\mathfrak{M}^{d_1-1}$ bzw. $d_2 - 1$ von $\mathfrak{M}^{d_2-1}$ entsprechenden Randsimplexe von S_{n-1} bezeichnet. $S_{n_1-d_1-1,j}$ sei das zu $S_{d_1-1,i}$ gehörige, bezüglich S_{n_1-1} gebildete Co-Simplex. Analog bezeichne $S_{n_2-d_2-1,i}$ das zu $S_{d_2-1,j}$ gehörige Co-Simplex in bezug auf S_{n_2-1}. Nach Satz 8 gibt es einen Unterraum $R^{d_1} \subset R^{n_1-1}$ durch den Mittelpunkt 0_1 von S_{n_1-1} und einen Unterraum $R^{d_2} \subset R^{n_2-1}$ durch den Mittelpunkt 0_2 von S_{n_2-1}, derart, daß R^{d_1} und das relativ Innere jedes Co-Simplexes $S_{n_1-d_1-1,i}$ für $i = 1, 2, \ldots, m_1$ genau einen Punkt P_i^1 und ebenso R^{d_2} und das relativ Innere jedes Co-Simplexes $S_{n_2-d_2-1,j}$ für $j = 1, 2, \ldots, m_2$ genau einen Punkt P_j^2 gemeinsam haben. Die Ortsvektoren der Punkte P_i^1, bezogen auf 0_1, seien p_i^1, die der Punkte P_j^2, bezogen auf 0_2, mögen mit p_j^2 bezeichnet werden. Ferner seien c_1, c_2 die auf 0 bezogenen Ortsvektoren der Punkte 0_1, 0_2. Die konvexe Hülle zweier Simplexe $S_{d_1-1,i}$ und $S_{d_2-1,j}$ ist ein $(d-1)$-Simplex $S_{d-1,i,j}$ des Randes von S_{n-1}, das diese beiden Simplexe als komplementäre Randsimplexe enthält. Das zu $S_{d-1,i,j}$ gehörige, bezüglich S_{n-1} gebildete Co-Simplex $S_{n-d-1,i,j}$ ergibt sich durch

$$\begin{aligned} S_{n-d-1,i,j} &= \operatorname{conv}(S_{n_1-d_1-1,i} \cup S_{n_2-d_2-1,j}) \\ &= \{[P, Q] : P \in S_{n_1-d_1-1,i},\ Q \in S_{n_2-d_2-1,j}\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $[P, Q]$ die Menge aller Punkte der Strecke PQ mit den Endpunkten P und Q. Jeder Punkt A von $S_{n-d-1,i,j}$ gehört zu genau einer solchen Strecke, sofern er nicht in $S_{n_1-d_1-1,i}$ oder $S_{n_2-d_2-1,j}$ liegt. Andernfalls würden zwei A enthaltende Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit $P_1, P_2 \in S_{n_1-d_1-1,i}$ und $Q_1, Q_2 \in S_{n_2-d_2-1,j}$ eine Ebene aufspannen, die die beiden zueinander parallelen Geraden $g_1 = P_1P_2$ und $g_2 = Q_1Q_2$ mit $g_1 \in R^{n_1-1}$ und $g_2 \in R^{n_2-1}$ enthält. Dann gäbe es durch 0 eine zu g_1 und g_2 parallele Gerade $\bar{g}$, die sowohl zu $\bar{R}^{n_1-1}$ als auch zu $\bar{R}^{n_2-1}$ gehörte, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\bar{R}^{n_1-1} \cap \bar{R}^{n_2-1} = \{0\}$ ist. Die auf 0 bezogenen Ortsvektoren p_i^1, p_j^2 der Punkte P_i^1, P_j^2 haben die Darstellung

$$p_i^1 = \sum_{k=1}^{d_1} a_{ik} a_k + c_1,$$

$$p_j^2 = \sum_{l=1}^{d_2} b_{jl} b_l + c_2,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m_1, \quad j = 1, 2, \ldots, m_2, \quad a_{ik}, b_{jl} \text{ reell.}$$

