2. Der lokale Satz von Torelli für K 3-Flächen

2.1. Es sei X eine *Kählersche K 3-Fläche*, d. h. eine kompakte Kählersche Fläche mit $h^{01} = 0$ und $h^{02} = 1$. Auf X existiert eine nirgends verschwindene holomorphe 2-Form $\varkappa$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.
Es sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ eine Basis von $H_2(X, \mathbf{Z})$. Unter der *Periode* von X versteht man das Tupel $\left(\int_{\gamma_1} \varkappa, \ldots, \int_{\gamma_{22}} \varkappa\right)$. Dadurch wird invariant ein Punkt des projektiven Raumes

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}\big(H^2(X, \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}^{21}$$

definiert.
Ist $\omega_1, \ldots, \omega_{22}$ eine zu $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ duale Basis, die aus harmonischen Formen besteht, dann gilt

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{22} \alpha_i \omega_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \int_{\gamma_i} \varkappa .$$

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und H die Matrix $\left(\int_X \omega_i \wedge \omega_j\right)$. Da $\int_X \varkappa \wedge \varkappa = 0$ und $\int_X \varkappa \wedge \bar{\varkappa} > 0$ ist, erhalten wir die Periodenrelationen

$$\alpha H^t \alpha = 0, \quad \alpha H^t \bar{\alpha} > 0 .$$

Die Periode von X liegt also in einer offenen Menge einer 20-dimensionalen Quadrik Ω des $\mathbf{P}^{21}_{\mathbf{C}}$.
Es sei $f\colon X \to M$ eine glatte Familie von Kählerschen K 3-Flächen und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M$. Wir setzen voraus, daß die Basis M kontrahierbar ist. Dann ist $f\colon X \to M$ eine triviale differenzierbare Faserung. Für jede Faser X_t, $t \in M$, erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$H^2(X_t, \mathbf{C}) \cong H^2(X, \mathbf{C}) \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) .$$

Daher kann man die Periode einer Faser X_t als ein Element des Raumes $\mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big)$ auffassen.
Dadurch erhalten wir die Periodenabbildung

$$M \to \mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big) .$$

2.2. Satz. *Die Periodenabbildung ist holomorph.*

Beweis. Es sei $\Omega^{\bullet}_{X/M}$ der Komplex der relativen längs der Fasern holomorphen Differentiale. Nach dem Lemma von Poincaré ist $\Omega^{\bullet}_{X/M}$ eine Auflösung von $f^{\bullet}\mathcal{O}_M$ ($f^{\bullet}$ bezeichnet das inverse Bild im Sinne von Garben abelscher Gruppen). Daraus erhalten wir eine Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{X/M} \Rightarrow R^n f_* (f^{\bullet} \mathcal{O}_M) . \qquad (*)$$

Nach der Theorie von Hodge degeneriert diese Spektralsequenz in jeder Faser und damit überhaupt. Ferner gilt nach dem Satz über universelle Koeffizienten

$$R^n f_* (f^{\bullet} \mathcal{O}_M) \cong R^n f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M .$$

Aus der Sequenz $(*)$ erhält man daher eine Inklusion

$$f_* \Omega^2_{X/M} \hookrightarrow R^2 f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M ,$$

folglich einen Schnitt des Bündels $\mathbf{P}(R^2f_*\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M)$. Wenn M hinreichend klein gewählt ist, hat man einen Isomorphismus $R^2f_*\mathbf{C} \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) \times M$. Der oben definierte Schnitt gibt dann eine Abbildung $M \to \mathbf{P}(H^2(X_0, \mathbf{C}))$, die mit der Periodenabbildung übereinstimmt. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann aus der Periode einer K 3-Fläche die Neron-Serevi-Gruppe der algebraischen Zyklen erhalten. Grundlage dafür ist folgende wohlbekannte Tatsache (WEIL [1]):

2.3. Satz. *Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Das Bild der Abbildung $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ ist die Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^1(X, \Omega_X^1)$.*

Es sei $\xi \in H^2(X, \mathbf{Z})$ und $\check{\xi} \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die duale Klasse.

2.4. Korollar. *ξ ist genau dann die Chernsche Klasse eines Linienbündels, wenn die Periodenabbildung auf $\check{\xi}$ verschwindet.*

Beweis. Es sei ω_ξ die harmonische Form aus der Kohomologieklasse ξ. Dann gilt

$$\int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa.$$

Ist ω_ξ vom Typ (1,1), so verschwindet das letzte Integral offenbar. Umgekehrt sei $\int_{\check{\xi}} \varkappa = 0$.

Da ω_ξ reell ist, können wir $\omega_\xi = a\varkappa + \eta + \bar{a}\bar{\varkappa}$ schreiben. Dabei ist η eine harmonische Form vom Typ (1, 1) und $a \in \mathbf{C}$. Wir erhalten

$$0 = \int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa = \bar{a} \int \bar{\varkappa} \wedge \varkappa.$$

Daraus folgt $\bar{a} = 0$ und $\omega_\xi = \eta$.

2.5. Definition. Es sei $f\colon X \to M$ eine glatte Familie von K 3-Flächen, X_0 die Faser im Punkt $t_0 \in M$ und Θ die Garbe von Keimen holomorpher Vektorfelder auf X_0. f heißt *effektiv parametrisiert* im Punkt $t_0 \in M$, wenn die Kodaira-Spencer-Abbildung $\varrho\colon T_{t_0} \to H^1(X_0, \Theta)$ injektiv ist. Ist ϱ surjektiv, so heißt f *vollständig.*

2.6. Theorem (lokaler Satz von TORELLI für K 3-Flächen). *Es sei $f\colon X \to M$ eine glatte im Punkt $t_0 \in M$ effektiv parametrisierte Familie von K 3-Flächen. Dann ist die Periodenabbildung im Punkt t_0 eine Einbettung.*

Einen Beweis für dieses Resultat von ANDREOTTI und TJURINA findet man in SCHAFAREWITSCH u. a. [1]. Nach dem Dualitätssatz von SERRE gilt

$$\dim H^q(X_0, \Theta) = \dim H^{n-q}(X_0, \Omega^1_{X_0}).$$

Aus 1.3. ergibt sich $\dim H^2(X_0, \Theta) = 0$. Nach KURANISHI existiert daher eine in jedem Punkt effektiv und vollständig parametrisierte Familie Kählerscher K 3-Flächen (siehe Kap. II). Die Basis einer solchen Familie ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $20 = \dim H^1(X_0, \Theta)$.

Es sei $f\colon X \to M$ eine solche Kuranishifamilie. In der Umgebung eines jeden Punktes $t_0 \in M$ liefert die Periodenabbildung eine offene Einbettung $M \to \Omega$.

Nach den Betrachtungen von 2.4. entspricht jedem Punkt eine Neron-Severi-Gruppe, nämlich der Kern der Abbildung $\omega\colon H_2(X_0, \mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$. Es ist klar, daß die Menge der ω mit Kern $\omega = 0$ überall dicht in Ω ist. Daraus folgt, daß in der Umgebung