

Werk

Titel: Typisierung und Angabe eines Baukastens für Tetraeder in Räumen konstanter Krümmu...

Autor: BÖHM, J.

Jahr: 1978

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0007|log9

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Typisierung und Angabe eines Baukastens für Tetraeder in Räumen konstanter Krümmung

JOHANNES BÖHM

1. Einleitung

Die Frage, ob sich ein Simplex in einem r -dimensionalen euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Raum mit der normierten Krümmung $\kappa = 0, -1$ bzw. $+1$ (kurz *euklidisches, hyperbolisches* bzw. *elliptisches Simplex* genannt) elementar-geometrisch in Orthoscheme zerlegen läßt, ist ein altes, für den allgemeinen Fall noch nicht gelöstes Problem (vgl. H. HADWIGER [3]). Es besteht die Möglichkeit, jedes elliptische Simplex, das im Innern einer geeigneten Hyperkugel des elliptischen Raumes eingebettet werden kann und wegen dieser Eigenschaft ein „zulässiges“ Simplex genannt wird, derart elementar-geometrisch zu zerlegen, daß die Teilsimplexe zulässige Simplexe mit nichtstumpfen Kanten sind (vgl. [2]). Darum reicht es aus, lediglich Simplexe in einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung $\kappa (= \pm 1$ oder $0)$ zu untersuchen, in deren (dreieckigen) Wänden je Wand höchstens ein stumpfer Dreieckswinkel vorkommt. Dabei muß für den elliptischen Fall ($\kappa = +1$) stets die Einschränkung gemacht werden, daß keine Simplexkante stumpf ist. Die Menge dieser euklidischen, hyperbolischen und elliptischen r -dimensionalen Simplexe sei $\mathfrak{S}^{(r+1)}$.

H.-CHR. LENHARD [4] konnte zeigen, daß im dreidimensionalen euklidischen Fall die Menge der Orthoscheme einen Baukasten für sämtliche Simplexe des dreidimensionalen euklidischen Raumes darstellt. Hier sollen jetzt die dreidimensionalen Simplexe (Tetraeder) aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ hinsichtlich ihrer Zerlegung in Bausteine eines „gröberen“ Tetraederbaukastens betrachtet werden. Dazu gehört auch die Angabe der Minimalanzahl der Bausteine, in die ein jedes Tetraeder zerlegt werden kann. Nach einer Typisierung dieser Tetraeder in bezug auf die Lage ihrer stumpfen Dreieckswinkel — es gibt insgesamt 14 verschiedene zu betrachtende Tetraedertypen — gelingt die Angabe dieses Tetraederbaukastens, dessen Elemente geeignet sind, jedes beliebige Tetraeder durch elementar-geometrische Addition zusammensetzen. Tetraeder, die zu diesem Tetraederbaukasten gehören, haben die Eigenschaft, daß sie jeweils einen Eckpunkt besitzen, von dem aus die Lote auf die Kanten der gegenüberliegenden Dreieckswände nicht außerhalb des Tetraeders liegende Lotfußpunkte haben (Eigenschaft (L_1)). Die Menge dieser Tetraeder ist eine echte Teilmenge der Menge der Tetraeder $\mathfrak{S}^{(4)}$ und eine echte Obermenge der Menge der dreidimensionalen Orthoscheme aus $\mathfrak{S}^{(4)}$. Damit gelingt es, einen weiteren Tetraederbau-

kasten anzugeben, dessen Elemente durch eine bestimmte „Eckeneigenschaft“ (L_1) gekennzeichnet sind. Man kommt stets mit höchstens zwei Teiltetraedern des Baukastens aus, in die jedes beliebige Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ vollständig zerlegt werden kann.

2. Tetraedertypen

Falls in jedem beliebigen Dreieck höchstens ein stumpfer Dreieckswinkel vorkommt, ergibt sich für ein Tetraeder mit seinen vier dreieckigen Wänden, daß dieses höchstens vier stumpfe Winkel der Ordnung Eins (Dreieckswinkel) besitzt. Hinsichtlich Anzahl und gegenseitiger Lage dieser stumpfen Winkel lassen sich alle Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ typisieren.

Die elliptischen Tetraeder, die nicht zu $\mathfrak{B}^{(4)}$ gehören — sie besitzen mindestens eine stumpfe Kante — werden zu einem gesonderten Typ (0) zusammengefaßt. Sie spielen für die weiteren Untersuchungen wegen ihrer elementar-geometrischen Zerlegbarkeit in Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ (vgl. [2]) keine wesentliche Rolle. Darum wird jetzt auf diesen Typ (0) nicht mehr eingegangen und nur noch die Typisierung aller Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ vorgenommen.

Den folgenden Untersuchungen werden die Tetraeder $T = 1, 2, 3, 4$ mit den Eckpunkten 1, 2, 3 und 4 aus der Menge $\mathfrak{B}^{(4)}$ zugrunde gelegt. Für die jeweilige Verteilung der höchstens vier stumpfen Dreieckswinkel in diesen Tetraedern gibt es mehrere Möglichkeiten. Abgesehen von der Tatsache, daß die Dreieckswinkel jeweils stumpf oder nichtstumpf sind, kommt es nicht auf die Größe der Dreieckswinkel an. Darum werden genau alle diejenigen Tetraeder zu einer Klasse zusammengefaßt, die an genau denselben Stellen bezüglich der Eckpunkte und Wände stumpfe Dreieckswinkel haben.