Die im Punkt 0_1 angetragenen Vektoren a_k bzw. in 0_2 angetragenen Vektoren b_l spannen den Unterraum R^{d_1} bzw. R^{d_2} auf. Mit $0 < r_{ij} < 1$ wählen wir einen Punkt $P_{ij} \in [P_i^1, P_j^2]$, der wegen $P_i^1 \in \operatorname{relint} S_{n_1-d_1-1,i}$ und $P_j^2 \in \operatorname{relint} S_{n_2-d_2-1,j}$ im relativ Inneren von $S_{n-d-1,i,j}$ liegt. Für den auf 0 bezogenen Ortsvektor p_{ij} erhält man

$$p_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{d_1} a_{ik} a_k + c_1\right) r_{ij} + \left(\sum_{l=1}^{d_2} b_{jl} b_l + c_2\right)(1 - r_{ij}).$$

Die Punkte 0_1, 0_2, 0 liegen auf einer Geraden, die zu R^{n_1-1} und R^{n_2-1} senkrecht steht. Außerdem sind 0_1, 0_2, 0 die Schwerpunkte der Simplexe S_{n_1-1}, S_{n_2-1}, S_{n-1}. Daher ist $m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0$. Setzt man $r_{ij} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, so ergibt sich

$$p_{ij} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \sum_{k=1}^{d_1} a_{ik} a_k + m_2 \sum_{l=1}^{d_2} b_{jl} b_l\right).$$

Das heißt, die so bestimmten Punkte P_{ij} liegen in einem Unterraum R^d, der 0 enthält und der durch die in 0 angetragenen Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_{d_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{d_2}$ aufgespannt wird. Der Unterraum R^d hat mit dem relativ Inneren jedes Co-Simplexes $S_{n-d-1,i,j}$ genau einen Punkt, nämlich P_{ij}, gemein. Gäbe es noch andere Punkte $\bar{P}_{ij} \neq P_{ij}$ mit $\bar{P}_{ij} \in R^d \cap \operatorname{relint} S_{n-d-1,i,j}$, so wäre $\bar{P}_{ij} \in [\bar{P}_i^1, \bar{P}_j^2]$ mit $\bar{P}_i^1 \in \operatorname{relint} S_{n_1-d_1-1,i}$, $\bar{P}_j^2 \in \operatorname{relint} S_{n_2-d_2-1,j}$ und $\bar{P}_i^1 \neq P_i^1$ oder $\bar{P}_j^2 \neq P_j^2$. Wegen $\bar{P}_{ij} \in R^d$ folgt $\bar{P}_i^1 \in R^{d_1}$ und $\bar{P}_j^2 \in R^{d_2}$ im Widerspruch dazu, daß P_i^1 bzw. P_j^2 die einzigen Punkte von $R^{d_1} \cap \operatorname{relint} S_{n_1-d_1-1,i}$ bzw. $R^{d_2} \cap \operatorname{relint} S_{n_2-d_2-1,j}$ sind. Man überlegt sich leicht, daß die Simplexe $S_{d-1,i,j}$ eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ bilden, die in $bd\, S_{n-1}$ eingebettet ist. Nach Satz 8 ergibt die Orthogonalprojektion von S_{n-1} in den R^d ein simpliziales d-Polytop P' mit den $(d-1)$-Seiten $F_{d-1,i,j}$, die durch Orthogonalprojektion der Simplexe $S_{d-1,i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, m_1;\ j = 1, 2, \ldots, m_2)$ entstehen. Es sei $\bar{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ der zu R^{d_i} parallele, 0 enthaltende Unterraum von R^d. Das Polytop P_i' $(i = 1, 2)$ findet man durch Orthogonalprojektion von S_{n_i-1} in den Unterraum R^{d_i} und anschließende Translation des projizierten Polytops nach $\bar{R}^{d_i}$, so daß der Schwerpunkt von P_i' nach 0 fällt. Dann ist P' die konvexe Hülle von P_1' und P_2'. Der Graph $\mathbf{G}'$ von P' entsteht aus dem Graphen $\mathbf{G}_1'$ von P_1' und dem Graphen $\mathbf{G}_2'$ von P_2', indem man jeden Knotenpunkt von $\mathbf{G}_1'$ mit jedem Knotenpunkt von $\mathbf{G}_2'$ durch eine Kante verbindet. Wegen $2 \leqq d_i \leqq n_i - 2$ ist dieses Ergebnis für $d_i \geqq 2$ und $n_i \geqq 4$ gesichert. Durch zusätzliche Betrachtungen kann man auch noch die Fälle $d_i = 1$ und $n_i = 1, 2, 3$ einordnen. Bildet man P_i' $(i = 1, 2)$ durch eine Polarverwandtschaft bezüglich einer Hyperkugel des $\bar{R}^{d_i}$ um 0 in das zu P_i' duale Polytop P_i ab, so stellt die Minkowskische Summe der einfachen Polytope P_1 und P_2 ein einfaches d-Polytop $P \subset R^d$ dar, das zu dem simplizialen d-Polytop P' dual ist. P ist ein einfaches zweistufiges Zylinderpolytop der Dimension d. Der Graph $\mathbf{G}$ von P wird durch eine Produktbildung aus dem Graphen $\mathbf{G}_1$ von P_1 und $\mathbf{G}_2$ von P_2 erhalten. Dazu ersetzt man in $\mathbf{G}_1$ jeden Knotenpunkt durch einen zu $\mathbf{G}_2$ isomorphen Untergraphen und verbindet zwei sich zufolge der Isomorphie entsprechende Knotenpunkte zweier Untergraphen genau dann durch eine Kante, wenn die durch die Untergraphen ersetzten Knotenpunkte in $\mathbf{G}_1$ adjazent waren. Man kann auf diese Weise die Klasse der Graphen der mehrstufigen Zylinderpolytope charakterisieren. Polytope dieser Art wurden auch in der Arbeit [2b] betrachtet.

