V. K 3-Flächen

1. Grundlegende Tatsachen über K 3-Flächen

Die K 3-Flächen spielen in der Flächentheorie eine Sonderrolle, die mit der der elliptischen Kurven vergleichbar ist. Ihre Untersuchung erfordert daher spezielle Methoden. Obwohl viele der Resultate für K 3-Flächen über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper beliebiger Charakteristik gelten, betrachten wir im folgenden zur Vereinfachung nur den Fall der komplexen Zahlen.

1.1. Definition. Eine algebraische Fläche X heißt K *3-Fläche*, wenn ihr kanonisches Bündel trivial und wenn $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ist.

1.2. Beispiel.
1.2.1. Jede singularitätenfreie Hyperebene vom Grad 4 im $\mathbf{P}^3$ ist eine K 3-Fläche. Da der Grad 4 ist, hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Mit Hilfe bekannter Resultate über die Kohomologie projektiver Räume folgt $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.
Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathbf{P}^3} \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X \to 0$$

folgt

$$\Omega^2_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \cong \Omega^3_{\mathbf{P}^3} \otimes \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-4),$$

also

$$\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X.$$

Analog gilt: Ist $X \subset \mathbf{P}^n$ vollständiger Durchschnitt vom Grad $(d_1, \ldots, d_{n-2})$, so ist X genau dann K 3-Fläche, wenn $\sum_{\nu=1}^{n-2} d_\nu = n + 1$ ist.

1.2.2. Es sei A eine zweidimensionale abelsche Mannigfaltigkeit und G die Gruppe, die aus den beiden Automorphismen Multiplikation mit $+1$ und -1 besteht. Ferner sei $Y = A/G$ der Quotient, und $P_1, \ldots, P_{16}$ seien die Fixpunkte bei der Wirkung von G auf A. In den Punkten P_i kann man lokale Parameter x, y wählen, so daß der Automorphismus Multiplikation mit -1 die Form $x \mapsto x$, $y \mapsto -y$ erhält. Da $u = x^2$, $v = y^2$ und $t = xy$ die invarianten Funktionen erzeugen, erhalten wir im Bildpunkt $\overline{P}_i$ von P_i auf Y

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{P}_i} \cong \mathbf{C}[\![u, v, t]\!]/(u \cdot v - t^2).$$

Der singuläre Ort von Y besteht demzufolge aus 16 isolierten quadratischen Singularitäten. Nach Aufblasung der Punkte $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{16}$ entsteht eine singularitätenfreie Fläche X. Die Urbilder der Punkte $P_1, \ldots, P_{16}$ sind rationale singularitätenfreie Kurven $e_1, \ldots, e_{16}$ mit der Selbstschnittzahl -2.

Da auf A eine nirgends verschwindende holomorphe 2-Form existiert, findet man auf X ebenfalls eine solche 2-Form. Die kanonische Klasse von X ist daher Null. Es sei $\pi: A \to Y$ die kanonische Projektion. Nach Definition gilt $(\pi_* \mathcal{O}_A)^G = \mathcal{O}_Y$. Nach GROTHENDIECK [1], Kap. 5.2.1, folgt dann $H^1(A, \mathcal{O}_A)^G = H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. Da die Wirkung von G auf $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ die Multiplikation mit -1 ist, erhalten wir $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. Wendet man jetzt die Cartan-Leray-Sequenz auf die Aufblasung $f: X \to Y$ an, so ergibt sich leicht

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

K 3-Flächen, die man auf die beschriebene Art konstruieren kann, heißen *Kummersche Flächen.*

1.2.3. Es sei $X \to \mathbf{P}^2$ eine zweiblättrige Überlagerung, X eine glatte Fläche, D der Differentendivisor, der durch $\mathcal{O}_X(D) = \varphi^* \omega_{\mathbf{P}^2}^{-1} \otimes \omega_X$ (induziert durch $\det(\varphi^*): \varphi^* \omega_{\mathbf{P}^2} \to \omega_X$) definiert ist.

Ist $D_0 = \mathrm{Norm}(D) \subset \mathbf{P}^2$, so ist $\varphi^* D_0 = 2D$, und ist H eine Gerade in $\mathbf{P}^2$, so ist

$$(\varphi^* D_0 \cdot \varphi^* H) = 2\big(D \cdot \varphi^*(H)\big) = \deg \varphi(D_0 \cdot H) = 2(D_0 \cdot H),$$

also $\deg(D_0) = (D \cdot \varphi^* H) = 2n$ (da $\varphi^* H \to H$ eine zweiblättrige Überlagerung ist). Somit ist

$$\mathcal{O}_X(D) \cong \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n), \quad n = \frac{1}{2} \deg(D_0),$$

und

$$\omega_X = \varphi^*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n) \otimes \omega_{\mathbf{P}^2}\big) = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n-3),$$

also $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ genau dann, wenn $\deg D_0 = 6$ ist. Ferner folgt aus $\deg D_0 = 6$, daß $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ist, denn dann ist $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X(D) \cong \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, und somit gilt, wenn T_0, T_1, T_2 homogene Koordinaten auf $\mathbf{P}^2$ sind: Auf der offenen Menge $X_i \subset X$ $(T_i \neq 0)$ hat D eine Gleichung f_i, so daß $f_i T_i^3 = f_j T_j^3$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} &\varphi^* \mathcal{O}_X(3)/\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3), \\ &(a + b f_i)\, T_i^3 \mapsto b T_i^3 \end{aligned}$$

auf der offenen Menge $T_i \neq 0$. Also ist

$$\chi\big(\mathcal{O}_X(D)\big) = \chi\big(\varphi_* \mathcal{O}_X(3)\big) = 2\chi\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)\big) = 20,$$

und wegen $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ ist

$$\chi\big(\mathcal{O}_X(D)\big) = \chi\big(\mathcal{O}_X(-D)\big) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_D),$$

$D \cong D_0$ ebene Kurve vom Grad 6, daher $\chi(\mathcal{O}_D) = -18$, also

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 2 - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 2.$$

