Ein Feld $\mathscr{F}$ heißt *algebraisch*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

e) Für alle Objekte S, S' aus $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen von Feldern $\mathscr{C}/S \to \mathscr{F} \leftarrow \mathscr{C}/S'$ gibt es ein Objekt S'' in $\mathscr{C}$ und eine Äquivalenz

$$\mathscr{C}/S \times_{\mathscr{F}} \mathscr{C}S'' \cong \mathscr{C}/S''.$$

Wir bezeichnen $\mathscr{C}/S$ einfach mit S und $\mathscr{C}/S \times_{\mathscr{F}} \mathscr{C}/S''$ mit $S \times_{\mathscr{F}} S''$.

f) Es gibt ein Objekt M in $\mathscr{C}$ und einen surjektiven Etalmorphismus $\mathscr{C}/M \to \mathscr{F}$ (d. h., für alle Objekte S von $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen $\mathscr{C}/S \to \mathscr{F}$ ist $M \times_{\mathscr{F}} S \to S$ surjektiv und etal).

Wenn die Fasern von $\mathscr{F}$ nur die identischen Automorphismen besitzen, heißt $\mathscr{F}$ ein *algebraischer Raum*. Es seien x und x' zwei Schnitte von $\mathscr{F}$ über X. Für ein Schema $T \xrightarrow{\varphi} X$ sei $\mathrm{Isom}_X(X, X')(T)$ die Menge der Isomorphismen von φ^*x mit φ^*x'. Die Bedingung e) besagt, daß für zwei Schnitte $x\colon X \to \mathscr{F}$, $y\colon Y \to \mathscr{F}$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X\times Y}(p_1^*x, p_2^*y)$ repräsentierbar ist.

Theorem (Artin). *Es sei $\mathscr{F}$ ein Feld über der Kategorie $\mathscr{C}$ der S-Schemata (S ein Noethersches Basisschema) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\mathscr{F}$ erfüllt e), und für alle S-Schemata S' aus $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen $S' \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathscr{F}$ ist der Morphismus $\Delta(f, g) \to S'$ quasikompakt, separiert und unverzweigt. Hierbei bezeichnet $\Delta(f, g)$ das S-Schema $S' \times_{S' \times_S S'} (S' \times_{\mathscr{F}} S')$ ($S' \hookrightarrow S' \times S'$ Diagonaleinbettung).*

(ii) *Es existiert ein S-Schema von endlichem Typ und ein glatter surjektiver S-Morphismus $X \to \mathscr{F}$.*

Dann ist $\mathscr{F}$ algebraisch.

Die Eigenschaft (i) bedeutet: Ist $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \times_S \mathscr{F}$ der Diagonalmorphismus und

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F} \times_S \mathscr{F} \\
\mathscr{F} \times_{\mathscr{F} \times_S \mathscr{F}} S' \arrow[u] \arrow[r] & S' \arrow[u, "{(f,g)}"']
\end{tikzcd}$$

Faserproduktdiagramm, so wird der untere Pfeil durch einen quasikompakten, separierten unverzweigten Morphismus von S-Schemata dargestellt.

Bemerkungen. Man kann viele Definitionen und Sätze aus der Kategorie der Schemata auf algebraische Felder übertragen. Wir werden im weiteren solche Übertragungen ohne Beweise benutzen. Mehr Details findet man bei Deligne und Mumford [1] sowie Knutson [1]. Wir hätten in diesem Abschnitt auch die Kategorie der analytischen Räume zugrunde legen können und dann den Begriff des analytischen Feldes erhalten. Ein analytisches Feld ohne nichttriviale Automorphismen in den Fasern ist ein analytischer Raum.

2. Das Feld der algebraischen Kurven

2.1. Definition. Eine *relative Kurve* ist ein eigentlicher, flacher Morphismus von endlicher Darstellung $f\colon X \to S$, dessen geometrische Fasern rein eindimensionale Schemata sind. $f\colon X \to S$ heißt *reduziert, zusammenhängend* oder *glatt* usw., wenn das für jede Faser der Fall ist.

Wir interessieren uns im folgenden für die gefaserte Kategorie aller glatten Kurven von einem festen Geschlecht $g \geqq 2$. Dabei lassen wir als Morphismen nur kartesische Morphismen zu. Wir bezeichnen die Faserung mit M_g^0. Da Kurven nichttriviale Automorphismen besitzen können, kann M_g^0 nicht durch einen algebraischen Raum repräsentierbar sein.
Wir zeigen jedoch, daß M_g^0 ein algebraisches Feld ist. Dazu benutzen wir das Kriterium von ARTIN aus § 1.

2.2. Es sei $\pi: C \to S$ eine glatte Kurve über S. Ist S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers, so haben wir bereits in der Einleitung gesehen, daß $(\Omega^1_{C/S})^{\otimes 3} = \omega^{\otimes 3}_{C/S}$ very ample ist. Im allgemeinen Fall erhält man daraus, daß $\omega^{\otimes r}_{C/S}$ für $r \geqq 3$ relativ sehr ample ist. Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH folgert man, daß $\pi_* \omega^{\otimes r}_{C/S}$ lokal frei ist und das Hilbertpolynom $P(x) = (2rx - 1)(g - 1)$ besitzt.

2.3. Wir können jetzt den Funktor der r-kanonisch eingebetteten Kurven definieren. Für ein Schema S ist $H^0_{r,g}(S)$ die Menge aller glatten, irreduziblen, relativen Kurven $C \hookrightarrow \mathbf{P}^n_S \to S$ $\big(n = (2r - 1)(g - 1) - 1\big)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die invertierbare Garbe, die durch $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ auf C induziert wird, ist isomorph zu $\omega^{\otimes r} \otimes \pi^* L$, wobei L eine geeignete Garbe auf S ist.

(ii) Es sei $\alpha: \mathbf{P}^n_S \to S$ der Strukturmorphismus. Der kanonische Homomorphismus $\alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \to \pi_*(\omega^r) \otimes_{\mathcal{O}_S} L$ ist ein Isomorphismus.

Äquivalent läßt sich der Funktor $H^0_{g,r}$ auch wie folgt beschreiben:

$$H^0_{r,g}(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{glatte irreduzible Kurven } C \to S \\ \text{zusammen mit einem Isomorphismus} \\ \mathbf{P}^n_S = \mathbf{P}\big(\omega^{\otimes r}_{C/S}\big), \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Es gilt der folgende nicht sehr schwere Satz

2.4. Satz. *$H^0_{r,g}$ ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}^{P(x)}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Z}}}$ *und glatt über* Spec $(\mathbf{Z})$.

2.5. Satz. *M_g^0 ist ein algebraisches Feld über* Spec $(\mathbf{Z})$.

Wir benutzen Theorem aus § 1. Die Bedingung (i) folgt, wenn wir zeigen, daß $M_g^0 \to M_g^0 \times M_g^0$ darstellbar, endlich und unverzweigt ist. Nach § 1 bedeutet das, daß für zwei Schnitte $x: X \to M_g^0$, $y: Y \to M_g^0$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X \times Y}(p_1^* x, p_2^* y)$ repräsentierbar durch ein endliches unverzweigtes Schema über $X \times Y$ ist. Das ergibt sich unmittelbar aus folgendem Lemma, das wir in Abschnitt 4.2. über stabile Kurven in einer allgemeineren Form beweisen werden.

Lemma. *Es seien C_1 und C_2 zwei glatte irreduzible Kurven über S. Die Garbe* $\mathrm{Isom}_S(C_1, C_2)$ *wird durch ein endliches unverzweigtes S-Schema repräsentiert.*

Die Bedingung (ii) von § 1 folgt, wenn wir zeigen, daß der Vergißfunktor $H^0_{r,g} \to M^0_g$ darstellbar glatt und surjektiv ist. Ist $j: S \to M_g^0$ ein Schnitt, so ist $H^0_{r,g} \times_{M_g^0} S$ der Funktor der Isomorphismen des $\mathbf{P}^n_S$ mit dem $\mathbf{P}\big(\omega^{\otimes r}_{C/S}\big)$, wobei C die Kurve ist, die dem Morphismus j entspricht. Daraus erhalten wir das gewünschte Resultat.

2.6. Man kann aus $H^0_{r,g}$ das Feld der algebraischen Kurven zurückgewinnen. Dazu bemerken wir, daß die Gruppe $PGL(k)$ auf dem Hilbertschema und folglich auf $H^0_{r,g}$ operiert.