Extremaleigenschaft, daß

$$\max_{z \in H} |\mu(z)| \leqq \max_{z \in H} |\mu'(z)|$$

ist für alle $\mu'(z)$, die den gleichen Punkt des Teichmüllerraumes definieren. Wir zeigen jetzt, daß daraus die Kontraktibilität des Teichmüllerraumes folgt.
Es sei $(\Omega_1, \ldots, \Omega_{6g-6}) = \Omega$ eine reelle Basis des Raumes $H^0(C_0, \omega_{C_0}^{\otimes 2})$ der quadratischen Differentiale. Für alle Vektoren $x \in \mathbf{R}^{6g-6}$, $|x| < 1$, entspricht dem Teichmüller-differential $|x|\big(x\bar{\Omega}\big)/|x\Omega|$ ein Punkt $\gamma(x)$ des Teichmüllerraumes. Nach 3.8. ist die Abbildung $x \to \gamma(x)$ eine eineindeutige differenzierbare Abbildung der Einheitskugel im $\mathbf{R}^{6g-6}$ auf den Teichmüllerraum $T_g \subset \mathbf{R}^{6g-6}$. Nach dem Theorem von Hopf über die Gebietsinvarianz ist j dann ein Homöomorphismus.

4. Die Kompaktifizierung des Feldes der Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$

Zunächst definieren wir den Begriff „eigentlich" für algebraische Felder.
Es sei P eine Eigenschaft für Morphismen $f\colon X \to Y$ von Schemata, die lokal auf X und Y bezüglich der Etaltopologie ist. Wir sagen, daß ein Morphismus $\varphi\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ von algebraischen Feldern *die Eigenschaft P hat*, wenn für ein und folglich für jedes Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{F}_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "y"] & \mathscr{F}_2 \end{tikzcd}$$

wobei x und y surjektive Etalmorphismen sind, f die Eigenschaft P hat (z. B. lokal v. e. T., flach, etale, glatt usw.). $\mathscr{F}_1$ heißt *quasikompakt* (*Noethersch* usw.) wenn ein surjektiver Etalmorphismus $x\colon X \to \mathscr{F}_1$ mit X quasikompakt (Noethersch usw.) existiert. $\varphi\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ heißt *quasikompakt*, wenn $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}_2} Y$ für alle quasikompakten Y quasikompakt ist. Wenn φ außerdem lokal von endlichem Typ ist, heißt φ *von endlichem Typ*.

4.1. Definition. Ein Morphismus $f\colon \mathscr{F} \to S$ eines algebraischen Feldes $\mathscr{F}$ in ein Noethersches Schema S heißt *eigentlich*, wenn f von endlichem Typ und separiert ist und für jeden Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & \mathscr{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[urr, "g"] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

ein diskreter Bewertungsring V' mit dem Quotientenkörper K' existiert, der eine endliche Erweiterung von V ist, und ein Morphismus $\mathrm{Spec}(V') \to \mathscr{F}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(V') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[urr] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Für eigentliche Morphismen algebraischer Felder gelten wichtige Sätze der algebraischen Geometrie wie das Lemma von CHOW, der Zusammenhangssatz von ZARISKI und der Endlichkeitssatz.
Da es Kurven mit potentiell schlechter Reduktion gibt, existieren diskret bewertete Körper K und Morphismen $\operatorname{Spec}(K) \to M_g^0$, die sich nicht auf $\operatorname{Spec}(V')$ fortsetzen lassen, wobei V' irgendeine endliche Erweiterung des Bewertungsringes V von K ist. M_g^0 ist also nicht eigentlich über $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Um M_g^0 zu kompaktifizieren, müssen wir zu M_g^0 geeignete Kurven hinzufügen, die sich bei Reduktion potentiell gut verhalten.

4.2. Stabile Kurven.

Definition. Es sei S ein Schema. Eine *stabile Kurve* vom Geschlecht $g \geqq 2$ ist ein flacher eigentlicher Morphismus $\pi: C \to S$, dessen geometrische Fasern C_s wie folgt beschaffen sind:

(i) C_s ist reduziert, zusammenhängend und besitzt höchstens gewöhnliche Doppelpunkte.

(ii) Auf jeder nicht singulären rationalen Komponente E von C_s liegen mindestens drei Doppelpunkte von C_S.

(iii) $\dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s}) = g$.

Es gilt:

1. C ist lokal vollständiger Durchschnitt, da $\mathcal{O}_{C_s,O}$ in einem Punkt $O \in C_s$ vollständiger Durchschnitt ist und damit wegen der Flachheit auch $\mathcal{O}_{C,O}$.
2. Auf C existiert eine invertierbare Garbe mit folgenden Eigenschaften (siehe HARTSHORNE [1]):
   a) $\omega_{C/S}$ ist verträglich mit Basiswechsel.
   b) Es sei S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers; $z_1, \ldots, z_n$ seien die Doppelpunkte von C und x_i, y_i die beiden Punkte auf der Normalisierung C' von C, die über z_i liegen. Dann ist $\omega_{C,S}$ isomorph zum direkten Bild der Garbe der meromorphen Differentiale η auf C', die höchstens einfache Pole in den Punkten x_i, y_i haben, so daß
   $$\operatorname{res}_{x_i}(\eta) + \operatorname{res}_{y_i}(\eta) = 0$$
   ist.
   c) Wie in b) sei $S = \operatorname{Spec}(k)$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus
   $$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_C}(F, \omega_{C/S}) \cong \operatorname{Hom}_k\big(H^{1-i}(C, F), k\big)$$
   für jede köhärente $\mathcal{O}_C$-Garbe F.

Wie im Fall von glatten Kurven zeigt man ohne große Schwierigkeiten

4.3. Satz. *Es sei C/S eine stabile Kurve. Dann ist $\omega_{C/S}^{\otimes n}$ für $n \geqq 3$ sehr ampel und $\pi_*\big(\omega_{C/S}^{\otimes n}\big)$ lokal frei vom Rang $(2n-1)(g-1)$.*

Es sei H_g der Funktor der trikanonisch eingebetteten Kurven

$$H_g(S) = \left\{ \begin{array}{l} C \to S \text{ stabile Kurve und ein Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes 3}) \cong \mathbf{P}^{5g-6} \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Völlig analog zum Fall der glatten Kurven erhält man

4.4. Satz. *H_g ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}_{5g-6}}^{P_g(x)}$, *wobei $P_g(x) = (6x-1)(g-1)$ ist.*

Um zu zeigen, daß das Feld der stabilen Kurven algebraisch ist, müssen wir die Automorphismen untersuchen.

Lemma. $\mathrm{Hom}(\Omega, \mathcal{O}_C) = 0$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jedes Vektorfeld D auf C Null ist. D ist eine Derivation $D: \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C$, die man auf die Garbe der meromorphen Funktionen in eindeutiger Weise ausdehnen kann. Es sei $\mathfrak{c}$ der Führer von $\mathcal{O}_{C'}$ nach $\mathcal{O}_C$. Da D eine Derivation ist, folgt $\mathfrak{c}D(\mathcal{O}_C) \subseteq D(\mathfrak{c})\mathcal{O}_{C'} + D(\mathfrak{c})$. Daraus folgt leicht $D(\mathcal{O}_{C'}) \subset \mathcal{O}_{C'}$, Geometrisch bedeutet das, daß die Vektorfelder auf C eineindeutig den Vektorfeldern auf C' entsrpechen, die in den Punkten x_i, y_i verschwinden. Es sei C_i' eine Komponente von C'. Wir unterscheiden drei Fälle

a) $g(C_i') \geqq 2$;

b) $g(C_i') = 1$, D/C_i' verschwindet an mindestens einem Punkt von C_i';

c) $g(C_i') = 0$, D/C_i' verschwindet an drei Punkten von C_i'.

In allen drei Fällen folgt aus dem Satz von Riemann-Roch $D/C_i' = 0$ und damit $D = 0$.

Es seien X und Y Schemata von endlichem Typ über einem Basisschema S und $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ Garben auf X und Y die relativ sehr ampel sind. Wir definieren folgenden Funktor auf der Kategorie der S-Schemata:

$$\mathrm{Isom}_S\big((X, \mathcal{L})(Y, \mathcal{M})\big)(T) = \text{Isomorphismen } f: X_T \to Y_T \text{ mit } f^*\mathcal{M}_T = \mathcal{L}_T.$$

Aus der Theorie der Hilbertschema folgt, daß Isom durch ein quasiprojektives Schema über S repräsentiert wird. Wenn X und Y stabile Kurven sind, so gilt nach Eigenschaft a) der Garbe ω

$$f^*\omega_{Y_T/T} = \omega_{X_T/T}$$

für jeden Isomorphismus f. Also ist $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ in diesem Fall ein quasiprojektives Schema über S.

Wir beweisen jetzt die versprochene Verallgemeinerung von Lemma 2.4.

4.5. Satz. *Es seien X und Y stabile Kurven über einem Schema S. Dann ist* $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ *endlich und unverzweigt über S.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß Isom quasiendlich und unverzweigt ist. Dazu müssen wir beweisen, daß die geometrischen Fasern endlich und reduziert sind. Offenbar sind die geometrischen Fasern leer oder isomorph zu einem Schema der Form $\mathrm{Aut}_k(C)$, wobei C eine stabile Kurve über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist. Nach dem letzten Lemma ist der Tangentialraum von $\mathrm{Aut}_k(C)$ im Punkte id_C Null. Da $\mathrm{Aut}_k(C)$ quasiprojektiv ist, muß es dann ein endliches reduziertes Gruppenschema sein.

Nach einem bekannten Resultat von Chevalley bleibt zu beweisen, daß $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ eigentlich über S ist. Indem wir eine trikanonische Einbettung von X und Y wählen, erhalten wir einen Morphismus $S \to H_g \times H_g$. Nach Basiswechsel können wir annehmen, daß $S = H_g \times H_g$ und daß X und Y die Urbilder der universellen trikanonisch eingebetteten stabilen Kurve über H_g bei den beiden Projektionen von S auf H_g

sind. Mit Hilfe von Sätzen aus GROTHENDIECK [2], Kap. II, zeigt man leicht die folgende Variante des Bewertungskriteriums für eigentliche Morphismen:
Es sei Z ein Schema über S und U eine offene und dichte Teilmenge von Z. Z ist eigentlich über S, wenn für jeden diskreten Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

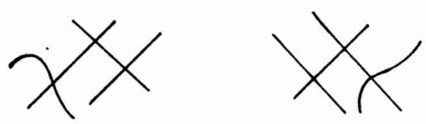
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] & Z \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(V) \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus $\mathrm{Spec}(V) \to Z$ existiert, so daß das resultierende Diagramm kommutativ wird.
Wir zeigen weiter unten, daß H_g^0 dicht in H_g ist. Daraus folgt leicht, daß die offene Teilmenge von $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$, die glatten Kurven entspricht, dicht ist. Folgender Satz zeigt, daß das Bewertungskriterium erfüllt ist.

4.6. Satz. *Es sei V ein diskreter Bewertungsring; s und η seien der spezielle und der allgemeine Punkt von* $\mathrm{Spec}(V)$. *Es seien ferner X und Y stabile Kurven über* $\mathrm{Spec}(V)$, *deren allgemeine Fasern glatt sind. Dann kann man jeden Isomorphismus $\varphi_\eta\colon X_\eta \to Y_\eta$ zu einem Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ erweitern.*

Wir bemerken nachträglich, daß aus 4.5. folgt, daß die Bedingung „X_η und Y_η glatt" überflüssig ist.

Beweis. Da X_s nur gewöhnliche Doppelpunkte hat, haben die Singularitäten von X die Form $x \cdot y = \pi^n$, wobei π ein lokaler Parameter von V ist. Aus der Bedingung „X_η glatt" folgt $n \geqq 1$. Bläst man die Singularitäten auf, so erhält man folgende Konstellation von $n - 1$ projektiven Geraden:



Nach Aufblasung aller Singularitäten von X erhält man daher eine singularitätenfreie Fläche ohne ausgezeichnete Kurven erster Art, also das minimale Modell von X_η. Umgekehrt erhält man X aus dem minimalen Modell in eindeutiger Weise, indem man alle Kurven, die in einer Konstellation der angegebenen Art vorkommen, zusammenbläst. Da $\varphi_\eta\colon X_\eta \to Y_\eta$ einen Isomorphismus der minimalen Modelle induziert, erhält man den gewünschten Isomorphismus $\varphi\colon X \to Y$.

Analog zu 2.4. erhält man aus 4.6.

4.7. Satz. *Das Feld M_g der stabilen Kurven ist algebraisch.*

Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt der Theorie der stabilen Kurven.

4.8. Satz (über stabile Reduktion). *Es sei V ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K, und C sei eine geometrisch irreduzible glatte Kurve über K. Dann existiert eine endliche Erweiterung K' von K und eine stabile Kurve C über dem ganzen Abschluß V' von V in K', deren allgemeine Faser isomorph zu $C \otimes_K K'$ ist.*