Es mögen die 12 Dreieckswinkel des Tetraeders T durch $\langle i', j \rangle$, ($1 \leq i, j \leq 4$) bezeichnet werden, wobei $\langle i', j \rangle$ denjenigen Dreieckswinkel angibt, der in der dreieckigen Wand i' vorkommt (i' liegt der Ecke i des Tetraeders gegenüber) und dessen Scheitel die Ecke j ist. Zur Symbolisierung des Vorkommens und der Lage von stumpfen Dreieckswinkeln in T wird noch das Zeichen $\langle i', 0 \rangle$ ($1 \leq i \leq 4$) eingeführt. Es soll zum Ausdruck bringen, daß in der Wand i' kein stumpfer Winkel auftritt. Nunmehr kann jede Tetraederklasse folgendermaßen beschrieben werden:

Definition 1. $(\langle 1', j_1 \rangle, \langle 2', j_2 \rangle, \langle 3', j_3 \rangle, \langle 4', j_4 \rangle)$ ($0 \leq j_k \leq 4$, $j_k \neq k$ ($k = 1, 2, 3, 4$)) ist genau die Klasse derjenigen Tetraeder 1, 2, 3, 4 (kurz *Tetraederklasse*), bei denen in der Wand i' ($i = 1, 2, 3, 4$) für $j_i = 0$ kein stumpfer Winkel und für $j_i > 0$ genau ein stumpfer Winkel mit der Ecke j_i als Scheitel auftritt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise genügt für die Beschreibung dieser soeben erklärten Tetraederklasse bereits die Angabe der geordneten Vierermenge $\langle j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$. Es reicht aus, jeweils ein beliebiges Tetraeder aus jeder Klasse als Repräsentant der betreffenden Klasse auszuwählen und für die weiteren Untersuchungen der einzelnen Klassen zu betrachten.

Satz 1. Die Anzahl sämtlicher Klassen von Tetraedern, in denen genau p ($0 \leq p \leq 4$) stumpfe Dreieckswinkel vorkommen, ist $\binom{4}{p} \cdot 3^p$. Die Anzahl aller Tetraederklassen beträgt 256.

Beweis. Eine Tetraederklasse, in deren Tetraedern jeweils genau p stumpfe Winkel vorkommen, wird durch das Symbol $\langle j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$ charakterisiert, bei dem unter den j_k genau $4 - p$ Stück gleich Null sind. Dafür gibt es $\binom{4}{4-p} = \binom{4}{p}$ Möglichkeiten.

Die übrigen j_k können genau drei Werte, nämlich die Werte 1, 2, 3 oder 4 außer dem Wert k annehmen, so daß sich hierfür insgesamt 3^p Möglichkeiten ergeben. Die Gesamtanzahl der Möglichkeiten beträgt demzufolge $\binom{4}{p} \cdot 3^p$, wie behauptet wurde.

Die Anzahl sämtlicher Klassen ist dann demzufolge $\sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} \cdot 3^p = 1 + 12 + 54 + 108 + 81 = 256$. Letztere Anzahl erhält man auch durch die Abzählung sämtlicher Symbole $\langle j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$. Da jedes j_k vier verschiedene Werte ($0 \leq j_k \leq 4$, $j_k \neq k$) annehmen kann, ergeben sich $4^4 = 256$ Möglichkeiten.

Des weiteren gelingt nun eine Typisierung dieser Tetraederklassen.

Definition 2. Zwei Tetraederklassen gehören genau dann zu demselben Tetraedertyp T , wenn es eine Permutation σ der Zahlen 1, 2, 3, 4 gibt, so daß sich nach Anwendung von σ auf die Bezeichnung der Eckpunkte der Tetraeder der einen Tetraederklasse die der anderen Tetraederklasse ergeben. Beide Klassen werden dann *typengleich* genannt.

Die Relation der Typengleichheit ist eine Äquivalenzrelation, wie sich sofort aus der Gruppeneigenschaft der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_4 ergibt.

Die Anwendung einer Permutation σ auf die Bezeichnung der Eckpunkte eines Tetraeders oder der Tetraeder einer Tetraederklasse soll jetzt kurz die Anwendung von σ auf das betreffende Tetraeder bzw. auf die betreffende Tetraederklasse genannt werden.

Satz 2. *Es gibt genau 19 Tetraedertypen.*

Beweis. Zur Beschreibung eines Tetraedertyps genügt die Angabe einer Klasse K_0 als Repräsentant. Die Anwendung einer beliebigen Permutation aus \mathfrak{S}_4 auf den Repräsentanten K_0 (gemäß der obigen Bemerkung vertreten durch ein spezielles Tetraeder) ergibt entweder ein Tetraeder derselben Klasse K_0 oder eines einer anderen Klasse, aber desselben Typs. Aus bekannten Sätzen folgt, daß die Menge aller Permutationen, die für alle Tetraeder aus K_0 jeweils Tetraeder derselben Klasse K_0 reproduzieren, eine Gruppe G_0 bildet und die Menge aller Permutationen, die jeweils genau ein Tetraeder aus der Klasse K_q ($\neq K_0$, aber typengleich mit K_0) ergeben, eine Nebengruppe von G_0 darstellt. Betrachtet man darum die 256 Tetraederklassen als „Punkte“ einer Menge \mathfrak{R} , auf der die Gruppe \mathfrak{S}_4 wirkt, dann hat man den Kleinschen Raum $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}_4)$ zu untersuchen. Werden auf einen Punkt von \mathfrak{R} sämtliche Elemente von \mathfrak{S}_4 angewendet, dann entsteht die *Bahnkurve* (Orbit) des Punktes K_0 , zu der genau diejenigen Punkte gehören, die typengleiche Klassen symbolisieren. Wie bereits bemerkt, stellt die Menge aus \mathfrak{S}_4 , die K_0 reproduziert, eine Untergruppe $G_0 \subseteq \mathfrak{S}_4$ dar. Ihre Nebengruppen geben zu den übrigen Punkten der Bahnkurve Anlaß. Daher kann die Faktorgruppe \mathfrak{S}_4/G_0 zur Beschreibung der zu K_0 typengleichen Klassen dienen. Auf diese Weise gelingt die folgende Typisierung. Die Beschreibung eines Typs durch einen Repräsentanten wird hier so vorgenommen, daß aus der Menge typengleicher Klassen $\langle j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$ diejenige Klasse ausgewählt wird, die bei lexikographischer Anordnung der geordneten Elemente j_1, j_2, j_3, j_4 dieser Klassen an erster Stelle steht. Bei jedem Typ wird noch zusätzlich die Anzahl aller

typengleichen Klassen angegeben. Damit hat man folgende Tabelle der Tetraedertypen (vgl. dazu auch Abb. 2 und 3; stumpfe Winkel sind durch Winkelbögen markiert):

0 stumpfe Winkel $\left(\binom{4}{0} \cdot 3^0 = 1 \text{ Klasse}\right)$:

$\langle 0000 \rangle$ (umfaßt 1 Klasse);

1 stumpfer Winkel $\left(\binom{4}{1} \cdot 3^1 = 12 \text{ Klassen}\right)$:

$\langle 0001 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen);

2 stumpfe Winkel $\left(\binom{4}{2} \cdot 3^2 = 54 \text{ Klassen}\right)$:

$\langle 0011 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 0012 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 0013 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 0043 \rangle$ (umfaßt 6 Klassen);

3 stumpfe Winkel $\left(\binom{4}{3} \cdot 3^3 = 108 \text{ Klassen}\right)$:

$\langle 0111 \rangle$ (umfaßt 4 Klassen),

$\langle 0112 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 0122 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 0123 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 0143 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 0322 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 0342 \rangle$ (umfaßt 8 Klassen);

4 stumpfe Winkel $\left(\binom{4}{4} \cdot 3^4 = 81 \text{ Klassen}\right)$:

$\langle 2111 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 2112 \rangle$ (umfaßt 12 Klassen),

$\langle 2113 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 2143 \rangle$ (umfaßt 3 Klassen),

$\langle 2311 \rangle$ (umfaßt 24 Klassen),

$\langle 2341 \rangle$ (umfaßt 6 Klassen).

Zum Nachweis der Richtigkeit und Vollständigkeit der Tabelle ist für jeden einzelnen Typ T mit dem Repräsentanten K und der angegebenen Anzahl a typengleicher Klassen zu verifizieren, daß sich bei Anwendung aller Elemente aus \mathfrak{S}_4 auf K genau a typengleiche Klasse ergeben und unter diesen sich keiner der angegebenen Repräsentanten anderer Typen befindet. Da die Summe der in der Tabelle angegebenen Klassen der jeweiligen Typen 256 beträgt, ist dann damit jeder der 256 Klassen genau ein Typ zugeordnet und somit eine vollständige Typisierung erreicht.

Am Beispiel des Typs $\langle 0043 \rangle$ soll das oben beschriebene Vorgehen explizit ausgeführt werden. Für die anderen Typen ist dann in analoger Weise zu verfahren.

Der Typ mit dem Repräsentanten $\langle 0043 \rangle = K_0$ enthält Tetraeder mit genau zwei stumpfen Winkeln an ganz bestimmten Stellen. Das angegebene Symbol ist die Ab-

kürzung für die Schreibweise $\langle 1', 0 \rangle, \langle 2', 0 \rangle, \langle 3', 4 \rangle, \langle 4', 3 \rangle$). Die Untergruppe $G_0 \subset \mathfrak{S}_4$ mit $G_0 = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$ reproduziert K_0 bei Anwendung der Elemente von G_0 auf jedes Tetraeder aus der Klasse K_0 . Alle anderen Elemente von \mathfrak{S}_4 reproduzieren K_0 nicht, sondern ergeben die Klassen $K_1 = \langle 0320 \rangle, K_2 = \langle 0402 \rangle, K_3 = \langle 2100 \rangle, K_4 = \langle 3010 \rangle$ und $K_5 = \langle 4001 \rangle$. Die Klasse K_i ist jeweils das Ergebnis bei Anwendung der Elemente der Nebengruppe $\sigma_i G_0$ auf die Klasse K_0 mit $\sigma_1 = (24), \sigma_2 = (23), \sigma_3 = (13)(24), \sigma_4 = (14)$ und $\sigma_5 = (13)$. Die K_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) kommen nicht unter den in der Tabelle aufgeführten Repräsentanten vor. Somit gehören zu diesem Typ genau sechs Klassen, wie angegeben.

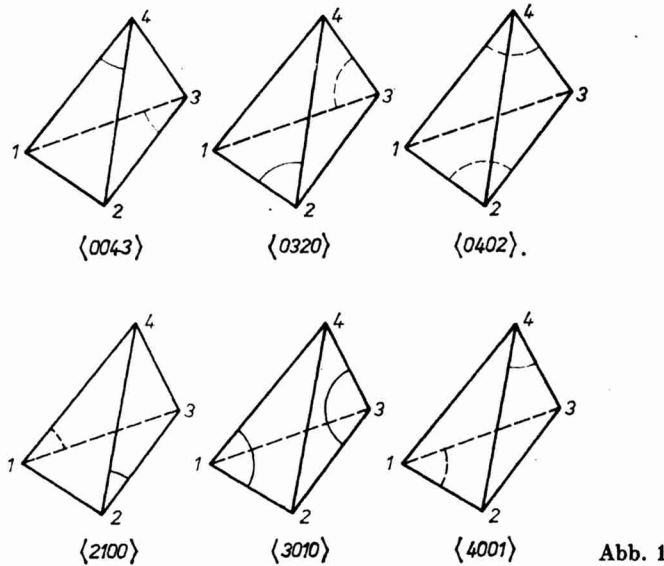


Abb. 1

Die geometrische Veranschaulichung ist Abb. 1 zu entnehmen. Man erkennt, daß bei diesem Typ die beiden stumpfen Winkel (durch je einen Winkelbogen markiert) nicht diejenigen Tetraedereckpunkte als Scheitel haben, die den Wänden, in denen diese stumpfen Winkel liegen, gemeinsam sind.

Für die weiteren Betrachtungen reicht es nun aus, nur jeweils die einzelnen Typen hinsichtlich ihrer Zerlegungseigenschaften zu untersuchen. Da aber insbesondere die geometrische Realisierung für die weiteren Ausführungen von Interesse ist, soll zunächst die Frage untersucht werden, ob es unter den angegebenen Typen welche gibt, die sich weder im euklidischen, hyperbolischen noch im elliptischen (im letzteren mit der Einschränkung, daß alle Tetraederkanten nicht stumpf sind) dreidimensionalen Raum nicht realisieren lassen. Hierüber gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 3. Die fünf Typen

- (I) $\langle 0013 \rangle,$
- (II) $\langle 0123 \rangle,$
- (III) $\langle 0342 \rangle,$
- (IV) $\langle 2311 \rangle,$
- (V) $\langle 2341 \rangle$

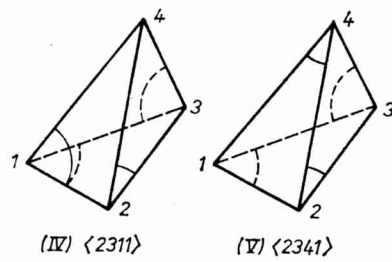
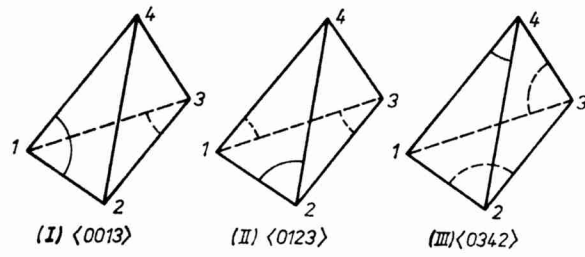


Abb. 2

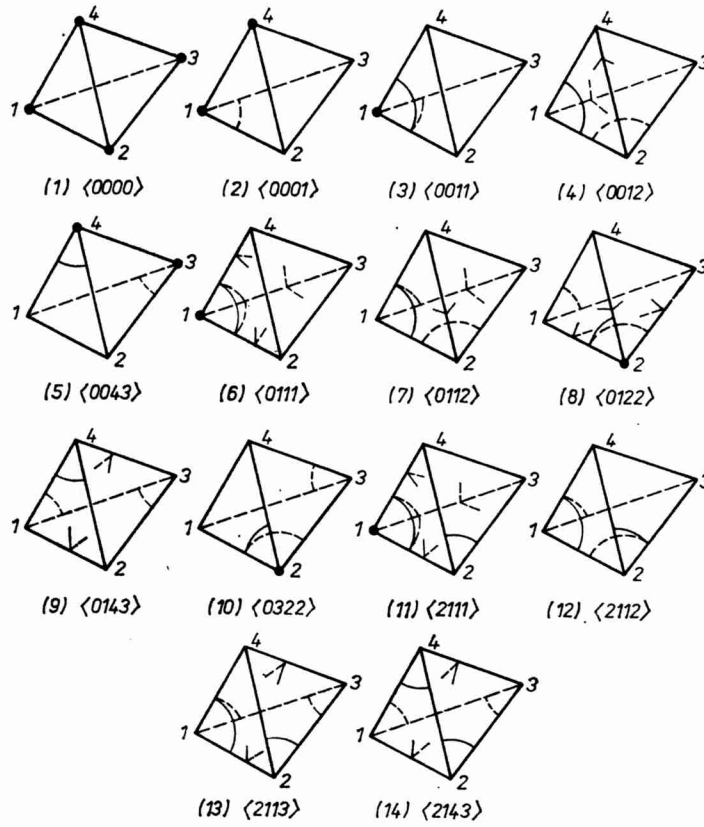


Abb. 3

lassen sich nicht in einem euklidischen, hyperbolischen sowie elliptischen Raum realisieren (vgl. Abb. 2).

Zusatz. Es reicht demzufolge aus, für die weiteren Untersuchungen der elementargeometrischen Zerlegungseigenschaften der Tetraeder lediglich die 14 Typen

(1) $\langle 0000 \rangle$,	(8) $\langle 0122 \rangle$,
(2) $\langle 0001 \rangle$,	(9) $\langle 0143 \rangle$,
(3) $\langle 0011 \rangle$,	(10) $\langle 0322 \rangle$,
(4) $\langle 0012 \rangle$,	(11) $\langle 2111 \rangle$,
(5) $\langle 0043 \rangle$,	(12) $\langle 2112 \rangle$,
(6) $\langle 0111 \rangle$,	(13) $\langle 2113 \rangle$,
(7) $\langle 0112 \rangle$,	(14) $\langle 2143 \rangle$,

zu betrachten (vgl. Abb. 3).

Beweis. Um nachzuweisen, daß die angegebenen fünf Typen sich nicht in den drei Geometrien verwirklichen lassen, werden Auffangkugeln mit der normierten Krümmung $\kappa = 1$ um Tetraederecken betrachtet. Eine solche Kugel um eine Tetraederecke i schneidet aus den drei Wänden (bzw. deren Verlängerung), die diese Ecke i gemeinsam haben, ein zulässiges (elliptisches) Dreieck (Auffangdreieck) aus (vgl. [1]). Dessen drei Seiten haben die jeweilige Größe eines der drei Dreieckswinkel, die in dem Tetraeder die Ecke i als Scheitel besitzen. Seine drei Winkel haben die jeweilige Größe eines der drei Keilwinkel (zweiter Ordnung), die die drei betreffenden Wände miteinander einschließen.

Für die weiteren Untersuchungen ist der folgende Hilfssatz von Vorteil (vgl. [2], Hilfssatz 13; dort findet sich auch der Beweis).

Hilfssatz. Bei einem zulässigen elliptischen Dreieck können hinsichtlich der Größen der Seiten genau die folgenden sieben Fälle auftreten:

1. keine stumpfe Seite und kein stumpfer Winkel,
2. keine stumpfe Seite und ein stumpfer Winkel,
3. eine stumpfe Seite und ein stumpfer Winkel
(der stumpfe Winkel liegt der stumpfen Seite gegenüber),
4. zwei stumpfe Seiten und ein stumpfer Winkel
(eine stumpfe und eine nichtstumpfe Seite erzeugen die Schenkel des stumpfen Winkels),
5. zwei stumpfe Seiten und zwei stumpfe Winkel
(die beiden stumpfen Seiten erzeugen die Schenkel des dritten nichtstumpfen Winkels),
6. zwei stumpfe Seiten und drei stumpfe Winkel,
7. drei stumpfe Seiten und drei stumpfe Winkel.

Unter Verwendung dieses Hilfssatzes ergibt sich nun für die einzelnen Typen (I) bis (V) keine Möglichkeit der Realisierung. Man erhält stets einen Widerspruch: Bei der Untersuchung, ob gewisse Keilwinkel α_{ik} (zwischen den Wänden i' und k') stumpf oder nichtstumpf sind, werden Auffangdreiecke hinsichtlich des Hilfssatzes betrachtet. Für die Untersuchung der einzelnen Typen werden die jeweiligen Repräsentanten herangezogen.

Typ (I): Für das Auffangdreieck bezüglich der Ecke 1 muß nach dem Hilfssatz der Keilwinkel α_{24} stumpf sein. Für das Auffangdreieck bezüglich der Ecke 3 kann aber auf Grund des Hilfssatzes der Keilwinkel α_{24} nicht stumpf sein.

Für die anderen Typen (II), (III), (IV) und (V) ergibt sich immer ein Widerspruch für die Größe des Keilwinkels α_{14} , wenn die Auffangdreiecke bezüglich der Ecken 2 bzw. 3 betrachtet werden.

Somit bleiben die 14 angegebenen Typen übrig, bei denen mit Hilfe der Untersuchung ihrer Auffangdreiecke unter Berücksichtigung des Hilfssatzes auch Aussagen über mögliche stumpfe oder nichtstumpfe Keilwinkel gemacht werden können. Für acht Typen ergibt sich, daß notwendigerweise zwei bzw. drei Keilwinkel stumpf, die übrigen nichtstumpf sein müssen. Für die restlichen sechs Typen ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für das Vorkommen von stumpfen Keilwinkeln. Im einzelnen gilt:

Satz 4. Bei den Typen (4) und (7) sind genau die zwei Keilwinkel α_{13} und α_{24} stumpf, bei den Typen (9), (13) und (14) sind genau die zwei Keilwinkel α_{12} und α_{34} stumpf, bei den Typen (6) und (11) sind genau die drei Keilwinkel α_{23} , α_{34} und α_{24} stumpf, und bei dem Typ (8) sind genau die drei Keilwinkel α_{13} , α_{34} und α_{14} stumpf (vgl. Markierung dieser Keilwinkel in Abb. 3).

Satz 5. Bei den restlichen sechs Typen (1), (2), (3), (5), (10) und (12) kommen bis auf Permutationen der Bezeichnung der Eckpunkte bei den jeweiligen Klassen als Repräsentanten der einzelnen Typen genau die folgenden Möglichkeiten von stumpfen Keilwinkeln vor (vgl. Abb. 4):

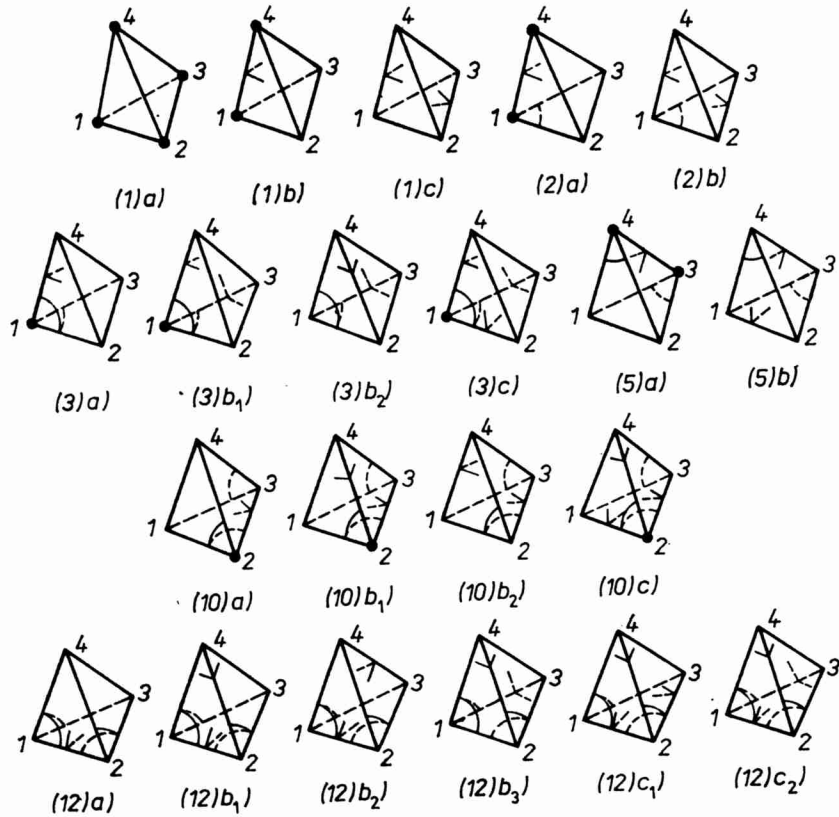


Abb. 4

- Typ (1):* a) keine stumpfen Keilwinkel,
 b) ein stumpfer Keilwinkel (z. B. α_{23}),
 c) zwei stumpfe Keilwinkel mit gegenüberliegenden Kanten als jeweilige Scheitel (z. B. α_{23}, α_{14});
- Typ (2):* a) ein stumpfer Keilwinkel (α_{23}),
 b) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{23}, α_{14});
- Typ (3):* a) ein stumpfer Keilwinkel (z. B. α_{23}),
 b₁) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{23}, α_{24}),
 b₂) zwei stumpfe Keilwinkel (z. B. α_{13}, α_{24}),
 c) drei stumpfe Keilwinkel ($\alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{24}$);
- Typ (5):* a) ein stumpfer Keilwinkel (α_{12}),
 b) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{12}, α_{34});
- Typ (10):* a) ein stumpfer Keilwinkel (α_{14}),
 b₁) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{14}, α_{13}),
 b₂) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{14}, α_{23}),
 c) drei stumpfe Keilwinkel ($\alpha_{13}, \alpha_{34}, \alpha_{14}$);
- Typ (12):* a) ein stumpfer Keilwinkel (α_{34}),
 b₁) zwei stumpfe Keilwinkel (z. B. α_{13}, α_{34}),
 b₂) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{34}, α_{12}),
 b₃) zwei stumpfe Keilwinkel (α_{13}, α_{24}),
 c₁) drei stumpfe Keilwinkel (z. B. $\alpha_{13}, \alpha_{34}, \alpha_{14}$),
 c₂) drei stumpfe Keilwinkel ($\alpha_{13}, \alpha_{34}, \alpha_{24}$).

Es sei angemerkt, daß es lediglich für (1)b), (1)c), (3)a), (3)b₂), (12)b₁) und (12)c₁) Permutationen der Bezeichnung der Eckpunkte gibt, die die in Abb. 4 jeweils angegebene Tetraederklasse als Typenrepräsentant festlassen, aber die Lage der stumpfen Keilwinkel hinsichtlich der Wände der Tetraeder verändern. Durch Anwendung von solchen Permutationen aus \mathfrak{S}_4 (unten in eckigen Klammern angegeben) lassen sich umgekehrt diese weiteren Lagemöglichkeiten der stumpfen Keilwinkel immer auf die angegebene Lage in Abb. 4 zurückführen. Diese und nur diese weiteren Möglichkeiten des Vorkommens von stumpfen Keilwinkeln in den betreffenden Tetraederklassen sind die folgenden mit den stumpfen Keilwinkeln

- (1)b) α_{12} [Permutation (13)],
 α_{13} [Permutation (12)],
 α_{14} [Permutation (12) (34)],
 α_{24} [Permutation (34)],
 α_{34} [Permutation (24)],
- (1)c) α_{12}, α_{34} [Permutation (13)],
 α_{13}, α_{24} [Permutation (34)],
- (3)a) α_{24} [Permutation (34)],
- (3)b₂) α_{23}, α_{14} [Permutation (34)],
- (12)b₁) α_{24}, α_{34} [Permutation (12) (34)],
- (12)c₁) $\alpha_{34}, \alpha_{24}, \alpha_{23}$ [Permutation (12)].

3. Tetraederbaukasten

Existiert in einem vorgelegten Tetraeder $T = 1, 2, 3, 4$ aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ ein Tetraederpunkt P , für den die Lotfußpunkte seiner Lote auf alle Wände sowie die Lotfußpunkte seiner Lote auf alle Kanten des Tetraeders nicht außerhalb des Tetraeders

liegen, dann läßt sich das Tetraeder in höchstens $4! = 24$ Orthoscheme zerlegen. Dabei ist ein Orthoschem $S^{(4)} = (1, 2, 3, 4)$ ein Tetraeder, bei dem (bis auf Permutationen der Bezeichnung der Eckpunkte) die Dreieckswinkel $\langle 1', 3 \rangle$, $\langle 2', 3 \rangle$, $\langle 3', 2 \rangle$ und $\langle 4', 2 \rangle$ rechte Winkel sind (vgl. Abb. 5). Die Zerlegung in Orthoscheme erfolgt durch Konstruktion der Lote von P auf alle Wände des Tetraeders. Von den so sich ergebenden Lotfußpunkten in den Wänden werden die Lote auf die Kanten der jeweiligen Wände konstruiert. Die Verbindung von P mit allen Tetraederecken sowie die Verbindung der Lotfußpunkte in den Wänden mit den Eckpunkten der jeweiligen Wände ergeben zusammen mit den konstruierten Loten und gewissen Teilen der Kanten des Tetraeders die Kanten der einzelnen Orthoscheme.

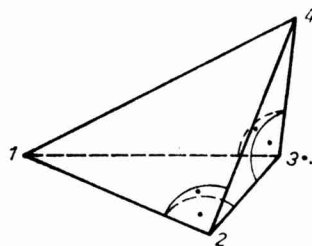


Abb. 5

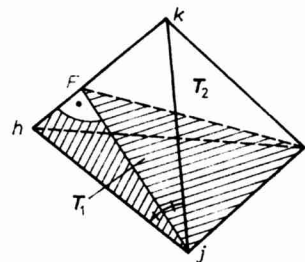


Abb. 6

Es gibt Tetraeder, für die kein solcher Tetraederpunkt P existiert, von dem aus nach der soeben beschriebenen Methode eine vollständige Zerlegung des Tetraeders in Orthoscheme vorgenommen werden kann (vgl. [3], S. 34). Mit Hilfe der hier beschriebenen Typisierung der Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ läßt sich nunmehr übersehen, daß jedes Tetraeder stets in weniger als drei Teiltetraeder mit einer gewissen Eigenschaft (L_1) vollständig zerlegt werden kann.

Definition 3. Ein Tetraeder des euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Raumes besitzt die Eigenschaft (L_1) genau dann, wenn es einen Eckpunkt i des Tetraeders gibt, so daß die Fußpunkte der Lote von diesem Punkt i auf die drei Kanten der gegenüberliegenden Wand nicht außerhalb des Tetraeders liegen.

Eigenschaft (L_1) ist eine „Eckeneigenschaft“ des Tetraeders bezüglich eines Eckpunktes (i) und eine „Loteigenschaft“ bezüglich der *eindimensionalen* Kanten einer Wand (i') des Tetraeders.

Definition 4. $\mathfrak{Q}_1^{\text{eukl}}$, $\mathfrak{Q}_1^{\text{hyp}}$, $\mathfrak{Q}_1^{\text{ell}}$ sind die Mengen aller euklidischen, hyperbolischen bzw. elliptischen (eingeschränkt auf solche mit nichtstumpfen Kanten) Tetraeder mit der Eigenschaft (L_1) . \mathfrak{Q}_1 ist die Vereinigung dieser drei Tetraedermengen.

Definition 5. Eine Menge \mathfrak{C} wird ein *Tetraederbaukasten* (für Tetraeder in einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung κ ($= 0, \pm 1$)) genannt, wenn jedes beliebige Tetraeder T , das in einem solchen Riemannschen Raum liegt, durch elementar-geometrische Addition aus endlich vielen Elementen von \mathfrak{C} zusammengesetzt werden kann.

Für einen Tetraederbaukasten \mathfrak{C} gilt folglich, daß es für jedes T Elemente $E_i \in \mathfrak{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gibt, so daß $T = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ gilt. Nunmehr ergibt sich

Satz 6. Für einen dreidimensionalen Riemannschen Raum konstanter Krümmung κ ($= \pm 1$ oder 0) ist \mathfrak{L}_1 ein Tetraederbaukasten.

Beweis. Es reicht aus, den Beweis für die Tetraedermenge $\mathfrak{B}^{(4)}$ zu führen, so daß die Untersuchung anhand der 14 Tetraedertypen vorgenommen werden kann. Da im elliptischen Fall die Tetraeder derart in Teiltetraeder zerlegt werden können, daß in diesen Teiltetraedern keine stumpfen Kanten vorkommen (vgl. [2]), gehören diese Teiltetraeder zu $\mathfrak{B}^{(4)}$ und ordnen sich demzufolge der angegebenen Typisierung unter.

Für die folgenden acht Typen lassen sich sofort geeignete Eckpunkte angeben, die die Eigenschaft (L_1) garantieren (vgl. auch Abb. 3; die betreffenden Eckpunkte sind fett markiert):

- Typ (1): 1, 2, 3 oder 4,
- Typ (2): 1 oder 4,
- Typ (3): 1,
- Typ (5): 3 oder 4,
- Typ (6): 1,
- Typ (8): 2,
- Typ (10): 2,
- Typ (11): 1.

Es wird jetzt im einzelnen ausgeführt, daß sich die restlichen sechs Typen durch geeignete Schnitte (zunächst höchstens zwei) in Tetraeder der oben genannten acht Typen zerlegen lassen. Das heißt aber, daß \mathfrak{L}_1 für alle 14 Typen und damit für alle Tetraeder ein Tetraederbaukasten ist. Die Zerlegung eines Tetraeders T in jeweils

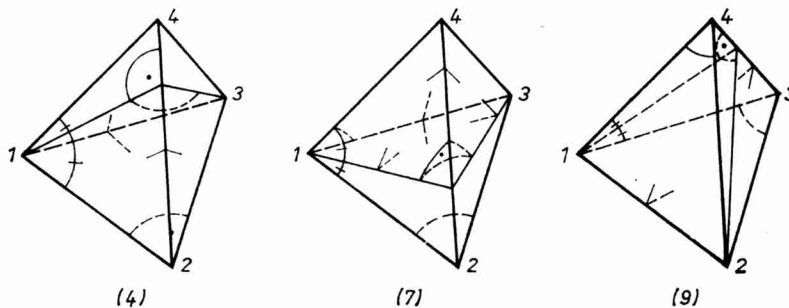


Abb. 7

zwei Teiltetraeder erfolgt in der Weise, daß eine geeignete Wand i' ausgewählt wird, in der ein stumpfer Winkel, etwa bei der Ecke j ($j \neq i$), liegt. Diese zweidimensionale Wand wird auf folgende Weise in zwei Orthoscheme zerlegt: Von dem Eckpunkt j wird auf die Kante h, k ($h \neq i, j$ und $k \neq i, j$) das Lot gefällt; es hat den Lotfußpunkt F , der nicht außerhalb des Tetraeders liegt. Dann zerlegt die Ebene durch die Punkte j, F, i das vorgelegte Tetraeder in die beiden Teiltetraeder $T_1 = i, F, j, h$ und $T_2 = i, F, j, k$ (vgl. Abb. 6). In beiden Teiltetraedern gibt es jeweils mindestens eine Wand, die einen rechten Dreieckswinkel besitzt. Demzufolge bewirkt diese Zerlegung für Ausgangstetraeder mit vier stumpfen Winkeln stets eine Zerlegung in zwei Teiltetraeder mit jeweils höchstens drei stumpfen Dreieckswinkeln. Darum ist nur noch die Zerlegung der Typen (4), (7) und (9) anzugeben (vgl. Abb. 7):

- Typ (4): Lot von 1 auf 2, 4. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (5) und (3) bzw. (5) und (2) bzw. (10) und (2).
 Typ (7): Lot von 1 auf 2, 4. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (5) und (10).
 Typ (9): Lot von 1 auf 3, 4. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (5) und (10) bzw. (5) und (5).

Eine genauere Untersuchung der Zerlegung der Typen (12), (13) und (14) in zwei Teiltetraeder ergibt zunächst, daß es bis auf den Typ (14) immer jeweils zwei Teiltetraeder mit der Eigenschaft (L_1) gibt, in die die betreffenden Tetraeder vollständig zerlegt werden können. Bei der Zerlegung des Typs (14) können auch Teiltetraeder vom Typ (9) auftreten. Erst deren nochmalige Zerlegung in zwei Teiltetraeder liefert dann ebenfalls wiederum Teiltetraeder mit der Eigenschaft (L_1) , wie bereits ausgeführt wurde. Im einzelnen gilt (vgl. Abb. 8):

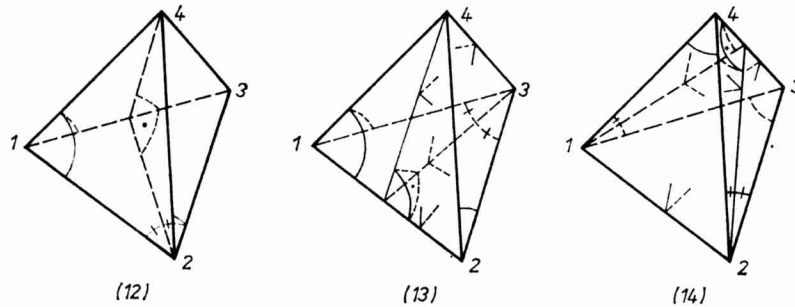


Abb. 8

- Typ (12): Lot von 2 auf 1, 3. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (3) und (5) bzw. (10) und (10).
 Typ (13): Lot von 3 auf 1, 2. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (10) und (10).
 Typ (14): Lot von 2 auf 3, 4. Es ergeben sich zwei Teiltetraeder vom Typ (5) und (5) bzw. (5) und (10) bzw. (9) und (10).

Demzufolge lassen sich bis auf den Typ (14) alle anderen Typen, die nicht bereits die Eigenschaft (L_1) besitzen, durch einen einzigen Schnitt in genau zwei Teiltetraeder mit der Eigenschaft (L_1) zerlegen.

Indem man jedoch den Schnitt anders führt, gelingt auch für den Typ (14) die Zerlegung in zwei Tetraeder mit der Eigenschaft (L_1) durch einen einzigen Schnitt, so daß der Satz 6 verschärft werden kann zu

Satz 7. Zu jedem Tetraeder T aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ in einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung, das nicht bereits zu \mathfrak{L}_1 gehört, gibt es stets zwei Tetraeder aus \mathfrak{L}_1 , in die T elementar-geometrisch vollständig zerlegt werden kann.

Beweis. Es sind auf Grund der obigen Bemerkung nur noch Aussagen über den Typ (14) zu machen. In einem Tetraeder vom Typ (14) wird der stumpfe Keilwinkel mit der Kante 1, 2 als Scheitel in einen rechten und einen spitzen Keilwinkel durch den

Schnitt $1, 2, F$ mit F auf der Kante $3, 4$ und $1, 2, F \perp 1, 2, 3$ zerlegt (vgl. Abb. 9). Dabei entstehen zwei Teiltetraeder $1, 2, 3, F$ und $1, 2, 4, F$ vom Typ (5) und (11) bzw. (2) und (8) bzw. (10) und (10). Alle diese Teiltetraeder gehören zu \mathfrak{L}_1 ; Satz 7 ist damit bewiesen.

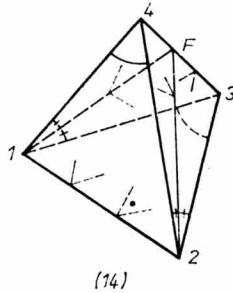


Abb. 9

Man kann sich überlegen, daß sich der Typ (14) nur für elliptische Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ realisieren läßt. Denn für die Summe s der Größen der acht nichtstumpfen Dreieckswinkel eines jeden Tetraeders aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ gilt stets $s > 2\pi$. Das folgt aus der Tatsache, daß für jedes Auffangdreieck eines jeden Tetraeders vom Typ (14) die Summe der Größen der beiden jeweiligen nichtstumpfen Seiten eines Auffangdreiecks größer als $\pi/2$ ist. Andererseits kann nur für geeignete elliptische Tetraeder aus $\mathfrak{B}^{(4)}$ vom Typ (14) die Relation $s > 2\pi$ wegen des Satzes von der Summe der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks, angewandt auf die vier dreieckigen Wände des Tetraeders, erfüllt werden. Für den euklidischen und hyperbolischen Fall gilt wegen desselben entsprechenden Satzes für die Summe der Größen aller zwölf Dreieckswinkel eines Tetraeders vom Typ (14) die Beziehung

$$s + \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_i \right) \leq 4\pi$$

und wegen $\varepsilon_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) schließlich $s < 2\pi$.

Es sei noch angemerkt, daß sich von den acht Tetraedertypen mit der Eigenschaft (L_1) (vgl. Beweis zu Satz 6) bis auf die fünf Fälle (1)c), (2)b), (3)b₂), (5)b) und (10)b₂) alle Tetraeder von einem ihrer Eckpunkte aus gemäß der oben erklärten Lotkonstruktion elementar-geometrisch vollständig in Orthoscheme zerlegen lassen. In Abb. 4 (für die Typen (6), (8) und (11) in Abb. 3) sind für diese Fälle diese möglichen Eckpunkte für die Orthoschemzerlegung fett gezeichnet. Diese Orthoschemzerlegung gelingt deshalb, weil die Fußpunkte der Lote von den betreffenden fett markierten Eckpunkten aus auf die jeweils gegenüberliegende zweidimensionale Wand niemals außerhalb dieser Wand liegen (Eigenschaft (L_2)), wie aus der Lage der stumpfen Dreiecks- und Keilwinkel abgeleitet werden kann.

LITERATUR

- [1] БÖHM, J.: Zu Coxeters Integrationsmethode in gekrümmten Räumen. *Math. Nachr.* 27 (1964), 179–214.
- [2] БÖHM, J.: Über die Struktur von Simplexen in r -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung unter besonderer Berücksichtigung des elliptischen Falles. *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 6 (1977), 105–129.

- [3] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- [4] LENHARD, H.-CHR.: Zerlegung von Tetraedern in Orthogonaltetraeder. *Elem. Math.* 61 (1960), 106—107.

Manuskripteingang: 25. 5. 1976

VERFASSER:

JOHANNES BÖHM, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena