Beiträge zur Algebra und Geometrie
7 (1978), 21–23

Zum geometrischen Sinn einer negativen Selbstschnittzahl

Günther Schiemann

0. Es sei F eine singularitätenfreie Fläche von (zunächst) dritter Ordnung im komplexen projektiven Raum. Die zweidimensionale Homologiegruppe von F hat ein Erzeugendensystem, das sich durch sieben (komplexe projektive) Geraden repräsentieren läßt, [1]. Dies ist sehr bequem, wenn man nach der Schnittzahl zweier 2-Zyklen von F fragt; sie läßt sich leicht aus den Schnittzahlen der Basisgeraden berechnen. Daß jede Gerade von F die Selbstschnittzahl -1 besitzt, ist freilich etwas unanschaulich. Es heißt in [1], S. 5: „Die Schnittzahl $(a_i, a_i) = -1$ hat in sich selbst keinen geometrischen Sinn, denn eine Gerade kann man nicht gut mit sich selbst schneiden. Deshalb brauchen wir uns auch über ihren negativen Wert nicht zu wundern; wirkliche Schnittpunkte verschiedener Kurven haben natürlich immer eine positive Vielfachheit."

Dies bedeutet: Es gibt in der Homologieklasse einer Geraden $a \subset F$ außer a keine weitere (algebraische) Kurve k, so daß die Selbstschnittzahl (a, a) nicht als Schnittzahl (a, k) veranschaulicht werden kann. Der geometrische Sinn der negativen Zahl (a, a) wird aber auch mit einem nicht-algebraischen 2-Zyklus z aus der Homologieklasse von a deutlich gemacht werden können.

Wir wollen im folgenden zu einer Geraden a auf einer singularitätenfreien projektiven algebraischen Fläche F von (nunmehr beliebiger) Ordnung $r \geqq 3$ im komplexen projektiven Raum

— eine Schlauchumgebung $U = U(a)$ auf F konstruieren,
— in U einen 2-Zyklus z vorweisen mit $z \sim a$ und schließlich
— die Schnittzahl (z, a) ablesen.

1. Wir konstruieren die Schlauchumgebung U.

Die Fläche F dürfen wir, sofern mindestens eine Gerade darauf liegt, beliebig wählen, [3]. Wir geben uns vor:

$$F \quad \text{durch} \quad 0 = x_0^r + x_1^r + x_2^r + x_3^r$$

und

$$a \subset F \quad \text{durch} \quad 0 = \varrho x_0 - x_1 = \varrho x_2 - x_3 \quad \text{mit} \quad \varrho = e^{i\pi/r}.$$

Als allgemeiner Punkt von a diene

$$Y := (t_0, \varrho t_0, t_1, \varrho t_1), \quad t_0 \text{ und } t_1 \text{ komplexe Zahlen.}$$

Die Tangentialebene an F in Y schneidet die (zu a windschiefe) Gerade $0 = x_0 = x_2$ im Punkt

$$Y^* := (0, t_1^{r-1}, 0, -t_0^{r-1}).$$

Wir definieren zu jedem Y die affine Gerade $g(Y)$ durch Angabe eines allgemeinen Punktes $X = X(Y, s) \in g(Y)$ mit dem komplexen Parameter s:

$$X := Y + sY^*.$$

Zu verschiedenen Y gehören punktfremde $g(Y)$.
In jedem $g(Y)$ wollen wir um Y durch die Beschränkung $|s| \leqq \varepsilon$ eine Kreisscheibe $K(Y)$ auszeichnen. Soll dies in eindeutiger Weise geschehen, müssen wir erst t_0, t_1 normieren. Wir setzen die Vorschrift:

$$t_0 = 1, \quad |t_1| \leqq 1 \quad \text{oder} \quad t_1 = 1, \quad |t_0| \leqq 1. \tag{1}$$

Für innere Punkte der durch (1) unterschiedenen Halbsphären von a ist diese Normierung eindeutig. Für „Äquatorpunkte" mit $|t_0| = |t_1| = 1$, also etwa $t_0 = 1$ und $t_1 = e^{i\tau}$ mit reellem τ, geschieht der Übergang von einer Normierung zur anderen durch eine Koordinatentransformation der Gestalt

$$Y \to e^{-i\tau} \cdot Y. \tag{2}$$

Für den Punkt $X(Y, s)$ bewirkt (2) eine Transformation des Parameters s:

$$s \to s \cdot e^{i(r-2)\tau}. \tag{3}$$

Sofern also (2) erlaubt ist, bleibt $|s|$ fest für jedes $X(Y, s)$. Nunmehr wählen wir ein beliebiges, aber festes $\varepsilon > 0$ und definieren damit für jedes Y die Kreisscheibe

$$K(Y) := \{X(Y, s) \mid |s| \leqq \varepsilon\}.$$

Die Vereinigung aller $K(Y)$ bildet in der Regelfläche R aller $g(Y)$ eine Schlauchumgebung $U_R(a)$ von a.[1])
Wir bilden nun $U_R(a)$ topologisch in F ab. Etwa so, daß wir erst ε hinreichend klein machen und danach jedes $K(Y)$ in eine Umgebung von Y in F projizieren. Als Projektionszentrum kann jeweils der (durch Y eindeutig bestimmte und von Y verschiedene) Punkt

$$Y' := (\bar{t}_0^{r-1}, -\varrho\bar{t}_0^{r-1}, \bar{t}_1^{r-1}, -\varrho\bar{t}_1^{r-1})$$

dienen. Die Gerade YY' schneidet F in Y einfach, [3].
Das Bild von $U_R(a)$ ist eine Schlauchumgebung $U_F(a)$ von a in F. Wegen der Homöomorphie beider U entspricht dem 2-Zyklus z, den wir in U_F suchen, eineindeutig ein 2-Zyklus in U_R. Es ist bequemer, diesen letzteren zu konstruieren. Wir bezeichnen ihn auch mit z.

2. Wir konstruieren $z \subset U_R$. Dazu benötigen wir die drei Punktmengen

$$K_0 := \{X(Y, s) \mid t_0 = 1, |t_1| \leqq 1, s = \varepsilon\},$$

$$K_1 := \{X(Y, s) \mid 0 < |t_0| \leqq 1, t_1 = 1, s = \varepsilon(t_0/|t_0|)^{2-r}\}$$

[1]) Der Rand von U ist ein Kreisbündel über a. Wir können darin zwei Volltori unterscheiden, je einen für jede der beiden durch (1) gekennzeichneten Halbsphären von a. Die Verheftung beider Tori wird durch (2) und (3) vorgeschrieben. Man findet: Für $r = 3$ ist der Rand von U eine 3-Sphäre, für $r \geqq 4$ ein Linsenraum $L(r - 2, 1)$ [4].

und

$$K(Y'') \quad \text{mit} \quad Y'' := (0, 0, 1, \varrho).$$

$K_0 \cup K_1$ ist topologisches Bild der im Punkt $(t_0, t_1) = (0, 1)$ gelochten Geraden a. Die Menge der Randpunkte von $\overline{K_0 \cup K_1} = K_0 \cup \bar{K}_1$ ($\bar{K}$ bezeichne die abgeschlossene Hülle von K) überlagert die Kreislinie $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $|s| = \varepsilon$ $(r - 2)$-fach.[1])
Wir denken uns nun K_0, $\bar{K}_1$ und $K(Y'')$ zu endlichen 2-Komplexen trianguliert.
Eine beliebig vorgegebene Orientierung von a induziere die Orientierung von $K_0 + \bar{K}_1$.
$K(Y'')$ orientieren wir so, daß $(2 - r)\, K(Y'')$ kohärent zu $K_0 + \bar{K}_1$ orientiert ist.
Damit ist

$$K_0 + \bar{K}_1 + (2 - r)\, K(Y'') =: z$$

ein 2-Zyklus in U.[2])
Eine Retraktion von U auf a durch $\varepsilon \to 0$ induziert eine Homotopie von z auf a.
Also gilt

$$z \sim a.$$

3. Wir berechnen die Schnittzahl (z, a).
Die Orientierung der Geraden $g(Y'')$ werde induziert durch die Orientierung von $K(Y'') \subset g(Y'')$, und F orientieren wir so, daß $\big(a, g(Y'')\big) = 1$ gilt.
Dann erhalten wir aus der „Hauptregel" (4.1a) in [2]

$$\begin{aligned}(z, a) &= (K_0, a) + (\bar{K}_1, a) + \big((2 - r)\, K(Y''), a\big)\\ &= 0 \qquad\quad + 0 \qquad\quad + (2 - r)\big(K(Y''), a\big)\\ &= (2 - r)\big(g(Y''), a\big)\\ &= 2 - r.\end{aligned}$$

Das hatten wir zeigen wollen.

LITERATUR

[1] KELLER, O.-H.: Die Homologiegruppen der Flächen 3. Ordnung. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl., 107, 1 (1965).
[2] KELLER, O.-H.: Über eine Definition von S. LEFSCHETZ in der topologischen Schnitttheorie. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl., 108, 1 (1969).
[3] SCHIEMANN, G.: Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *4* (1975), 65—70.
[4] SEIFERT, H., und W. THRELFALL: Topologie. Leipzig—Berlin 1934.

Manuskripteingang: 13. 5. 1976

VERFASSER:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg

---

1) Für $r = 3$ ist $K_0 \cup \bar{K}_1$ also topologisches Bild einer Kreisscheibe. für $r \geqq 4$ topologisches Bild der Äquatorebene eines Linsenraumes $L(r - 2, 1)$.

2) Nur für $r = 3$ ist z eine 2-Sphäre. Es erscheint geometrisch plausibel, daß die Eigenschaft von F, Geraden zu enthalten, für $r \geqq 4$ nicht mehr invariant gegenüber ordnungserhaltenden Homöomorphismen ist.