Zu jeder glatten Kurve $D_0 \subset \mathbf{P}^2$ vom Grad 6 gibt es eine zweiblättrige Überlagerung $X \to \mathbf{P}^2$, die längs D_0 verzweigt ist.
Es sei $L = V(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3))$ das Linienbündel mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(L) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, D_0 definiert dann einen Schnitt $s\colon \mathbf{P}^2 \to L^{\otimes 2}$ (wegen $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(L^{\otimes 2}) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(D)$), und ist $L \to L^{\otimes 2}$ die Abbildung $x \mapsto x \otimes x$, so ist $X = \mathbf{P}^2 \times_{L^{\otimes 2}} L \subset L$ die gewünschte Fläche.
Spezialfall. Es sei C eine glatte Kurve vom Geschlecht 2 und $\tau\colon C \to C$ die kanonische Involution, $Y = (C \times C)/S_2$ sei das symmetrische Produkt. Dann operiert τ auf Y durch $\tau(P + Q) = \tau(P) + \tau(Q)$, und ist $X = Y/\{\mathrm{id}, \tau\}$, so ist X eine K3-Fläche, die sich wie folgt als zweiblättrige Überlagerung von $\mathbf{P}^2$ darstellen läßt:
Ist $\pi\colon C \to \mathbf{P}^1$ die kanonische Überlagerung, so induziert π eine vierblättrige Überlagerung

$$Y \xrightarrow{\pi} (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)/S_2 = \mathbf{P}^2$$

mit $\pi \circ \tau = \pi$, also eine zweiblättrige Überlagerung $X \xrightarrow{\varphi} \mathbf{P}^2$. Durch lokale Rechnung folgt, daß X glatt ist. Ist $Y \xrightarrow{\varphi_{P_0}} J(C)$ der kanonische birationale Morphismus von Y auf die Jacobische $J(C)$, den man durch Auszeichnung eines Punktes $P_0 \in C$ erhält, so ist

$$\begin{array}{ccc} Y & \to & J(C) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{id}} \\ Y & \to & J(C) \end{array}$$

kommutativ (da $P + \tau(P)$ linear äquivalent zu $Q + \tau(Q)$ ist); also ist X die zu $J(C)$ gehörige Kummersche Fläche.

1.3. Die Hodgezahlen einer K3-Fläche X. Wie gewöhnlich bezeichnen wir mit $h^{pq} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ die Hodgezahlen von X. Aus der Definition einer K 3-Fläche entnimmt man $h^{10} = 0$, $h^{02} = 1$.
Durch die allgemeinen Beziehungen $h^{pq} = h^{2-q,2-p}$ und $h^{pq} = h^{qp}$ bekommt man alle anderen Hodgezahlen bis auf h^{11}. Nach dem Riemann-Rochschen Satz für Flächen gilt

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\chi(X),$$

wobei

$$\chi(\mathcal{O}_X)\,\chi = \sum_p (-1)^p h^{p0}, \quad \chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{pq}$$

ist. Daraus berechnet man leicht $h^{11} = 20$. Insgesamt ergibt sich folgendes Bild der Hodgezahlen h^{pq}:

$q \backslash p$	0	1	2
0	1	0	1
1	0	20	0
2	1	0	1

1.4. Satz. *Eine K 3-Fläche X ist einfach zusammenhängend.*

Es sei $\tilde{X} \to X$ eine n-blättrige Überlagerung. Dann gilt $\chi(X) = n\chi(\tilde{X})$. Andererseits ist klar, daß $\tilde{X}$ wieder eine K 3-Fläche ist. Deshalb gilt $\chi(X) = \chi(\tilde{X})$ und damit $n = 1$.

Korollar. *Die Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbf{Z})$ einer K 3-Fläche sind torsionsfrei.*

Beweis. Nach dem Satz über universelle Koeffizienten haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{q-1}(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to H^q(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}\big(H_q(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})\big) \to 0. \qquad (*)$$

Da $H_1(X, \mathbf{Z})$ nach dem letzten Satz verschwindet, sieht man, daß $H^0(X, \mathbf{Z})$, $H^1(X, \mathbf{Z})$, $H^2(X, \mathbf{Z})$ torsionsfrei sind. Die übrigen Kohomologiegruppen sind dann nach der Poincaréschen Dualität ebenfalls torsionsfrei.

1.5. Die Struktur von $H^2(X, \mathbf{Z})$ als Gitter. Bekanntlich definiert das Cupprodukt eine perfekte Paarung

$$v\colon H^2(X, \mathbf{Z}) \times H^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}. \qquad (**)$$

Unter dem *Index* des euklidischen Gitters $H^2(X, \mathbf{Z})$ versteht man die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der negativen Eigenwerte dieser Bilinearform.
Der Index ist eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit. Er kann mit Hilfe des Indexsatzes von HODGE berechnet werden:

$$\mathrm{index}\, X = \sum_{p,q} (-1)^q\, h^{pq}(X).$$

Daraus erhalten wir, daß der Index einer K 3-Fläche 16 ist.

Ein euklidisches Gitter E heißt *gerade*, wenn $x^2 \equiv 0 \bmod 2$ für jeden Vektor gilt. Nach MILNOR [1] ist die Bilinearform (**) auf einer vierdimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit gerade, falls die zweite Stiefel-Withney-Klasse Null ist. Das ist hier erfüllt, da die erste Chernsche Klasse des Tangentialbündels Null ist.
Nach SERRE [2] ist ein gerades Gitter durch einen Index und Rang eindeutig bestimmt.

1.6. Da die kanonische Klasse trivial ist, nehmen die Formeln der Flächentheorie auf K 3-Flächen eine besonders einfache Gestalt an. Für einen Divisor D gilt

$$l(D) + l(-D) \geqq \frac{(D^2)}{2} + 2 \quad (\text{RIEMANN-ROCH}).$$

Insbesondere folgt für einen Divisor mit $D^2 \geqq -2$, daß D oder $-D$ äquivalent zu einem effektiven Divisor ist. Ist C eine irreduzible Kurve auf X, so erhält man ihr arithmetisches Geschlecht

$$p_a(C) = \frac{(C^2)}{2} + 1.$$

2. Der lokale Satz von Torelli für K 3-Flächen

2.1. Es sei X eine *Kählersche K 3-Fläche*, d. h. eine kompakte Kählersche Fläche mit $h^{01} = 0$ und $h^{02} = 1$. Auf X existiert eine nirgends verschwindene holomorphe 2-Form $\varkappa$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.
Es sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ eine Basis von $H_2(X, \mathbf{Z})$. Unter der *Periode* von X versteht man das Tupel $\left(\int_{\gamma_1} \varkappa, \ldots, \int_{\gamma_{22}} \varkappa\right)$. Dadurch wird invariant ein Punkt des projektiven Raumes

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}\big(H^2(X, \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}^{21}$$

definiert.
Ist $\omega_1, \ldots, \omega_{22}$ eine zu $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ duale Basis, die aus harmonischen Formen besteht, dann gilt

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{22} \alpha_i \omega_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \int_{\gamma_i} \varkappa .$$

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und H die Matrix $\left(\int_X \omega_i \wedge \omega_j\right)$. Da $\int_X \varkappa \wedge \varkappa = 0$ und $\int_X \varkappa \wedge \bar{\varkappa} > 0$ ist, erhalten wir die Periodenrelationen

$$\alpha H^t \alpha = 0, \quad \alpha H^t \bar{\alpha} > 0 .$$

Die Periode von X liegt also in einer offenen Menge einer 20-dimensionalen Quadrik Ω des $\mathbf{P}^{21}_{\mathbf{C}}$.
Es sei $f\colon X \to M$ eine glatte Familie von Kählerschen K 3-Flächen und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M$. Wir setzen voraus, daß die Basis M kontrahierbar ist. Dann ist $f\colon X \to M$ eine triviale differenzierbare Faserung. Für jede Faser X_t, $t \in M$, erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$H^2(X_t, \mathbf{C}) \cong H^2(X, \mathbf{C}) \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) .$$

Daher kann man die Periode einer Faser X_t als ein Element des Raumes $\mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big)$ auffassen.
Dadurch erhalten wir die Periodenabbildung

$$M \to \mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big) .$$

2.2. Satz. *Die Periodenabbildung ist holomorph.*

Beweis. Es sei $\Omega^{\bullet}_{X/M}$ der Komplex der relativen längs der Fasern holomorphen Differentiale. Nach dem Lemma von Poincaré ist $\Omega^{\bullet}_{X/M}$ eine Auflösung von $f^{\bullet}\mathcal{O}_M$ ($f^{\bullet}$ bezeichnet das inverse Bild im Sinne von Garben abelscher Gruppen). Daraus erhalten wir eine Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{X/M} \Rightarrow R^n f_*(f^{\bullet}\mathcal{O}_M) . \tag{$*$}$$

Nach der Theorie von Hodge degeneriert diese Spektralsequenz in jeder Faser und damit überhaupt. Ferner gilt nach dem Satz über universelle Koeffizienten

$$R^n f_*(f^{\bullet}\mathcal{O}_M) \cong R^n f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M .$$

Aus der Sequenz ($*$) erhält man daher eine Inklusion

$$f_* \Omega^2_{X/M} \hookrightarrow R^2 f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M ,$$

folglich einen Schnitt des Bündels $\mathbf{P}(R^2 f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M)$. Wenn M hinreichend klein gewählt ist, hat man einen Isomorphismus $R^2 f_* \mathbf{C} \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) \times M$. Der oben definierte Schnitt gibt dann eine Abbildung $M \to \mathbf{P}(H^2(X_0, \mathbf{C}))$, die mit der Periodenabbildung übereinstimmt. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann aus der Periode einer K 3-Fläche die Neron-Serevi-Gruppe der algebraischen Zyklen erhalten. Grundlage dafür ist folgende wohlbekannte Tatsache (WEIL [1]):

2.3. Satz. *Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Das Bild der Abbildung $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ ist die Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^1(X, \Omega_X^1)$.*

Es sei $\xi \in H^2(X, \mathbf{Z})$ und $\check{\xi} \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die duale Klasse.

2.4. Korollar. *ξ ist genau dann die Chernsche Klasse eines Linienbündels, wenn die Periodenabbildung auf $\check{\xi}$ verschwindet.*

Beweis. Es sei ω_ξ die harmonische Form aus der Kohomologieklasse ξ. Dann gilt

$$\int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa .$$

Ist ω_ξ vom Typ (1,1), so verschwindet das letzte Integral offenbar. Umgekehrt sei $\int_{\check{\xi}} \varkappa = 0$.

Da ω_ξ reell ist, können wir $\omega_\xi = a\varkappa + \eta + \bar{a}\bar{\varkappa}$ schreiben. Dabei ist η eine harmonische Form vom Typ (1, 1) und $a \in \mathbf{C}$. Wir erhalten

$$0 = \int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa = \bar{a} \int \bar{\varkappa} \wedge \varkappa .$$

Daraus folgt $\bar{a} = 0$ und $\omega_\xi = \eta$.

2.5. Definition. Es sei $f: X \to M$ eine glatte Familie von K 3-Flächen, X_0 die Faser im Punkt $t_0 \in M$ und Θ die Garbe von Keimen holomorpher Vektorfelder auf X_0. f heißt *effektiv parametrisiert* im Punkt $t_0 \in M$, wenn die Kodaira-Spencer-Abbildung $\varrho: T_{t_0} \to H^1(X_0, \Theta)$ injektiv ist. Ist ϱ surjektiv, so heißt f *vollständig*.

2.6. Theorem (lokaler Satz von TORELLI für K 3-Flächen). *Es sei $f: X \to M$ eine glatte im Punkt $t_0 \in M$ effektiv parametrisierte Familie von K 3-Flächen. Dann ist die Periodenabbildung im Punkt t_0 eine Einbettung.*

Einen Beweis für dieses Resultat von ANDREOTTI und TJURINA findet man in SCHAFAREWITSCH u. a. [1]. Nach dem Dualitätssatz von SERRE gilt

$$\dim H^q(X_0, \Theta) = \dim H^{n-q}(X_0, \Omega_{X_0}^1) .$$

Aus 1.3. ergibt sich $\dim H^2(X_0, \Theta) = 0$. Nach KURANISHI existiert daher eine in jedem Punkt effektiv und vollständig parametrisierte Familie Kählerscher K 3-Flächen (siehe Kap. II). Die Basis einer solchen Familie ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $20 = \dim H^1(X_0, \Theta)$.

Es sei $f: X \to M$ eine solche Kuranishifamilie. In der Umgebung eines jeden Punktes $t_0 \in M$ liefert die Periodenabbildung eine offene Einbettung $M \to \Omega$.

Nach den Betrachtungen von 2.4. entspricht jedem Punkt eine Neron-Severi-Gruppe, nämlich der Kern der Abbildung $\omega: H_2(X_0, \mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$. Es ist klar, daß die Menge der ω mit Kern $\omega = 0$ überall dicht in Ω ist. Daraus folgt, daß in der Umgebung eines jeden Punktes $t_0 \in M$ Punkte t existieren, in denen die Neron-Severi-Gruppe der Faser X_t Null ist. Insbesondere kann X_t dann nicht algebraisch sein. Es kann folglich keine Kuranishifamilien algebraischer Flächen geben. Genauer gilt

2.7. Satz. *Die Menge* $\{t \in M \mid X_t$ *algebraisch*$\}$ *ist dicht in* M *und Vereinigung von abzählbar vielen 19-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.*

3. Der globale Satz von Torelli für K3-Flächen

3.1. In diesem Abschnitt untersuchen wir analog zum Kapitel IV über globale Moduln von Kurven die Modulräume von K 3-Flächen. Wir verwenden dabei die Terminologie der algebraischen Felder.
Es sei $\mathscr{F}$ das Feld der K 3-Flächen. Da die Automorphismengruppe einer K 3-Fläche im allgemeinen unendlich ist, ist die Diagonale $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ nicht quasikompakt, und wir können deshalb das Kriterium von Artin nicht anwenden. Wir erzwingen die Quasikompaktheit durch folgende Definition.

3.2. Definition. Es sei $f\colon X \to S$ eine Familie von K 3-Flächen. Unter einer *n-Polarisierung* von f verstehen wir ein relativ sehr amples Linienbündel $\mathscr{L}$ auf X derart, daß $f_*\mathscr{L}$ lokal frei vom Rang $n + 1$ ist. Das Feld der n-polarisierten K 3-Flächen bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_n$.

Wir betrachten zunächst den Funktor der „n-linearisierten" K 3-Flächen

$$M_n(S) = \begin{cases} n\text{-polarisierte } K\,3\text{-Flächen } X \xrightarrow{f} S,\ \mathscr{L} \\ \text{zusammen mit einen Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(f_*\mathscr{L}) \cong \mathbf{P}^n_S, \text{ modulo Isomorphismen.} \end{cases}$$

Man zeigt leicht, daß M_n ein offener Unterfunktor von $\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}}$ ist, wobei $P(t) = t^2(n-1) + 2$ ist.
Es sei $X \to M_n$ die universelle n-linearisierte K 3-Fläche über M_n und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M_n$. Wir betrachten die Kodaira-Spencer-Abbildung $T_{M,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$, wobei Θ_{X_0} die Garbe der Keime holomorpher Vektorfelder auf X_0 bezeichnet. Da M_n eine offene Teilmenge des Hilbertschemas ist, ist der Tangentialraum T_{M,t_0} isomorph zu $H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0})$, wobei $N_{\mathbf{P}^n/X_0}$ das Normalenbündel von X_0 in $\mathbf{P}^n$ bezeichnet. In unserem Falle erhält man die Kodaira-Spencer-Abbildung aus der Sequenz

$$0 \to \Theta_{X_0} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0} \to N_{\mathbf{P}^n/X_0} \to 0. \tag{*}$$

Das Kompositum der beiden Abbildungen

$$H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0})$$

und

$$H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \cong T_{M_n,t_0}$$

bezeichnen wir mit Ψ.

3.3. Satz. *Das Schema* M_n *ist glatt. Die Sequenz*

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M_n,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$

ist exakt. Der Kokern von ϱ *ist eindimensional.*

Beweis. Aus der Theorie der Hilbertschema ist bekannt, daß die erste Behauptung äquivalent mit $H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) = 0$ ist. Nach 1.3. und dem Serreschen Dualitätssatz wissen wir, daß $H^0(X_0, \Theta_{X_0}) = H^2(X_0, \Theta_{X_0}) = 0$ ist. Daher erhält man aus der exakten Folge (*) die exakte Folge

$$0 \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Bekanntlich hat man eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1} \to \Theta_{\mathbf{P}^n} \to 0.$$

Durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{X_0}$ erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) & \to & H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1}) & \to & H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\
0 \to & H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) & \to & H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(1)^{n+1}) & \to & H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) & \to 0
\end{array}$$

und einen Isomorphismus

$$H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \cong H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}).$$

Da die ersten beiden Pfeile des Diagramms nach Definition des Funktors M_n Isomorphismen sind, ist φ ein Isomorphismus. Setzt man die erhaltenen Ergebnisse in die anfangs angegebene Folge ein, so ergibt sich

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \xrightarrow{\chi} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Da $\dim H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 1$ ist, folgt der Satz, wenn wir zeigen, daß χ nicht surjektiv ist. Das ist klar, da es nach den Überlegungen vor 2.7. keine vollständig parametrisierten Familien algebraischer K 3-Flächen gibt.

Es sei $M_n \to \mathcal{M}_n$ der kanonische Morphismus und $S \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer K 3-Fläche $X \xrightarrow{f} S$ mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$ entspricht. Offenbar ist $M_n \times_{\mathcal{M}_n} S$ die Garbe der Isomorphismen von $\mathbf{P}(f_*\mathcal{L})$ und $\mathbf{P}^n_S$, d. h., der Morphismus $M_n \to \mathcal{M}_n$ ist darstellbar und glatt. Daraus folgt nach dem Kriterium von ARTIN leicht, daß $\mathcal{M}_n$ ein algebraisches Feld ist. Wir definieren jetzt einen rigiden Funktor auf $\mathcal{M}_n$. Es sei L ein unimodulares gerades Gitter vom Rang 22 und mit dem Index 16. Wir fixieren einen Vektor $l \in L$ mit $l^2 = 2n - 2$. Es sei G die Gruppe aller Automorphismen von L, die den Vektor l invariant lassen. Wir betrachten eine Familie $f\colon X \to S$ von K 3-Flächen mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$. Dieses $\mathcal{L}$ definiert in der Homologie $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ jeder Faser von f eine Klasse ξ_s.
Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH und dem Satz von BERTINI folgt $\xi_s^2 = 2n - 2$. Es sei $P(X/S)$ das Prinzipalfaserbündel, dessen Faser im Punkt s die Isomorphismen von $H^2(X_s, \mathbf{Z})$ nach L sind, die den Vektor ξ_s auf den Vektor l abbilden. Als Basis des Bündels $P(X/S)$ muß man die offene Menge U aller s nehmen, für die solche Isomorphismen existieren. Wenn U mit S übereinstimmt, nennen wir die Familie $X \to S$ zusammen mit einem Schnitt von $P(X/S)$ über S eine *Familie rigider* K 3-*Flächen*. Für $S = \operatorname{Spec}(\mathbf{C})$ ist eine rigide K 3-Fläche ein Tripel (X, φ, ξ), wobei X

eine K 3-Fläche ist, $\xi \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die Klasse eines sehr amplen Divisors auf X und $\varphi: H_2(X, \mathbf{Z}) \to L$ ein Isomorphismus, der ξ in l überführt.

Nach folgendem Lemma, dessen Beweis man in SCHAFAREWITSCH u. a. [1] findet, ist $P(X/S)$ ein rigider Funktor.

3.4. Lemma. *Ein Automorphismus von X, der auf der Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z})$ die Identität induziert, ist die Identität.*

Wir bezeichnen mit R_n den Funktor rigider K 3-Flächen; $R_n(S)$ ist also die Menge aller Isomorphieklassen von Paaren $(X \to S, \varphi)$, X/S eine Familie von K 3-Flächen, φ ein Isomorphismus des lokalen Systems $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ auf das konstante lokale System L über S, so daß $\varphi_s^{-1}(l)$ für jedes $s \in S$ die Klasse eines sehr amplen Divisors ist. Man hat einen kanonischen darstellbaren unverzweigten Morphismus $R_n \to \mathcal{M}_n$. Daraus folgt, daß R_n durch eine analytische Mannigfaltigkeit darstellbar ist.

3.5. Satz. *Die universelle Familie $X \to R_n$ rigider K 3-Flächen hat die Dimension* 19 *und ist effektiv parametrisiert.*

Beweis. Da die Abbildung $R_n \to \mathcal{M}_n$ etal ist, genügt es, die entsprechenden Behauptungen für $\mathcal{M}_n$ zu beweisen. Es sei x: Spec $(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer n-polarisierten K 3-Fläche X_0 entspricht. Der Tangentialraum T_0 von $\mathcal{M}_n$ im Punkt x ist die Menge der Isomorphieklassen n-polarisierter K 3-Flächen über Spec $(\mathbf{C}[\varepsilon])$ mit der speziellen Faser X_0 $(\varepsilon^2 = 0)$. Wir wählen eine projektive Einbettung der polarisierten Fläche X_0. Dann entspricht X_0 einem Punkt t_0 des Schemas M_n. Man hat einen kanonischen Morphismus $T_{M_n, t_0} \to T_0$. Offenbar wirkt die Liealgebra $GL(n + 1)$ von $PGL(n)$ auf T_{M_n, t_0}, und T_0 ist der Quotient unter dieser Wirkung. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M, t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0}).$$

Offenbar kann man ϱ über T_0 faktorisieren. Da $GL(n + 1)$ transitiv auf $H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}$ wirkt, erhält man eine Injektion $T_0 \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$. Daraus folgt die Behauptung.

3.6. Die Periodenabbildung. Im Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C})$ ist auf kanonische Weise ein Skalarprodukt definiert. Es sei $\Omega \subset \mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$ die Menge aller Geraden ω, so daß $\omega_0^2 = 0$ und $\omega_0 \bar{\omega}_0 > 0$ für alle von Null verschiedenen Elemente $\omega_0 \in \omega$ gilt; $\Omega(l) \subset \Omega$ sei die Teilmannigfaltigkeit aller Geraden, die auf l senkrecht stehen. Da L den Rang 22 hat, hat $\Omega(l)$ die Dimension 19.
Es sei (X, φ, ξ) eine rigide K 3-Fläche, φ induziert einen Isomorphismus der Räume $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C}))$ und $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$. Nach 2.1. wird die Periode von X dabei auf einen Punkt von $\Omega(l)$ abgebildet. Wir erhalten dadurch eine Abbildung Per: $R_n \to \Omega(l)$, die nach 2.2. holomorph ist. Da die universelle rigide K 3-Fläche über R_n effektiv parametrisiert und $\dim R_n = \dim \Omega(l) = 19$ ist, ist Per nach 2.6. ein lokaler Isomorphismus. Das Hauptresultat dieses Kapitels lautet

3.7. Satz (Torellisatz für K 3-Flächen; SCHAFAREWITSCH u. a. [1]). *Die Periodenabbildung* Per *ist eine offene Einbettung $R_n \to \Omega(l)$.*

Nach dem Gesagten genügt es zu zeigen, daß Per injektiv ist. Im folgenden Abschnitt werden wir in $\Omega(l)$ eine dichte Teilmenge Z konstruieren, so daß $\mathrm{Per}^{-1}(Z) \to Z$ bijektiv ist. Da R_n und $\Omega(l)$ separiert sind, folgt leicht, daß dann Per injektiv sein muß.

Man kann versuchen, den Torellisatz auf rigide Kählersche K 3-Flächen auszudehnen, indem man für R_n den Kuranishiraum der rigiden K 3-Flächen nimmt. Ein analoger Beweis stößt jedoch auf Schwierigkeiten, da der Kuranishiraum nicht separiert ist. (Der Satz wurde inzwischen von M. RAPOPORT und D. BURNS bewiesen.)

4. Der Beweis des Torellischen Satzes für K 3-Flächen

In § 1 haben wir gesehen, daß man jeder zweidimensionalen abelschen Mannigfaltigkeit auf kanonische Weise eine K 3-Fläche X zuordnen kann. Wenn die abelsche Mannigfaltigkeit eine elliptische Kurve enthält, so nennen wir X eine *spezielle Kummersche Fläche.*

4.1. Satz. *Es seien X und X' K 3-Flächen, und X sei speziell kummersch. Es sei $\psi: H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ ein Isomorphismus von Gittern, der die effektiven Zyklen von $H_2(X, \mathbf{Z})$ in effektive Zyklen überführt und die Perioden erhält. Dann ist X' speziell kummersch, und es existiert ein Isomorphismus $\varphi: X \to X'$, der in der Homologie ψ induziert.*

Den Beweis von 4.1. werden wir in 5.2. geben. Zunächst zeigen wir, daß aus 4.1. der Satz von TORELLI folgt.
Es sei $S_X \subset H_2(X, \mathbf{Z})$ die Neron-Severi-Gruppe der algebraischen Zyklen einer K 3-Fläche X. Mit $U_X \subset S_X$ bezeichnen wir die Unterhalbgruppe der Klassen effektiver Zyklen. Es sei $V_X \subset S_X$ die Menge der Zyklen a mit $a^2 \geqq 0$ und $au \geqq 0$ für alle $u \in U_X$. Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH folgert man $V_X \subset U_X$. Weiterhin folgt aus dem Satz von RIEMANN-ROCH leicht

4.2. Lemma. *Es seien X und X' K 3-Flächen, und $\psi: S_X \to S_{X'}$ sei ein Homomorphismus der Neron-Severi-Gruppen, der die Klasse eines amplen Divisors auf X in ein Element von $V_{X'}$ überführt und das Schnittprodukt respektiert. Dann bildet ψ effektive Divisoren auf effektive Divisoren ab.*

Beweis. Ist $D \subset X$ eine reduzierte irreduzible Kurve, so ist

$$p_a(D) = 1 + \frac{(D^2)}{2} \geqq 0$$

und

$$l(D) + l(-D) \geqq 1 + p_a(D) > 0.$$

Da das Schnittprodukt erhalten bleibt, ist

$$l(\psi(D)) + l(\psi(-D)) \geqq 1 + p_a(\psi(D)) = 1 + p_a(D) > 0,$$

also $\psi(D)$ oder $\psi(-D)$ effektiv.
Ist H Hyperebenschnitt und $H' = \Psi(H)$, so ist

$$(\psi(-D) \cdot \psi(H)) = -(D \cdot H) < 0,$$

also ist $\psi(D)$ effektiv.
Es sei $P_X \subset U_X$ die Menge der Vektoren p mit $p^2 = -2$. Jedem $p \in P_X$ können wir eine Spiegelung des Raumes $H_2(X, \mathbf{Z})$ zuordnen: $S_p(x) = x + (x \cdot p)\, p$.

Es sei G die Gruppe der Automorphismen von $H_2(X, \mathbf{Z})$, die die Perioden erhalten, und $\Gamma(X)$ die Untergruppe, die von den Spiegelungen s_p erzeugt wird. Schließlich bezeichne D die Gruppe, die aus den Transformationen $x \to \pm x$ besteht. Mit Hilfe der Theorie der Coxetergruppen kann man beweisen

4.3. Lemma. *$\Gamma(X)$ ist ein Normalteiler von G, $G = G^V \Gamma(X) D$, wobei G^V die Untergruppe der Automorphismen von G bezeichnet, die V invariant lassen. Für jeden Vektor x mit $x^2 \geqq 0$ existiert ein $\gamma \in \Gamma(X) \cdot D$ derart, daß $\gamma x \in V$ ist.*
Das orthogonale Komplement von S_X in $H_2(X, \mathbf{Z})$ nennt man die *Gruppe der transzendenten Zyklen T_X*.

4.4. Lemma. *Es sei B ein positiv definites Gitter, gerade und vom Rang 2. Dann existiert eine zweidimensionale reduzible abelsche Mannigfaltigkeit A, deren Gitter der transzendenten Zyklen T_A isomorph zu B ist.*

Beweis. Es sei A ein komplexer Torus mit der Basiszahl 4. Dann erzeugt das Bild der Abbildung $\operatorname{Pic} A \to H^1(A, \Omega_A)$ ganz $H^1(A, \Omega_A)$. Daraus folgt, daß auf A eine Riemannsche Form existiert. Aus der Klassifikation der Endomorphismenringe nicht reduzibler abelscher Mannigfaltigkeiten (Mumford [6]) folgt, daß eine abelsche Mannigfaltigkeit mit der Basiszahl 4 reduzibel sein muß. Da ein komplexer Torus mit $T_A \cong B$ die Basiszahl 4 hat, genügt es zum Beweis von 4.4., einen komplexen Torus mit den gewünschten Eigenschaften zu finden.

Die zweite Homologiegruppe eines komplexen Torus ist isomorph zu dem Gitter E mit der Basis $e_1, \ldots, e_6$, so daß

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{für } |i - j| = 3, \\ 0 & \text{für } |i - j| \neq 3 \end{cases}$$

ist. Da ein komplexer Torus durch seine Perioden eindeutig bestimmt ist, gibt es eine Bijektion der Tori der Dimension 2 und der komplexen linearen Funktionale ω auf E mit

$$\omega^2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega\bar{\omega} > 0. \tag{$*$}$$

Bekanntlich kann jedes zweidimensionale Gitter in E eingebettet werden. Wir wählen eine solche Einbettung von B in E und bezeichnen das orthogonale Komplement mit B'. Es genügt folglich, ein lineares Funktional ω auf E zu finden derart, daß $\omega(B') = 0$ ist. Die Existenz folgt aus

4.5. Lemma. *Auf jedem zweidimensionalen positiv definiten Gitter B existiert ein komplexes lineares Funktional ω mit den Relationen $(*)$.*

Beweis. Es sei $B = \mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2$. Die positiv definite quadratische Form $F(x_1, x_2) = (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2$ kann man in der Form $F(x_1, x_2) = |\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2|^2$ schreiben, wobei μ_1 und μ_2 aus $\mathbf{C}$ sind. $\omega = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ ist das gesuchte Funktional.

4.6. Es sei B ein positiv definites Gitter vom Rang 2, so daß $b^2 = 0 \pmod 4$ und ω ein lineares Funktional auf B mit der Relation $(*)$ ist. Dann gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte K 3-Fläche X, für die $T_X \cong B$ ist, wobei die Periode von X auf ω abgebildet wird. X ist dann eine spezielle Kummersche Fläche mit der Basiszahl 20.

Beweis. Es sei B' das Gitter mit derselben zugrunde liegenden abelschen Gruppe B, dessen Skalarprodukt aber gerade die Hälfte des Skalarproduktes auf B ist. Ferner sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit mit $T_A \cong B'$, so daß die Periode in ω übergeht, und X die zugehörige K 3-Fläche. Offenbar ist $T_X \cong B$.
Es sei X' eine zweite K 3-Fläche mit $T_{X'} \cong B$. Man kann den Isomorphismus $T_X \to T_{X'}$ zu einem Isomorphismus $H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ ausdehnen.
Es sei ξ die Klasse eines sehr amplen Divisors in $H_2(X, \mathbf{Z})$. Nach Lemma 4.3 finden wir ein $\gamma \in \Gamma(X') \cdot D$ derart, daß $\gamma\varphi(\xi) \in V_{X'}$ ist.
Nach 4.2. überführt $\gamma\varphi$ effektive Divisoren in effektive Divisoren und erhält die Perioden. Dann finden wir nach 4.1. den gewünschten Isomorphismus $X \to X'$.
Aus 4.6. und den Bemerkungen am Schluß von § 3 folgt der globale Torellisatz, wenn wir folgendes zeigen:

4.7. Satz. *Die Menge aller* $\omega \in \Omega(l)$, *für die*

(i) $\quad$ $\operatorname{rg} \operatorname{Ker} \omega = 2$,

(ii) $\quad$ $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ *für alle* $a \notin \operatorname{Ker} \omega$ *ist*,

ist überall dicht in $\Omega(l)$.

Der Beweis erfordert einige Details aus der Theorie der unimodularen Gitter. Wir geben daher nur die Details an.
Nach 4.5. folgt, daß ein $\omega \in \Omega(l)$ mit $\operatorname{Ker} \omega = B$ existiert. Die Menge der ω mit (i) und (ii) ist also nicht leer.
Es sei G die Gruppe aller linearen Transformationen von $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, die den Vektor l und das Skalarprodukt bis auf einen konstanten Faktor invariant lassen. Offenbar wirkt G transitiv auf $\Omega(l)$. Ferner sei $\Gamma \subset G$ die Gruppe aller Endomorphismen, deren Matrizen bezüglich einer geeigneten Basis von L Koeffizienten mit zu 2 primen Nennern haben und deren Umkehrmatrizen die gleiche Eigenschaft besitzen. Aus der Theorie der algebraischen Gruppen weiß man, daß Γ dicht in G liegt. Es sei $\omega \in \Omega(l)$ eine Periode, die (i) und (ii) erfüllt. Dann folgt, daß $\Gamma\omega$ überall dicht in $\Omega(l)$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß alle Elemente von $\Gamma\omega$ den Bedingungen des Satzes genügen.

5. Spezielle Kummersche Flächen

Wir skizzieren jetzt den Beweis von 4.1. Der erste Schritt ist, zu zeigen, daß X' ebenfalls speziell kummersch ist. Dazu geben wir eine Charakterisierung einer speziellen Kummerschen Fläche mit Hilfe des Gitters S_X.
Es sei E ein Gitter mit der Basis $u_1, \ldots, u_4$ derart, daß $u_i u_j = \delta_{ij}$ ist. Mit G_4 bezeichnen wir das Teilgitter aller Vektoren $\sum x_i u_i$, so daß $\sum x_i u_i \equiv 0 \pmod 2$ ist.
Es sei z ein Vektor eines Gitters G mit $z^2 = 0$, $U \subset G$ das Teilgitter, das von allen Vektoren x mit $x^2 = -2$, $xz = 0$ und z aufgespannt wird. Wir bezeichnen mit $G(a)$ das Gitter U/Ga.

5.1. Satz. *Es sei X eine K 3-Fläche. Dann ist X speziell kummersch genau dann, wenn in der Gruppe S_X eine Klasse z eines irreduziblen Divisors existiert, so daß $z^2 = 0$ und $S_X(z) \cong G_4^4$ ist.*
Einen Vektor z mit diesen Eigenschaften nennen wir *kummersch.*

Beweis. Es sei zunächst X eine Kummersche Fläche, die einer reduziblen abelschen Mannigfaltigkeit A entspricht. Da A reduzibel ist, existiert ein surjektiver Homomorphismus von A auf eine elliptische Kurve B, dessen Fasern elliptische Kurven sind.

Die Gruppe $G = \{+1, -1\}$ operiert in natürlicher Weise auf A und B. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & A/G & \leftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \to & B/G & \cong & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

Es sei z die Klasse der allgemeinen Faser von f. Man überzeugt sich leicht, daß $S_X(z)$ von den irreduziblen Komponenten der ausgearteten Fasern von f erzeugt wird. Offenbar ist $f^{-1}(p)$ genau dann ausgeartet, wenn p Bild eines der vier Zweiteilungspunkte von B ist. In diesem Fall hat man $g^{-1}(p) = 2C$, wobei C eine glatte rationale Kurve ist. Da $2C$ Bild einer elliptischen Kurve auf A ist, die durch vier Zweiteilungspunkte geht, sieht man leicht, daß das Urbild von $2C$ auf X die Form $2L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ hat. Dabei ist L die strenge Transformierte von C, und L_i, $i = 1, \ldots, 4$, sind die exzeptionellen Geraden. Man hat

$$(L^2) = (L_i^2) = -2, \quad (L_iL_j) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad (L_i \cdot L) = 1.$$

Damit haben wir die Faser $f^{-1}(p) = 2L + L_1 + \cdots + L_4$ berechnet. Wir sagen mit Kodaira, daß $f^{-1}(p)$ *vom Typ* D_4 ist. Die Abbildung

$$L \mapsto -u_1 - u_3, \quad L_1 \mapsto u_1 + u_2, \quad L_2 \mapsto u_1 - u_2,$$
$$L_3 \mapsto u_3 + u_4, \quad L_4 \mapsto u_3 - u_4$$

liefert einen Isomorphismus des Gitters G_4 mit dem Gitter

$$\mathbf{Z}L \oplus \mathbf{Z}L_1 \oplus \mathbf{Z}L_2 \oplus \mathbf{Z}L_3 \oplus \mathbf{Z}L_4/2L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$

Insgesamt erhält man $S_X(z) \cong G_4^4$.

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß in S_X ein Kummerscher Vektor z existiert, und zeigen dann, daß X speziell kummersch ist. Es sei D ein irreduzibler Divisor, dessen Klasse z ist. Nachdem Satz von Bertini enthält $|D|$ einen glatten irreduziblen Divisor C. Man zeigt leicht, daß C eine elliptische Kurve und $l(C) = 2$ ist. Das lineare System $|C|$ definiert eine Faserung $f\colon X \to \mathbf{P}^1$. Es seien $D_1, \ldots, D_r$ die ausgearteten Fasern und $D_i = \sum_j n_{ij}C_{ij}$ ihre Zerlegungen in irreduzible Komponenten. Ferner sei H_i das Gitter

$$H_i = \bigoplus_j \mathbf{Z}C_{ij}/\sum n_{ij}C_{ij}.$$

Nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises hat man

$$H_1 \oplus \cdots \oplus H_r = S_X(z) \cong G_4^4.$$

Mit Hilfe der Kodairaklassifikation der singulären Fasern einer elliptischen Faserung kann man $H_i \cong G_4$ folgern. Daraus erhält man weiter, daß $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ genau vier singuläre Fasern hat, die in den Punkten $u_1, \ldots, u_4 \in \mathbf{P}^1$ liegen mögen. Es sei $B \to \mathbf{P}^1$ eine elliptische Kurve mit den Verzweigungspunkten $u_1, \ldots, u_4$. Man kann auf B eine Gruppenstruktur wählen, so daß $B/G = \mathbf{P}^1$ ist. Es sei A das minimale Modell von $X \times_{\mathbf{P}^1} B$. Da Fasern vom Typ D_4 potentiell gute Reduktion haben, hat die Faserung $A \xrightarrow{\varphi} B$ keine entarteten Fasern. Nach der Klassifikation der kompakten komplexen Flächen ist A dann eine abelsche Mannigfaltigkeit. Wir können voraussetzen, daß das Gruppengesetz auf A so gewählt sei, daß φ ein Homomorphismus ist. Offenbar ist dann X die Kummersche Fläche, die zu A assoziiert ist.

5.2. Wir benötigen einige Tatsachen aus der Topologie der Kummerschen Flächen, die wir ohne Beweis angeben.
Es sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und N die Menge der Zweiteilungspunkte. Weiter sei X die zu A assoziierte Kummersche Fläche. Wir haben eine Abbildung $A - N \to X$ und daher in der Homologie

$$\begin{tikzcd} H_2(A - N, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(X, \mathbf{Z}) \\ H_2(A, \mathbf{Z}) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Es sei $\pi_X \subset H_2(X, \mathbf{Z})$ das Gitter, daß von den 16 ausgezeichneten Geraden erzeugt wird. Dann ist das orthogonale Komplement von π_X das Gitter $\pi_* H_2(A, \mathbf{Z})$. Es sei φ ein Automorphismus von $H_2(X, \mathbf{Z})$, der auf $\pi_* H_2(A, \mathbf{Z})$ die Identität ist und eine der ausgearteten Geraden invariant läßt. Dann ist φ die Identität.

Beweis von 4.1. Ohne große Schwierigkeiten zeigt man, daß ψ Kummersche Vektoren auf Kummersche Vektoren abbildet. Daraus erhält man nach 5.1., daß X' speziell kummersch ist und daß $\psi(\pi_X) \subset \pi_{X'}$ ist. Dann induziert ψ_i einen Isomorphismus der orthogonalen Komplemente $\psi_1: H_2(A, \mathbf{Z}) \to H_2(A', \mathbf{Z})$, der ebenfalls effektive Divisoren und das Schnittprodukt respektiert. Wir werden weiter unten sehen, daß ψ_1 durch einen Morphismus $\varphi_1: A \to A'$ induziert wird.
Es sei l die ausgezeichnete Gerade aus π_X, die dem Nullpunkt von A entspricht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\psi(l)$ dem Nullpunkt von A' entspricht.
Der Morphismus φ_1 induziert einen Morphismus $\varphi: X \to X'$. Es sei $\varphi_*: H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ die induzierte Abbildung in der Kohomologie. Da $\varphi_*(l) = \psi(l)$ ist und φ_* und ψ auf $H_2(A, \mathbf{Z})$ übereinstimmen, müssen φ und ψ nach den Bemerkungen von 4.9. übereinstimmen.

5.3. Lemma. *Es seien A_1 und A_2 zweidimensionale abelsche Mannigfaltigkeiten. Es sei $\psi_1: H_2(A_1, \mathbf{Z}) \to H_2(A_2, \mathbf{Z})$ ein Isomorphismus, der das Skalarprodukt und die Perioden respektiert und effektive Divisoren auf effektive Divisoren abbildet. Dann wird ψ_1 durch einen Isomorphismus abelscher Mannigfaltigkeiten $\varphi_1: A_1 \to A_2$ induziert.*

Beweis. Es sei $A_1 = \mathbf{C}^2/\Gamma_1$, $A_2 = \mathbf{C}^2/\Gamma_2$, $e_1, \ldots, e_4$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von Γ_1 und $f_1, \ldots, f_4$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von Γ_2. Dann ist

$$\gamma_1 = e_1 \wedge e_2, \quad \gamma_2 = e_3 \wedge e_4, \quad \gamma_3 = e_1 \wedge e_3,$$

$$\gamma_4 = e_4 \wedge e_2, \quad \gamma_5 = e_1 \wedge e_4, \quad \gamma_6 = e_2 \wedge e_3$$

eine $\mathbf{Z}$-Basis von $H_2(A, \mathbf{Z})$, und analog erhält man eine $\mathbf{Z}$-Basis $\delta_1, \ldots, \delta_6$ von $H_2(A_2, \mathbf{Z})$.
Es sei J' die Schnittmatrix von $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ und $\delta_1, \ldots, \delta_6$. Die das Schnittprodukt erhaltenden Isomorphismen $\psi: H_2(A_1, \mathbf{R}) \to H_2(A_2, \mathbf{R})$ entsprechen bijektiv den Elementen

der Gruppe von Matrizen

$$G(\mathbf{R}) = \{X \in GL(6\mathbf{R}) \mid {}^tXJ'X = J'\}.$$

Es seien α_i die folgenden Automorphismen von $H_2(A_2, \mathbf{R})$:

1. $\alpha_1 = \mathrm{id}$,
2. $\alpha_2 = -\mathrm{id}$,
3. $\alpha_3 = \tau$ mit $\tau(\delta_{2i-1}) = \delta_{2i}$, $i = 1, \ldots, 3$, und $\tau^2 = \mathrm{id}$,
4. $\alpha_4 = -\tau$.

Man zeigt, daß zu jedem ψ ein i derart existiert, daß $\alpha_i \circ \psi \in G^0(\mathbf{R})$ ist, wobei $G^0(\mathbf{R})$ die Zusammenhangskomponente der 1 von $G(\mathbf{R})$ bezeichnet. Da die Abbildung $SL(4\mathbf{R}) \to G(\mathbf{R})$ surjektiv ist, wird $\alpha_i \circ \psi$ durch einen Isomorphismus $\varphi\colon \Gamma_1 \otimes \mathbf{R} \to \Gamma_2 \otimes \mathbf{R}$ induziert. Ist $\psi\big(H_2(A_1, \mathbf{Z})\big) \subset H_2(A_2, \mathbf{Z})$, so folgt $\varphi(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$, da $SL(4\mathbf{Z})$ eine maximale diskrete Untergruppe von $SL(4\mathbf{R})$ ist. Wir erhalten dann eine Abbildung $\varphi\colon \mathbf{C}^2/\Gamma_1 \to \mathbf{C}^2/\Gamma_2$, von der man nachweist, daß sie die komplexe Struktur respektiert, da die Perioden erhalten bleiben.

1. Ist also $\psi_1 \in G^0(\mathbf{R})$, so ist der Satz bewiesen.

2. Es sei $-\psi_1 \in G^0(\mathbf{R})$. Dann folgt, daß $-\psi_1$ durch einen Isomorphismus $A_1 \to A_2$ induziert wird. Da aber ψ_1 effektive Divisoren respektiert, erhalten wir einen Widerspruch.

Es sei $\alpha_3 \circ \psi \in G^0(\mathbf{R})$. Da A_2 eine abelsche Mannigfaltigket ist, findet man eine alternierende Bilinearform E auf Γ_2, die den Riemannschen Periodenrelationen genügt. Nach geeigneter Wahl der Basis in Γ_2 hat E die Form $E = d_1 f_1^* \wedge f_3^* + d_2 f_2^* \wedge f_4^*$, wobei $d_1, d_2 \in \mathbf{Z}$, $d_1, d_2 > 0$ und $f_1^*, \ldots, f_4^*$ die zu $f_1, \ldots, f_4$ duale Basis ist. Es seien z^1, z^2 komplexe Koordinaten auf A_2, $dz = \begin{pmatrix} dz^1 \\ dz^2 \end{pmatrix}$, und P sei die Periodenmatrix von A_2. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ \bar{P} \end{pmatrix}(f) \quad \text{mit} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_4 \end{pmatrix}.$$

Es sei $(\psi, \bar{\psi})$ invers zu $\begin{pmatrix} P \\ \bar{P} \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Die Periodenrelationen von E lauten

$$\begin{pmatrix} {}^t\psi \\ {}^t\bar{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} (\psi, \bar{\psi}) = \begin{pmatrix} 0 & iH/2 \\ -iH/2 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei H die zu E assozierte positiv definite hermitesche Matrix ist. Wählt man die Koordinaten auf A_2 geeignet, so kann man erreichen, daß $P = (I_4, \pi)$ (I_4 Einheitsmatrix) ist. Die Periodenrelationen haben dann die Form

1. ${}^t\pi D = D\pi$,
2. $D \operatorname{Im} \pi > 0$.

Es sei $e_1, \ldots, e_4$ eine Basis von Γ_1 mit $\varphi_i(e_i) = f_i$, wobei $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ von $\alpha_3 \cdot \psi$ induziert wird. Da ψ_1 die Perioden erhält, berechnet man leicht die Periodenmatrix P' von A_1:

$$P' = (-{}^t\pi, I_4), \quad \psi' = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{2}\,{}^t(\operatorname{Im} \pi)^{-1} \\[2ex] \dfrac{i}{2}\,\bar{\pi}\,{}^t(\operatorname{Im} \pi)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es sei $E' = \psi_1^* E = -d_1 e_2^* \wedge e_4 - d_2 e_1^* \wedge e_3^*$. Da ψ_1 effektive Divisoren in effektive Divisoren überführt, muß E' den Periodenrelationen genügen. Die Relationen für E' und $D' = \begin{pmatrix} -d_2 & 0 \\ 0 & -d_1 \end{pmatrix}$ sind analog:

1'. $\bar{\pi} D' = D'^t\bar{\pi}$ (oder ${}^t\pi D = D\pi$),

2'. $(\operatorname{Im} \pi)\, D' > 0$.

Man sieht, daß sich die Relationen 2 und 2' widersprechen. Damit ist der Fall $\alpha_3 \cdot \psi \in G^0(\mathbf{R})$ ausgeschlossen.

Den Fall $\alpha_4 \cdot \psi \in G^0(\mathbf{R})$ behandelt man analog.

Manuskripteingang: 7. 4. 1975

VERFASSER:

HEINZ-JÖRG FITZNER, WERNER KLEINERT, HERBERT KURKE, GERHARD PFISTER und THOMAS ZINK, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin bzw. Zentralinstitut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR