surjektiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $H^1(\mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y\omega_C^{\otimes 3}) = 0$ ist. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist die letzte Gruppe dual zu $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1})$. Der Grad von $\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}$ ist $-4g + 6$, da $\deg \omega_C = 2g - 2$ ist. Wegen $-4g + 6 < 0$ für $g \geqq 2$ folgt $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}) = 0$ und damit die Bedingungen a), b) und c).
Eine Kurve C vom Geschlecht $g \geqq 2$ mit einem Isomorphismus $\mathbf{P}(H^0(\omega_C^{\otimes 3})) \cong \mathbf{P}_k^{5g-6}$ nennt man eine *trikanonisch eingebettete Kurve*. Die Menge $H_g^0(k)$ der Isomorphieklassen trikanonisch eingebetteter Kurven ist eine lokal abgeschlossene Menge im Hilbertschema und ist deshalb die Menge der k-rationalen Punkte eines Schemas $H_{g\,k}^0$. Vergleichen wir die Betrachtungen mit denen für elliptische Kurven, so sind wir jetzt an der Stelle, wo wir gesehen haben, daß es zu jeder elliptischen Kurve eine Weierstraßsche Normalform gibt, die von zwei Parametern abhängt.
Es seien (C, φ), (C', φ') zwei trikanonisch eingebettete Kurven. Offenbar ist C genau dann isomorph zu C', wenn ein Isomorphismus $\tau \in PGL(5g - 6)$ existiert, so daß $\tau \circ \varphi = \varphi'$ ist. Daraus folgt, daß die Punkte der Menge $H_g^0(k)/PGL(5g - 6)$ auf natürliche Weise bijektiv den Isomorphieklassen von glatten Kurven vom Geschlecht g entsprechen. Wenn man dann zeigen kann, daß der Quotient $H_g^0/GL(5g - 6)$ in einem geeigneten Sinne in der Kategorie der algebraischen Schemata existiert, so erhält man das grobe Modulschema der glatten Kurven vom Geschlecht g (Mumford [4]). Man kann direkt oder mit Hilfe der Deformationstheorie zeigen, daß $H_{g,k}^0$ glatt ist und $M_{g,k}^0$ normal und von der Dimension $3g - 3$. Von Deligne und Mumford [1] wurde zuerst bewiesen, daß der Raum $M_{g,k}^0$ zusammenhängend ist. Daß $M_{g,k}^0$ normal ist, folgt daraus, daß der Raum auch irreduzibel ist.
Wenn $k = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist, kann man das zeigen, indem man beweist, daß der klassische Teichmüllerraum eine Überlagerung von $M_{g,\mathbf{C}}^0$ ist. Für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper erhält man das Resultat folgendermaßen.
Man konstruiert ein Schema $M_g^0 \xrightarrow{\pi^0} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, dessen geometrische Fasern die Schemata $M_{g,k}^0$ sind. Da $M_{g,\mathbf{C}}^0$ zusammenhängend ist, ist auch die allgemeine Faser von π^0 geometrisch zusammenhängend.
Wäre π^0 eigentlich, so folgte nach dem Zusammenhangssatz von Zariski, daß alle geometrischen Fasern zusammenhängend sind. Leider kann man leicht sehen, daß π^0 nicht eigentlich sein kann.
Um die Beweisidee trotzdem verwirklichen zu können, konstruiert man durch Adjunktion gewisser singulärer Kurven einen eigentlichen Morphismus $\pi\colon M_g \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ dessen geometrische Fasern $M_{g,k}^0$ als offene dichte Unterräume enthalten. M_g nennt man auch eine *Kompaktifizierung* von M_g^0. Auf $M_g \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ kann man jetzt den Zusammenhangssatz von Zariski anwenden und erhält das gewünschte Resultat.

1. Gefaserte Gruppoide, Felder

Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie von Schemata. Unter einem gefaserten Gruppoid über $\mathscr{C}$ verstehen wir eine Kategorie $\mathscr{F}$ und einen Funktor $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$, für die folgendes gilt:
a) Für jeden Morphismus $S' \xrightarrow{\varphi'} S$ in $\mathscr{C}$ und jedes Objekt X in $\mathscr{F}$ mit $p(X) = S$ gibt es eine Liftung $\Phi'\colon X' \to X$ von φ' in $\mathscr{F}$.
b) Ist in $\mathscr{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ & S \\ S'' \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

gegeben und in $\mathscr{F}$ Liftungen $X' \xrightarrow{\Phi'} X \xleftarrow{\Phi''} X''$ von φ, so läßt sich das ganze Diagramm (1) zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "\Phi'"] & \\ & X \\ X'' \arrow[uu, "\Psi"] \arrow[ur, "\Phi''"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

liften.

Hieraus folgt leicht: Alle Morphismen Φ in $\mathscr{F}$ mit $p(\Phi) = 1$ sind Isomorphismen in $\mathscr{F}$. Mit $\mathscr{F}(S)$ bezeichnen wir das Gruppoid der Morphismen über 1_S und Objekte über S.

Wir setzen jetzt weiterhin voraus, daß in $\mathscr{C}$ Faserprodukte mit Etalmorphismen $S' \to S$ existieren. Ein gefasertes Gruppoid heißt ein *Feld über* $\mathscr{C}$, wenn noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

c) Für je zwei Objekte X_1, X_2 aus $\mathscr{F}(S)$ ist der Kofunktor

$$\begin{aligned} &\operatorname{Isom}(X_1, X_2) \colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{opp}} \to (\mathscr{E}ns), \\ &(S' \to S) \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(S')}(\varphi^* X_1, \varphi^* X_2) \end{aligned}$$

eine Etalgarbe. (Hierbei bezeichnet $\varphi^* X_1$ ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Objekt aus $\mathscr{F}$, so daß eine Liftung $\varphi^* X_1 \xrightarrow{\Phi} X_1$ von φ existiert).

d) Jedes Abstiegsdatum in $\mathscr{F}$ bezüglich einer Etalüberdeckung $(S_\alpha \to S)$ in $\mathscr{C}$ ist effektiv.

Explizit bedeutet das: Ist $S_{\alpha\beta} = S_\alpha \times_S S_\beta$, $S_{\alpha,\beta,\gamma} = S_\alpha \times_S S_\beta \times_S S_\gamma$

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\alpha,\beta,\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} \arrow[r, shift left=2, "p_{12}"] \arrow[r, "p_{23}"] \arrow[r, shift right=2, "p_{13}"'] & \coprod\limits_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} \arrow[r, shift left=1, "p_1"] \arrow[r, shift right=1, "p_2"'] & \coprod\limits_{\alpha} S_\alpha \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

(p_{mn} die Projektion auf den n-ten und m-ten Faktor und p_n die Projektion auf den n-ten Faktor), so ist ein Abstiegsdatum ein Objekt Y aus $\prod_\alpha \mathscr{F}(S_\alpha)$ und ein Isomorphismus $i\colon p_1^* Y \simeq p_2^* Y$, so daß $p_{12}^*(i)\, p_{23}^*(i) = p_{13}^*(i)$ ist.

Die Bedingungen c) und d) besagen, daß die Kategorie aller Abstiegsdaten bezüglich einer Überdeckung von S äquivalent zur Kategorie $\mathscr{F}(S)$ ist.

Die Klasse aller Felder über $\mathscr{C}$ bildet eine 2-Kategorie und wir definieren das Faserprodukt $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ von 1-Morphismen (Funktoren über $\mathscr{C}$) $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xleftarrow{g} \mathscr{F}_2$ wie folgt: Die Objekte von $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ sind Tripel

$$\begin{aligned} &(X_1, X_2, \Phi), \quad X_i \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}_i,\ p_1(X_1) = p_2(X_2),\ \Phi\colon f(X_1) \xrightarrow{\sim} g(X_2), \\ &\text{mit} \quad p(\Phi) = 1. \end{aligned}$$

Die Morphismen sind Paare

$$\begin{aligned} &(X_1, X_2, \Phi) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (Y_1, Y_2, \Psi), \\ &\alpha_i\colon X_i \to Y_i \text{ Morphismus in } \mathscr{F}_i \qquad (i = 1, 2), \\ &p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_2) \quad \text{und} \quad \Psi \circ f(\alpha_1) = g(\alpha_2) \circ \Phi. \end{aligned}$$

Beispiele von gefaserten Kategorien sind die Kategorien $\mathscr{C}/S$ der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel S (S Objekt von $\mathscr{C}$); $p\colon \mathscr{C}/S \to \mathscr{C}$ ordnet jedem Morphismus $S' \to S$ seinen „Start“ S' zu.