8. Die Existenz eines geeigneten Unterraumes R^d

Man kann Satz 8 auch in einer graphentheoretischen Form aussprechen:

Satz 8'. *Es sei $\mathbf{G}'$ der duale Graph eines schlichten zusammenhängenden Graphen $\mathbf{G}$, der regulär vom Grad d $(d \geqq 3)$ ist. $\mathbf{G}$ enthalte ein reguläres Basiskreissystem. $\mathbf{G}'$ habe n Knotenpunkte, und das System $\mathbf{V}^d$ bestehe aus m vollständigen Untergraphen der Ordnung d. Der Graph $\mathbf{G}'$ ist genau dann isomorph zum Graphen eines simplizialen d-Polytops P' mit einem zu $\mathbf{V}^d$ isomorphen Rand, wenn es nach Einbettung von $\mathbf{G}'$ in ein reguläres $(n-1)$-Simplex $S_{n-1} \subset R^{n-1}$, wobei die Knotenpunkte von $\mathbf{G}'$ den Eckpunkten von S_{n-1} entsprechen und die Kanten von $\mathbf{G}'$ zugleich Kanten von S_{n-1} sind, einen Unterraum R^d von R^{n-1} durch den Mittelpunkt 0 von S_{n-1} gibt, der mit dem relativ Inneren jedes Co-Simplexes $S_{n-d-1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ genau einen Punkt P_i gemeinsam hat. Dabei ist $S_{n-d-1,i}$ das zu dem $(d-1)$-Simplex $S_{d-1,i}$ gehörige Co-Simplex, und $S_{d-1,i}$ wird von genau den Eckpunkten von S_{n-1} aufgespannt, die dem Untergraphen $\mathbf{V}_{di}$ entsprechen.*

Offensichtlich kann man auf die Regularität von S_{n-1} verzichten, da jedes $(n-1)$-Simplex durch eine geeignete Affinität in ein reguläres übergeführt werden kann.

