eines jeden Punktes $t_0 \in M$ Punkte t existieren, in denen die Neron-Severi-Gruppe der Faser X_t Null ist. Insbesondere kann X_t dann nicht algebraisch sein. Es kann folglich keine Kuranishifamilien algebraischer Flächen geben. Genauer gilt

2.7. Satz. *Die Menge* $\{t \in M \mid X_t$ *algebraisch*$\}$ *ist dicht in* M *und Vereinigung von abzählbar vielen* 19-*dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.*

3. Der globale Satz von Torelli für $K3$-Flächen

3.1. In diesem Abschnitt untersuchen wir analog zum Kapitel IV über globale Moduln von Kurven die Modulräume von K 3-Flächen. Wir verwenden dabei die Terminologie der algebraischen Felder.
Es sei $\mathscr{F}$ das Feld der K 3-Flächen. Da die Automorphismengruppe einer K 3-Fläche im allgemeinen unendlich ist, ist die Diagonale $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ nicht quasikompakt, und wir können deshalb das Kriterium von Artin nicht anwenden. Wir erzwingen die Quasikompaktheit durch folgende Definition.

3.2. Definition. Es sei $f\colon X \to S$ eine Familie von K 3-Flächen. Unter einer *n-Polarisierung* von f verstehen wir ein relativ sehr amples Linienbündel $\mathscr{L}$ auf X derart, daß $f_*\mathscr{L}$ lokal frei vom Rang $n + 1$ ist. Das Feld der n-polarisierten K 3-Flächen bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_n$.

Wir betrachten zunächst den Funktor der „n-linearisierten" K 3-Flächen

$$M_n(S) = \begin{cases} n\text{-polarisierte } K\,3\text{-Flächen } X \xrightarrow{f} S, \mathscr{L} \\ \text{zusammen mit einen Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(f_*\mathscr{L}) \cong \mathbf{P}^n_S, \text{ modulo Isomorphismen.} \end{cases}$$

Man zeigt leicht, daß M_n ein offener Unterfunktor von $\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}}$ ist, wobei $P(t) = t^2(n-1) + 2$ ist.
Es sei $X \to M_n$ die universelle n-linearisierte K 3-Fläche über M_n und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M_n$. Wir betrachten die Kodaira-Spencer-Abbildung $T_{M,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$, wobei Θ_{X_0} die Garbe der Keime holomorpher Vektorfelder auf X_0 bezeichnet. Da M_n eine offene Teilmenge des Hilbertschemas ist, ist der Tangentialraum T_{M,t_0} isomorph zu $H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0})$, wobei $N_{\mathbf{P}^n/X_0}$ das Normalenbündel von X_0 in $\mathbf{P}^n$ bezeichnet. In unserem Falle erhält man die Kodaira-Spencer-Abbildung aus der Sequenz

$$0 \to \Theta_{X_0} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0} \to N_{\mathbf{P}^n/X_0} \to 0. \tag{$*$}$$

Das Kompositum der beiden Abbildungen

$$H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0})$$

und

$$H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \cong T_{M_n,t_0}$$

bezeichnen wir mit Ψ.

3.3. Satz. *Das Schema* M_n *ist glatt. Die Sequenz*

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M_n,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$

ist exakt. Der Kokern von ϱ *ist eindimensional.*

Beweis. Aus der Theorie der Hilbertschema ist bekannt, daß die erste Behauptung äquivalent mit $H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) = 0$ ist. Nach 1.3. und dem Serreschen Dualitätssatz wissen wir, daß $H^0(X_0, \Theta_{X_0}) = H^2(X_0, \Theta_{X_0}) = 0$ ist. Daher erhält man aus der exakten Folge (*) die exakte Folge

$$0 \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Bekanntlich hat man eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1} \to \Theta_{\mathbf{P}^n} \to 0.$$

Durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{X_0}$ erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0\big(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1}\big) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \arrow[r] & H^0\big(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(1)^{n+1}\big) \arrow[r] & H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und einen Isomorphismus

$$H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \cong H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}).$$

Da die ersten beiden Pfeile des Diagramms nach Definition des Funktors M_n Isomorphismen sind, ist φ ein Isomorphismus. Setzt man die erhaltenen Ergebnisse in die anfangs angegebene Folge ein, so ergibt sich

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \xrightarrow{\chi} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Da $\dim H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 1$ ist, folgt der Satz, wenn wir zeigen, daß χ nicht surjektiv ist. Das ist klar, da es nach den Überlegungen vor 2.7. keine vollständig parametrisierten Familien algebraischer K 3-Flächen gibt.

Es sei $M_n \to \mathcal{M}_n$ der kanonische Morphismus und $S \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer K 3-Fläche $X \xrightarrow{f} S$ mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$ entspricht. Offenbar ist $M_n \times_{\mathcal{M}_n} S$ die Garbe der Isomorphismen von $\mathbf{P}(f_*\mathcal{L})$ und $\mathbf{P}_S^n$, d. h., der Morphismus $M_n \to \mathcal{M}_n$ ist darstellbar und glatt. Daraus folgt nach dem Kriterium von ARTIN leicht, daß $\mathcal{M}_n$ ein algebraisches Feld ist. Wir definieren jetzt einen rigiden Funktor auf $\mathcal{M}_n$. Es sei L ein unimodulares gerades Gitter vom Rang 22 und mit dem Index 16. Wir fixieren einen Vektor $l \in L$ mit $l^2 = 2n - 2$. Es sei G die Gruppe aller Automorphismen von L, die den Vektor l invariant lassen. Wir betrachten eine Familie $f\colon X \to S$ von K 3-Flächen mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$. Dieses $\mathcal{L}$ definiert in der Homologie $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ jeder Faser von f eine Klasse ξ_s.
Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH und dem Satz von BERTINI folgt $\xi_s^2 = 2n - 2$. Es sei $P(X/S)$ das Prinzipalfaserbündel, dessen Faser im Punkt s die Isomorphismen von $H^2(X_s, \mathbf{Z})$ nach L sind, die den Vektor ξ_s auf den Vektor l abbilden. Als Basis des Bündels $P(X/S)$ muß man die offene Menge U aller s nehmen, für die solche Isomorphismen existieren. Wenn U mit S übereinstimmt, nennen wir die Familie $X \to S$ zusammen mit einem Schnitt von $P(X/S)$ über S eine *Familie rigider* K *3-Flächen*. Für $S = \operatorname{Spec}(\mathbf{C})$ ist eine rigide K 3-Fläche ein Tripel (X, φ, ξ), wobei X

eine K 3-Fläche ist, $\xi \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die Klasse eines sehr amplen Divisors auf X und $\varphi: H_2(X, \mathbf{Z}) \to L$ ein Isomorphismus, der ξ in l überführt.

Nach folgendem Lemma, dessen Beweis man in SCHAFAREWITSCH u. a. [1] findet, ist $P(X/S)$ ein rigider Funktor.

3.4. Lemma. *Ein Automorphismus von X, der auf der Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z})$ die Identität induziert, ist die Identität.*

Wir bezeichnen mit R_n den Funktor rigider K 3-Flächen; $R_n(S)$ ist also die Menge aller Isomorphieklassen von Paaren $(X \to S, \varphi)$, X/S eine Familie von K 3-Flächen, φ ein Isomorphismus des lokalen Systems $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ auf das konstante lokale System L über S, so daß $\varphi_s^{-1}(l)$ für jedes $s \in S$ die Klasse eines sehr amplen Divisors ist. Man hat einen kanonischen darstellbaren unverzweigten Morphismus $R_n \to \mathcal{M}_n$. Daraus folgt, daß R_n durch eine analytische Mannigfaltigkeit darstellbar ist.

3.5. Satz. *Die universelle Familie $X \to R_n$ rigider K 3-Flächen hat die Dimension* 19 *und ist effektiv parametrisiert.*

Beweis. Da die Abbildung $R_n \to \mathcal{M}_n$ etal ist, genügt es, die entsprechenden Behauptungen für $\mathcal{M}_n$ zu beweisen. Es sei x: Spec $(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer n-polarisierten K 3-Fläche X_0 entspricht. Der Tangentialraum T_0 von $\mathcal{M}_n$ im Punkt x ist die Menge der Isomorphieklassen n-polarisierter K 3-Flächen über Spec $(\mathbf{C}[\varepsilon])$ mit der speziellen Faser X_0 $(\varepsilon^2 = 0)$. Wir wählen eine projektive Einbettung der polarisierten Fläche X_0. Dann entspricht X_0 einem Punkt t_0 des Schemas M_n. Man hat einen kanonischen Morphismus $T_{M_n, t_0} \to T_0$. Offenbar wirkt die Liealgebra $GL(n+1)$ von $PGL(n)$ auf T_{M_n, t_0}, und T_0 ist der Quotient unter dieser Wirkung. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M, t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0}).$$

Offenbar kann man ϱ über T_0 faktorisieren. Da $GL(n+1)$ transitiv auf $H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}$ wirkt, erhält man eine Injektion $T_0 \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$. Daraus folgt die Behauptung.

3.6. Die Periodenabbildung. Im Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C})$ ist auf kanonische Weise ein Skalarprodukt definiert. Es sei $\Omega \subset \mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$ die Menge aller Geraden ω, so daß $\omega_0^2 = 0$ und $\omega_0 \bar{\omega}_0 > 0$ für alle von Null verschiedenen Elemente $\omega_0 \in \omega$ gilt; $\Omega(l) \subset \Omega$ sei die Teilmannigfaltigkeit aller Geraden, die auf l senkrecht stehen. Da L den Rang 22 hat, hat $\Omega(l)$ die Dimension 19.
Es sei (X, φ, ξ) eine rigide K 3-Fläche, φ induziert einen Isomorphismus der Räume $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C}))$ und $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$. Nach 2.1. wird die Periode von X dabei auf einen Punkt von $\Omega(l)$ abgebildet. Wir erhalten dadurch eine Abbildung Per: $R_n \to \Omega(l)$, die nach 2.2. holomorph ist. Da die universelle rigide K 3-Fläche über R_n effektiv parametrisiert und $\dim R_n = \dim \Omega(l) = 19$ ist, ist Per nach 2.6. ein lokaler Isomorphismus. Das Hauptresultat dieses Kapitels lautet

3.7. Satz (Torellisatz für K 3-Flächen; SCHAFAREWITSCH u. a. [1]). *Die Periodenabbildung* Per *ist eine offene Einbettung $R_n \to \Omega(l)$.*

Nach dem Gesagten genügt es zu zeigen, daß Per injektiv ist. Im folgenden Abschnitt werden wir in $\Omega(l)$ eine dichte Teilmenge Z konstruieren, so daß $\mathrm{Per}^{-1}(Z) \to Z$ bijektiv ist. Da R_n und $\Omega(l)$ separiert sind, folgt leicht, daß dann Per injektiv sein muß.