Im Fall $d = 3$ braucht man die Existenz des Unterraumes R^d nicht explizit zu fordern. Hier genügt es, wenn man verlangt, daß die Anzahl $f_0' = f_2$ der Knotenpunkte, die Anzahl $f_1' = f_1$ der Kanten und die Anzahl $f_2' = f_0$ der vollständigen Untergraphen $\mathbf{V}_{3i}$ des Systems $\mathbf{V}^3$ von $\mathbf{G}'$ die Bedingung $f_0' - f_1' + f_2' = 2$, die bekannte Eulersche Formel, erfüllt. Diese Bedingung ist zusammen mit der Forderung, daß $\mathbf{G}'$ der duale Graph eines kubischen Graphen mit einem Basiskreissystem ist, notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathbf{G}'$ bzw. die durch ihn gegebene Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^2$ isomorph zum Graphen eines simplizialen 3-Polytops ist.
Auf Grund des Satzes von STEINITZ kann man natürlich auch sagen, daß ein Graph $\mathbf{G}'$ genau dann isomorph zum Graphen eines simplizialen 3-Polytops ist, wenn er der duale Graph eines kubischen Graphen $\mathbf{G}$ ist, der planar und dreifach zusammenhängend ist. $\mathbf{G}$ ist dann isomorph zum Graphen eines einfachen 3-Polytops.
Es sei nun $d > 3$ und $\mathbf{G}'$ ein Graph, der dieselben Eigenschaften wie der Graph $\mathbf{G}'$ im Satz 8′ hat. Bettet man $\mathbf{G}'$ so, wie im Satz 8′ beschrieben, in den Randkomplex eines regulären $(n - 1)$-Simplexes S_{n-1} ein, so erhält man durch die Simplexe $S_{d-1,i}$ in $bd\, S_{n-1}$ eine geschlossene, $(d - 1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$. Notwendig für die Existenz eines geeigneten Unterraumes R^d ist, daß $\mathfrak{M}^{d-1}$ die Zykleneigenschaft hat. Daß dies zusammen mit der Forderung der Gültigkeit der Eulerschen Gleichung $\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_k = 1 - (-1)^d$ nicht hinreichend ist, wie im Fall $d = 3$, ist bekannt. Die durch die Einbettung von $\mathbf{G}'$ entstehende Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ besitzt aber stets die Zykleneigenschaft. Weitere notwendige Bedingungen für die Existenz von R^d bzw. dafür, daß $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops ist, lassen sich mit Hilfe der Homologiegruppen von $\mathfrak{M}^{d-1}$ gewinnen (vgl. [9], S. 68—69). Die topologische Struktur von $\mathfrak{M}^{d-1}$ wird durch die Inzidenzmatrix $L = (l_{ik})_{i=1}^{m}{}_{k=1}^{n}$ mit $l_{ik} > 0$ für $k \in N \setminus D_i$ und $l_{ik} = 0$ für $k \in D_i$ und $\sum_{k=1}^{n} l_{ik} = 1$ bestimmt. Dabei sind, wie bereits bemerkt, die positiven Elemente l_{ik} unbekannt. Die Matrix L wird in der Weise normiert, daß ein beliebiges $(d - 1)$-Simplex $S_{d-1,i}$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$ mit der Nummer $i = d$ versehen wird, während $d - 1$ der d an dieses in einem $(d - 2)$-Simplex grenzenden Simplexe $S_{d-1,i}$ die Nummern $i = 1, 2, \ldots, d - 1$ und eines die Nummern $i = d + 1$ erhält. Die restlichen $m - d - 1$-Simplexe $S_{d-1,i}$ bekommen die Nummer $i = d + 2, d + 3, \ldots, m$. Die Eckpunkte von S_{n-1} werden so numeriert, daß $S_{d-1,d}$ die Eckpunkte $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_d^0$ hat, während für $i = 1, 2, \ldots, d - 1$ das Simplex $S_{d-1,i}$ den Eckpunkt x_i^0 nicht und $S_{d-1,d+1}$ den Eckpunkt x_d^0 nicht enthält. Eine solche Numerierung der Eckpunkte und $(d - 1)$-Simplexe ist immer möglich. Dann hat die Matrix $\boldsymbol{L}$ folgendes Aussehen:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdot & \cdots & 0 & 0 & l_{1,d+1} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & l_{2d+1} & \cdots & l_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & l_{d-1,d-1} & 0 & l_{d-1,d+1} & \cdots & l_{d-1,n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 & l_{d,d+1} & \cdots & l_{dn} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & l_{d+1,d} & l_{d+1,d+1} & \cdots & l_{d+1,n} \\ l_{d+2,1} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & l_{d+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_{m1} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ist $\boldsymbol{I}$ eine $m \times n$-Matrix, deren Elemente sämtlich den Wert 1 haben, so kann man die $m \times n$-Matrix $\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} - (1/n)\,\boldsymbol{I}$ betrachten. Die Matrix $\overline{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{X}_n^0$ hat in der n-ten Spalte lauter Nullen, während ihre ersten $n - 1$ Spalten mit den $n - 1$ Spalten der

Matrix LX^0 übereinstimmen. Folglich ist Rang $(\bar{L}X_n^0) =$ Rang (LX^0). Da X_n^0 eine orthogonale Matrix ist, ergibt sich Rang $\bar{L} =$ Rang $(\bar{L}X_n^0) =$ Rang (LX^0). Ja mehr noch. Das durch die Zeilenvektoren von $\bar{L}$ gebildete Vektorbündel im n-dimensionalen Raum ist kongruent zu dem von den Zeilenvektoren der Matrix $\bar{L}X_n^0$ aufgepannten Vektorbündel und zu dem Vektorbündel, das durch die Zeilenvektoren von LX^0 gebildet wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß alle drei Vektorbündel auf orthogonale Koordinatensysteme mit gleichen Einheiten bezogen sind und alle Vektoren als Ortsvektoren aufgefaßt werden.

Durch die spezielle Numerierung der Eckpunkte und $(d-1)$-Simplexe $S_{d-1,i}$ hat man erreicht, daß bei beliebig gewählten positiven Elementen l_{ik} $(k \in N \setminus D_i)$ der ersten d Zeilen von L die aus den ersten d Zeilen von $\bar{L}$ gebildete Teilmatrix $\bar{L}_1$ stets den Rang d hat. Daher haben auch die aus den ersten d Zeilen von $\bar{L}X_n^0$ und LX^0 gebildeten Teilmatrizen $\bar{L}_1X_n^0$ und L_1X^0 den Rang d. Damit auch $\bar{L}$ und $\bar{L}X_n^0$ bzw. LX^0 den Rang d haben, müssen die letzten $m-d$ Zeilen der Matrix $\bar{L}$ von den ersten d Zeilen linear abhängen. Das heißt, es gibt für $r = d+1, d+2, \ldots, m$ Zahlen u_{ir}, so daß

$$\sum_{i=1}^{d} \bar{l}_i u_{ir} = \bar{l}_r, \qquad r = d+1, d+2, \ldots, m,$$

erfüllt ist. Hierbei bedeuten $\bar{l}_i$ den i-ten und $\bar{l}_r$ den r-ten Zeilenvektor von $\bar{L}$. Analoge Gleichungen gelten für die entsprechenden Zeilenvektoren der Matrizen $\bar{L}X_n^0$ und LX^0. Da $\bar{l}_{ik} = l_{ik} - 1/n$ ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{d} u_{ir}\left(l_{ik} - \frac{1}{n}\right) = l_{rk} - \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad r = d+1, d+2, \ldots, m.$$

Nun ist aber $l_{rk} = 0$ für $k \in D_r$ und $l_{rk} > 0$ für $k \in N \setminus D_r$. Daher geht das obige System, wenn man noch im zweiten Fall k durch j ersetzt, in $m - r$ Teilsysteme (a_r) für $r = d+1, d+2, \ldots, m$ über. Jedes dieser $m - r$ Teilsysteme zerfällt seinerseits wieder in zwei Teilsysteme (a_r^1) und (a_r^2). Es ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{d}\left(l_{ik} - \frac{1}{n}\right) u_{ir} + \frac{1}{n} = 0, \quad k \in D_r \quad (a_r^1)\\ &\sum_{i=1}^{d}\left(l_{ij} - \frac{1}{n}\right) u_{ir} + \frac{1}{n} > 0, \quad j \in N \setminus D_r \quad (a_2^r)\end{aligned}\right\}(a_r),$$
$$r = d+1, d+2, \ldots, m.$$

In jedem der $m - r$ Teilsysteme (a_r) kommen von den Elementen l_{ik} der Matrix L nur die Elemente l_{ik} der ersten d Zeilen von L vor. Es gilt nun der

Satz 9. *Genau dann, wenn sich die positiven Elemente l_{ik} der ersten d Zeilen von L so wählen lassen, daß die $m - d$ Systeme (a_r) für jedes $r = d+1, d+2, \ldots, m$ eine eindeutige Lösung $u_{1r}, u_{2r}, \ldots, u_{dr}$ haben, existiert zu der durch die Matrix L bestimmten Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{d-1}$ im Randkomplex eines regulären $(n-1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{n-1}$ ein Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$, der die Voraussetzungen des im Satz 8 bzw. 8′ erwähnten Unterraumes R^d erfüllt. Das heißt, $\mathfrak{M}^{d-1}$ ist isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops.*

Beweis. Es habe jedes System (a_r) für $r = d+1, d+2, \ldots, m$ nach Wahl der positiven Elemente l_{ik}, l_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, d;\ k, j \in N \setminus D_i)$ eine eindeutige Lösung $u_{1r}, u_{2r}, \ldots, u_{dr}$. Dann haben die Matrizen $\bar{L}_1$, $\bar{L}_1X_n^0$ und L_1X^0 den Rang d. Setzt man

$$l_{rk} = \sum_{i=1}^{d}\left(l_{ik} - \frac{1}{n}\right) u_{ir} + \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

so ergibt sich $l_{rk} > 0$ für $k \in N \setminus D_r$ und $l_{rk} = 0$ für $k \in D_r$. Demnach ist die r-te Zeile von $\bar{L}$ von den ersten d Zeilen der Matrix $\bar{L}$ linear abhängig. Das gleiche gilt auch für die entsprechenden Zeilen der Matrizen $\bar{L}X_n^0$ und LX^0. Das heißt aber, daß auch $\bar{L}$, $\bar{L}X_n^0$ und LX^0 den Rang d haben. Die Zeilenvektoren von LX^0 sind Ortsvektoren von Punkten P_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ eines R^{n-1} mit der Eigenschaft, daß $P_i \in \operatorname{relint} S_{n-d-1,i}$ für alle P_i gilt. Da Rang $LX^0 = d$ ist, bestimmen die Punkte P_i zusammen mit dem Mittelpunkt 0 von S_{n-1} einen Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$. Der Unterraum R^d hat mit dem relativ Inneren jedes Co-Simplexes $S_{n-d-1,i}$ nur den Punkt P_i und keinen anderen gemein. Gäbe es noch einen zweiten Punkt $P_i' \neq P_i$ mit $P_i' \in \operatorname{relint} (S_{n-d-1,i}) \cap R^d$, so ließe sich im Fall $i = r > d$ dessen Ortsvektor in der Form $p_r' = \sum_{k=1}^{n} l_{rk}' x_k^0$ mit $l_{rk}' = 0$ für $k \in D_r$ und $l_{rk}' > 0$ für $k \in N \setminus D_r$ und $\sum_{k=1}^{n} l_{rk}' = 1$ schreiben. Da $P_r' \in R^d$, ließen sich p_r' bzw. $\big(l_{r1}' - (1/n), \ldots, l_{rn}' - (1/n)\big)$ linear aus den ersten d Zeilen von LX^0 bzw. $\bar{L}$ kombinieren, was der vorausgesetzten eindeutigen Lösbarkeit von (a_r) für $r \geqq d + 1$ widerspräche. Im Fall $i = r \leqq d$ ist das System (a_r) stets eindeutig lösbar. Man erhält die Lösung $u_{jr} = \delta_{jr}$ $(j = 1, 2, \ldots, d)$, woraus folgt, daß für $i = r \leqq d$ der Zeilenvektor $\bar{l}_r' = \bar{l}_r$ und damit $l_r' = l_r$ bzw. wegen $i = r$ der Punkt $P_i' = P_i$ ist im Widerspruch zur Annahme. Mithin erfüllt der Unterraum R^d die Voraussetzungen des Satzes 8, und $\mathfrak{M}^{d-1}$ ist isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{M}^{d-1}$ eine geschlossene $(d - 1)$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit, die isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops ist. Nach Einbettung von $\mathfrak{M}^{d-1}$ in den Randkomplex eines regulären $(n - 1)$-Simplexes $S_{n-1} \subset R^{-1}$ existiert nach Satz 8 ein Unterraum $R^d \subset R^{n-1}$, der die Voraussetzungen des in Satz 8 genannten Unterraumes gleicher Dimension erfüllt. Dabei wird angenommen, das $\mathfrak{M}^{d-1}$ aus m Simplexen der Dimension $d - 1$ und ihren Randsimplexen, insbesondere aus n Simplexen der Dimension 0 besteht. Wegen der Existenz von R^d gibt es Punkte P_r mit $\{P_r\} = R^d \cap \operatorname{relint} (S_{n-d-1,r})$ für $r = 1, 2, \ldots, m$. Ihre Ortsvektoren p_r haben die Gestalt $p_r = \sum l_{rk} x_k^0$ mit $l_{kr} = 0$ für $k \in D_r$ und $l_{kr} > 0$ für $k \in N \setminus D_r$, $\sum l_{kr} = 1$. Die Matrix der Elemente l_{rk} kann als Inzidenzmatrix von $\mathfrak{M}^{d-1}$ aufgefaßt werden. Die Numerierung der n Simplexe der Dimension 0 und der m Simplexe der Dimension $d - 1$ von $\mathfrak{M}^{d-1}$ kann so gewählt werden, daß $L = (l_{rk})_{r=1,k=1}^{m\ \ n}$ die gleiche Gestalt wie in (1) hat. Dann ist der Rang der Teilmatrix $\bar{L}_1$ von $\bar{L} = L - (1/n)\, I$ gleich d. Nun hat die Matrix LX^0 ebenfalls den Rang d, weil die Punkte P_r alle in R^d liegen, ihre Ortsvektoren die Zeilenvektoren von LX^0 sind und die Teilmatrix L_1X^0 den Rang d hat. Damit hat aber auch $\bar{L}$ den Rang d. Die letzten $m - d$ Zeilenvektoren von $\bar{L}$ hängen linear von den ersten d Zeilenvektoren von $\bar{L}$ ab. Daher sind die Systeme (a_r) für $r = d + 1, d + 2, \ldots, m$ lösbar. Sie können aber auch nur eindeutig lösbar sein, weil es sonst zu einem Punkt P_r $(r > d + 1)$ noch einen zweiten Punkt $P_r' \neq P_r$ mit $P_r \in R^d \cap \operatorname{relint} (S_{n-d-1,r})$ gäbe, was aber der Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}^{d-1}$ isomorph zum Randkomplex eines simplizialen d-Polytops ist, widerspricht. Denn in diesem Fall darf R^d für $r = 1, 2, \ldots, m$ mit relint $(S_{n-d-1,r})$ nur genau einen Punkt gemeinsam haben.

Es läßt sich noch ein zweites System von Gleichungen und Ungleichungen mit Hilfe der Matrizen $\bar{L}_1$ bzw. L_1 bilden, das ebenfalls in $m - r$ Teilsysteme (b_r) zerlegt werden kann, wobei jedes Teilsystem in zwei Teilsysteme (b_r^1) und (b_r^2) zerfällt. Das System (b_r^1) besteht seinerseits wieder aus $n - d$ Teilsystemen. Die Systeme (b_r) lauten

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{k \in D_r} \left(l_{ik} - \dfrac{1}{n}\right) v_{kj}^r = l_{ij} - \dfrac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, d, \quad j \in N \setminus D_r & (b_r^1) \\ \sum\limits_{k \in D} v_{kj}^r < 1, \quad j \in N \setminus D_r \quad (b_r^2) & \end{array}\right\} (b_r).$$

$r = d + 1, d + 2, \ldots, m$. Es gilt der leicht zu beweisende

Satz 10. *Lassen sich die positiven Elemente* l_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, d;\ k \in N \setminus D_i)$ *der aus den ersten* d *Zeilen von* $\boldsymbol{L}$ *bestehenden Teilmatrix* $\boldsymbol{L}_1$ *so wählen, daß jedes der* $m - r$ *Systeme* (b_r) *für* $r = d + 1, d + 2, \ldots, m$ *eine eindeutige Lösung* v_{kj}^r *besitzt, so hat jedes System* (a_r) *für* $r = d + 1, d + 2, \ldots, m$ *eine eindeutige Lösung* u_{rk} *und umgekehrt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit Δ_r die Unterdeterminante d-ter Ordnung, die aus denjenigen Spalten von $\boldsymbol{L}_1$ gebildet wird, deren Indizes zur Menge D_r gehören. Ist (b_r) nach Wahl der Elemente l_{ik} eindeutig lösbar, so verschwindet die Determinante Δ_r jedes der sich für $j \in N \setminus D_r$ ergebenden Teilsysteme (b_r^1) nicht, und daher ist auch (a_r^1) eindeutig lösbar. Die Lösungen sind $u_{1r}, u_{2r}, \ldots, u_{dr}$. Multipliziert man die i-te Gleichung des j-ten Teilsystems von (b_r^1) mit u_{ir} und summiert über $i = 1, 2, \ldots, d$, so folgt wegen (a_r^1) und (b_r^2) und $j \in N \setminus D_r$ das System (a_r^2).
Ist umgekehrt (a_r) für $r = d + 1, d + 2, \ldots, m$ nach Wahl der positiven Elemente l_{ik} von $\boldsymbol{L}_1$ eindeutig lösbar, so ist die Determinante Δ_r wieder nicht Null und daher jedes der $n - d$ Teilsysteme von (b_r^1) eindeutig lösbar. Die Lösungen sind v_{kj}^r. Multiplikation der k-ten Gleichung von (a_r^1) mit v_{kj}^r und anschließende Summation über alle $k \in D_r$ ergibt wegen (a_r^2) und (b_r^1) schließlich (b_r^2).
Damit ist die Äquivalenz der Systeme (a_r), $r = d + 1, d + 2, \ldots, m$, mit den Systemen (b_r) bezüglich der Existenz eines simplizialen d-Polytops mit vorgeschriebener Seitenstruktur nachgewiesen.

LITERATUR

[1] Grünbaum, B.: Polytopes, graphs, complexes. Bull. Amer. Math. Soc. *76* (1970), 1131 bis 1201.

[2] Grünbaum, B.: Convex polytopes. Interscience Publishers, John Wiley, London—New York—Sydney 1967.

[2a] Haustein, D.: Einfache d-Polytope und ihre Graphen. Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt 1974.

[2b] Hertel, E.: Mittelpunktspolyeder im E^4. Elemente der Mathematik *29*, Nr. 3 (1974), 59—63.

[3] Naumann, H.: Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektionen höherdimensionaler Würfel, Simplices und Maßpolytope. Math. Z. *65* (1956), 91—103.

[4] Nef, W.: Lehrbuch der linearen Algebra. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966.

[5] Reidemeister, K.: Topologie der Polyeder. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1934.

[6] Rinow, W.: Lehrbuch der Topologie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[7] Sachs, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I und II. B. G. Teubner, Leipzig 1970.

[8] Schöne, W.: Einfache d-Polytope und ihre Graphen. Materialien zur Arbeitstagung „Mathematische Optimierung", Vitte auf Hiddensee 3. 5. bis 9. 5. 1974, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentrum für Rechentechnik S. 169—178.

[8a] Schöne, W.: Über Pseudomannigfaltigkeiten, die sich als Randkomplexe simplizialer konvexer Polytope realisieren lassen. Vortrag auf der Tagung Geometrie und Anwendungen 1977 in Gaußig. Weiterbildungszentrum für math. Kybernetik und Rechentechnik, TU Dresden, Heft 28/78.

[9] SEIFERT, H., und W. THRELLFALL: Lehrbuch der Topologie. B G. Teubner, Leipzig und Berlin 1934.
[10] SMALE, S.: The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions. Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 373–375.

Manuskripteingang: 20. 1. 1977

VERFASSER:
WOLFGANG SCHÖNE, Sektion Mathematik/Physik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt