IV. Globale Moduln von Kurven

0. Einleitung

Klassisch versteht man unter den Moduln der algebraischen Kurven gewisse Parameter, deren Werte eineindeutig den Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht g entsprechen.

Genauer und allgemeiner hat MUMFORD dieses Problem formuliert. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Gesucht ist ein algebraisches Schema über k, dessen k-rationale Punkte $M(k)$ umkehrbar eindeutig Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht g entsprechen. Damit die Frage vernünftig wird, muß man noch eine Forderung an die algebraische Struktur von M stellen. Es sei dazu S das Parameterschema einer Familie algebraischer Kurven. Man fordert, daß die Abbildung, die jedem Punkt $s \in S(k)$ den Punkt von $M(k)$ zuordnet, der zu der Klasse gehört, die dem Parameterwert s entspricht, algebraisch ist. Den resultierenden Morphismus $j\colon S \to M$ nennt man die *Invariante* der Familie von Kurven. Verlangt man noch, daß j universell ist (siehe 3.6.), so ist M durch diese Forderungen eindeutig bestimmt. Man nennt M auch den *groben Modulraum* der Kurven vom Geschlecht g.

Es sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geqq 2$ über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k, ω_C die Garbe der regulären Differentialformen auf C. Wir wollen beweisen, daß $\omega_C^{\otimes 3}$ „very ample" ist, d. h., die globalen Schnitte von $\omega_C^{\otimes 3}$ definieren eine abgeschlossene Einbettung $C \to \mathbf{P}\big(H^0(\omega_C^{\otimes 3})\big)$. Dazu müssen wir zeigen, daß $C \to \mathbf{P}\big(H^0(\omega_C^{\otimes 3})\big)$ a) definiert, b) injektiv und c) in den Tangentialräumen injektiv ist.

Bedingung a) bedeutet, daß für alle $x \in C$ ein $\eta \in H^0(\omega_C^{\otimes 3})$ existiert, so daß $\eta(x) \neq 0$ oder anders ausgedrückt $H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0\big(k(x)\big)$ surjektiv ist.

Bedingung b) bedeutet, daß für alle $x, y \in C$, $x \neq y$ ein $\eta \in H^0(\omega_C^{\otimes 3})$ existiert mit $\eta(x) = 0$ und $\eta(y) \neq 0$, oder $H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0\big(k(x)\big) \oplus H^0\big(k(y)\big)$ ist surjektiv.

Bedingung c) bedeutet, daß $H^0(\mathfrak{m}_x\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_x^2 \otimes \omega_C^{\otimes 3})$ surjektiv ist, wobei $\mathfrak{m}_x$ die Idealgarbe der Funktionen bezeichnet, die in x verschwinden.

a), b) und c) kann man wie folgt zusammenfassen: Für zwei beliebige Punkte $x, y \in C$ ist

$$H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y)$$

surjektiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $H^1(\mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y\omega_C^{\otimes 3}) = 0$ ist. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist die letzte Gruppe dual zu $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1})$. Der Grad von $\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}$ ist $-4g + 6$, da $\deg \omega_C = 2g - 2$ ist. Wegen $-4g + 6 < 0$ für $g \geqq 2$ folgt $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}) = 0$ und damit die Bedingungen a), b) und c). Eine Kurve C vom Geschlecht $g \geqq 2$ mit einem Isomorphismus $\mathbf{P}(H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \cong \mathbf{P}_k^{5g-6}$ nennt man eine *trikanonisch eingebettete Kurve*. Die Menge $H_g^0(k)$ der Isomorphieklassen trikanonisch eingebetteter Kurven ist eine lokal abgeschlossene Menge im Hilbertschema und ist deshalb die Menge der k-rationalen Punkte eines Schemas $H^0_{g\,k}$. Vergleichen wir die Betrachtungen mit denen für elliptische Kurven, so sind wir jetzt an der Stelle, wo wir gesehen haben, daß es zu jeder elliptischen Kurve eine Weierstraßsche Normalform gibt, die von zwei Parametern abhängt.

Es seien (C, φ), (C', φ') zwei trikanonisch eingebettete Kurven. Offenbar ist C genau dann isomorph zu C', wenn ein Isomorphismus $\tau \in PGL(5g - 6)$ existiert, so daß $\tau \circ \varphi = \varphi'$ ist. Daraus folgt, daß die Punkte der Menge $H_g^0(k)/PGL(5g - 6)$ auf natürliche Weise bijektiv den Isomorphieklassen von glatten Kurven vom Geschlecht g entsprechen. Wenn man dann zeigen kann, daß der Quotient $H_g^0/GL(5g - 6)$ in einem geeigneten Sinne in der Kategorie der algebraischen Schemata existiert, so erhält man das grobe Modulschema der glatten Kurven vom Geschlecht g (Mumford [4]). Man kann direkt oder mit Hilfe der Deformationstheorie zeigen, daß $H^0_{g,k}$ glatt ist und $M^0_{g,k}$ normal und von der Dimension $3g - 3$. Von Deligne und Mumford [1] wurde zuerst bewiesen, daß der Raum $M^0_{g,k}$ zusammenhängend ist. Daß $M^0_{g,k}$ normal ist, folgt daraus, daß der Raum auch irreduzibel ist.

Wenn $k = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist, kann man das zeigen, indem man beweist, daß der klassische Teichmüllerraum eine Überlagerung von $M^0_{g,\mathbf{C}}$ ist. Für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper erhält man das Resultat folgendermaßen. Man konstruiert ein Schema $M_g^0 \xrightarrow{\pi^0} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, dessen geometrische Fasern die Schemata $M^0_{g,k}$ sind. Da $M^0_{g,\mathbf{C}}$ zusammenhängend ist, ist auch die allgemeine Faser von π^0 geometrisch zusammenhängend.

Wäre π^0 eigentlich, so folgte nach dem Zusammenhangssatz von Zariski, daß alle geometrischen Fasern zusammenhängend sind. Leider kann man leicht sehen, daß π^0 nicht eigentlich sein kann.

Um die Beweisidee trotzdem verwirklichen zu können, konstruiert man durch Adjunktion gewisser singulärer Kurven einen eigentlichen Morphismus $\pi\colon M_g \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ dessen geometrische Fasern $M^0_{g,k}$ als offene dichte Unterräume enthalten. M_g nennt man auch eine *Kompaktifizierung* von M_g^0. Auf $M_g \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ kann man jetzt den Zusammenhangssatz von Zariski anwenden und erhält das gewünschte Resultat.

1. Gefaserte Gruppoide, Felder

Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie von Schemata. Unter einem gefaserten Gruppoid über $\mathscr{C}$ verstehen wir eine Kategorie $\mathscr{F}$ und einen Funktor $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$, für die folgendes gilt:

a) Für jeden Morphismus $S' \xrightarrow{\varphi'} S$ in $\mathscr{C}$ und jedes Objekt X in $\mathscr{F}$ mit $p(X) = S$ gibt es eine Liftung $\Phi'\colon X' \to X$ von φ' in $\mathscr{F}$.

b) Ist in $\mathscr{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ & S \\ S'' \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

gegeben und in $\mathscr{F}$ Liftungen $X' \xrightarrow{\Phi'} X \xleftarrow{\Phi''} X''$ von φ, so läßt sich das ganze Diagramm (1) zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "\Phi'"] & \\ & X \\ X'' \arrow[uu, "\Psi"] \arrow[ur, "\Phi''"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

liften.

Hieraus folgt leicht: Alle Morphismen Φ in $\mathscr{F}$ mit $p(\Phi) = 1$ sind Isomorphismen in $\mathscr{F}$. Mit $\mathscr{F}(S)$ bezeichnen wir das Gruppoid der Morphismen über 1_S und Objekte über S.

Wir setzen jetzt weiterhin voraus, daß in $\mathscr{C}$ Faserprodukte mit Etalmorphismen $S' \to S$ existieren. Ein gefasertes Gruppoid heißt ein *Feld über* $\mathscr{C}$, wenn noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

c) Für je zwei Objekte X_1, X_2 aus $\mathscr{F}(S)$ ist der Kofunktor

$$\mathrm{Isom}\,(X_1, X_2) \colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{opp}} \to (\mathscr{E}ns),$$

$$(S' \to S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(S')}(\varphi^* X_1, \varphi^* X_2)$$

eine Etalgarbe. (Hierbei bezeichnet $\varphi^* X_1$ ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Objekt aus $\mathscr{F}$, so daß eine Liftung $\varphi^* X_1 \xrightarrow{\Phi} X_1$ von φ existiert).

d) Jedes Abstiegsdatum in $\mathscr{F}$ bezüglich einer Etalüberdeckung $(S_\alpha \to S)$ in $\mathscr{C}$ ist effektiv.

Explizit bedeutet das: Ist $S_{\alpha\beta} = S_\alpha \times_S S_\beta$, $S_{\alpha,\beta,\gamma} = S_\alpha \times_S S_\beta \times_S S_\gamma$

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\alpha,\beta,\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} \arrow[r, shift left=2, "p_{12}"] \arrow[r, "p_{23}"] \arrow[r, shift right=2, "p_{13}"'] & \coprod\limits_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & \coprod\limits_{\alpha} S_\alpha \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

(p_{mn} die Projektion auf den n-ten und m-ten Faktor und p_n die Projektion auf den n-ten Faktor), so ist ein Abstiegsdatum ein Objekt Y aus $\prod\limits_\alpha \mathscr{F}(S_\alpha)$ und ein Isomorphismus $i \colon p_1^* Y \cong p_2^* Y$, so daß $p_{12}^*(i)\, p_{23}^*(i) = p_{13}^*(i)$ ist.

Die Bedingungen c) und d) besagen, daß die Kategorie aller Abstiegsdaten bezüglich einer Überdeckung von S äquivalent zur Kategorie $\mathscr{F}(S)$ ist.

Die Klasse aller Felder über $\mathscr{C}$ bildet eine 2-Kategorie und wir definieren das Faserprodukt $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ von 1-Morphismen (Funktoren über $\mathscr{C}$) $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xleftarrow{g} \mathscr{F}_2$ wie folgt: Die Objekte von $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ sind Tripel

$$(X_1, X_2, \Phi), \quad X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}_i,\ p_1(X_1) = p_2(X_2),\ \Phi \colon f(X_1) \xrightarrow{\sim} g(X_2),$$
$$\text{mit} \quad p(\Phi) = 1.$$

Die Morphismen sind Paare

$$(X_1, X_2, \Phi) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (Y_1, Y_2, \Psi),$$

$$\alpha_i \colon X_i \to Y_i \text{ Morphismus in } \mathscr{F}_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_2) \quad \text{und} \quad \Psi \circ f(\alpha_1) = g(\alpha_2) \circ \Phi.$$

Beispiele von gefaserten Kategorien sind die Kategorien $\mathscr{C}/S$ der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel S (S Objekt von $\mathscr{C}$); $p \colon \mathscr{C}/S \to \mathscr{C}$ ordnet jedem Morphismus $S' \to S$ seinen „Start" S' zu.

Ein Feld $\mathscr{F}$ heißt *algebraisch*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

e) Für alle Objekte S, S' aus $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen von Feldern $\mathscr{C}/S \to \mathscr{F} \leftarrow \mathscr{C}/S'$ gibt es ein Objekt S'' in $\mathscr{C}$ und eine Äquivalenz

$$\mathscr{C}/S \times_{\mathscr{F}} \mathscr{C}S'' \cong \mathscr{C}/S''.$$

Wir bezeichnen $\mathscr{C}/S$ einfach mit S und $\mathscr{C}/S \times_{\mathscr{F}} \mathscr{C}/S''$ mit $S \times_{\mathscr{F}} S''$.

f) Es gibt ein Objekt M in $\mathscr{C}$ und einen surjektiven Etalmorphismus $\mathscr{C}/M \to \mathscr{F}$ (d. h., für alle Objekte S von $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen $\mathscr{C}/S \to \mathscr{F}$ ist $M \times_{\mathscr{F}} S \to S$ surjektiv und etal).

Wenn die Fasern von $\mathscr{F}$ nur die identischen Automorphismen besitzen, heißt $\mathscr{F}$ ein *algebraischer Raum*. Es seien x und x' zwei Schnitte von $\mathscr{F}$ über X. Für ein Schema $T \xrightarrow{\varphi} X$ sei $\mathrm{Isom}_X(X, X')(T)$ die Menge der Isomorphismen von $\varphi^* x$ mit $\varphi^* x'$. Die Bedingung e) besagt, daß für zwei Schnitte $x\colon X \to \mathscr{F}$, $y\colon Y \to \mathscr{F}$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X \times Y}(p_1^* x, p_2^* y)$ repräsentierbar ist.

Theorem (Artin). *Es sei $\mathscr{F}$ ein Feld über der Kategorie $\mathscr{C}$ der S-Schemata (S ein Noethersches Basisschema) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\mathscr{F}$ erfüllt e), und für alle S-Schemata S' aus $\mathscr{C}$ und 1-Morphismen $S' \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathscr{F}$ ist der Morphismus $\Delta(f, g) \to S'$ quasikompakt, separiert und unverzweigt. Hierbei bezeichnet $\Delta(f, g)$ das S-Schema $S' \times_{S' \times_S S'} (S' \times_{\mathscr{F}} S')$ ($S' \hookrightarrow S' \times S'$ Diagonaleinbettung).*

(ii) *Es existiert ein S-Schema von endlichem Typ und ein glatter surjektiver S-Morphismus $X \to \mathscr{F}$.*

Dann ist $\mathscr{F}$ algebraisch.

Die Eigenschaft (i) bedeutet: Ist $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \times_S \mathscr{F}$ der Diagonalmorphismus und

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F} \times_S \mathscr{F} \\ \mathscr{F} \times_{\mathscr{F} \times_S \mathscr{F}} S' \arrow[u] \arrow[r] & S' \arrow[u, "{(f,g)}"'] \end{tikzcd}$$

Faserproduktdiagramm, so wird der untere Pfeil durch einen quasikompakten, separierten unverzweigten Morphismus von S-Schemata dargestellt.

Bemerkungen. Man kann viele Definitionen und Sätze aus der Kategorie der Schemata auf algebraische Felder übertragen. Wir werden im weiteren solche Übertragungen ohne Beweise benutzen. Mehr Details findet man bei Deligne und Mumford [1] sowie Knutson [1]. Wir hätten in diesem Abschnitt auch die Kategorie der analytischen Räume zugrunde legen können und dann den Begriff des analytischen Feldes erhalten. Ein analytisches Feld ohne nichttriviale Automorphismen in den Fasern ist ein analytischer Raum.

2. Das Feld der algebraischen Kurven

2.1. Definition. Eine *relative Kurve* ist ein eigentlicher, flacher Morphismus von endlicher Darstellung $f\colon X \to S$, dessen geometrische Fasern rein eindimensionale Schemata sind. $f\colon X \to S$ heißt *reduziert*, *zusammenhängend* oder *glatt* usw., wenn das für jede Faser der Fall ist.

Wir interessieren uns im folgenden für die gefaserte Kategorie aller glatten Kurven von einem festen Geschlecht $g \geqq 2$. Dabei lassen wir als Morphismen nur kartesische Morphismen zu. Wir bezeichnen die Faserung mit M_g^0. Da Kurven nichttriviale Automorphismen besitzen können, kann M_g^0 nicht durch einen algebraischen Raum repräsentierbar sein.
Wir zeigen jedoch, daß M_g^0 ein algebraisches Feld ist. Dazu benutzen wir das Kriterium von ARTIN aus § 1.

2.2. Es sei $\pi: C \to S$ eine glatte Kurve über S. Ist S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers, so haben wir bereits in der Einleitung gesehen, daß $(\Omega_{C/S}^1)^{\otimes 3} = \omega_{C/S}^{\otimes 3}$ very ample ist. Im allgemeinen Fall erhält man daraus, daß $\omega_{C/S}^{\otimes r}$ für $r \geqq 3$ relativ sehr ample ist. Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH folgert man, daß $\pi_* \omega_{C/S}^{\otimes r}$ lokal frei ist und das Hilbertpolynom $P(x) = (2rx - 1)(g - 1)$ besitzt.

2.3. Wir können jetzt den Funktor der r-kanonisch eingebetteten Kurven definieren. Für ein Schema S ist $H_{r,g}^0(S)$ die Menge aller glatten, irreduziblen, relativen Kurven $C \hookrightarrow \mathbf{P}_S^n \to S\ \big(n = (2r - 1)(g - 1) - 1\big)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die invertierbare Garbe, die durch $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ auf C induziert wird, ist isomorph zu $\omega^{\otimes r} \otimes \pi^* L$, wobei L eine geeignete Garbe auf S ist.

(ii) Es sei $\alpha: \mathbf{P}_S^n \to S$ der Strukturmorphismus. Der kanonische Homomorphismus $\alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \to \pi_*(\omega^r) \otimes_{\mathcal{O}_S} L$ ist ein Isomorphismus.

Äquivalent läßt sich der Funktor $H_{g,r}^0$ auch wie folgt beschreiben:

$$H_{r,g}^0(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{glatte irreduzible Kurven } C \to S \\ \text{zusammen mit einem Isomorphismus} \\ \mathbf{P}_S^n = \mathbf{P}\big(\omega_{C/S}^{\otimes r}\big), \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Es gilt der folgende nicht sehr schwere Satz

2.4. **Satz.** *$H_{r,g}^0$ ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}^{P(x)}$ *und glatt über* Spec $(\mathbf{Z})$.

2.5. **Satz.** *M_g^0 ist ein algebraisches Feld über* Spec $(\mathbf{Z})$.

Wir benutzen Theorem aus § 1. Die Bedingung (i) folgt, wenn wir zeigen, daß $M_g^0 \to M_g^0 \times M_g^0$ darstellbar, endlich und unverzweigt ist. Nach § 1 bedeutet das, daß für zwei Schnitte $x: X \to M_g^0$, $y: Y \to M_g^0$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X \times Y}(p_1^* x, p_2^* y)$ repräsentierbar durch ein endliches unverzweigtes Schema über $X \times Y$ ist. Das ergibt sich unmittelbar aus folgendem Lemma, das wir in Abschnitt 4.2. über stabile Kurven in einer allgemeineren Form beweisen werden.

Lemma. *Es seien C_1 und C_2 zwei glatte irreduzible Kurven über S. Die Garbe* $\mathrm{Isom}_S(C_1, C_2)$ *wird durch ein endliches unverzweigtes S-Schema repräsentiert.*

Die Bedingung (ii) von § 1 folgt, wenn wir zeigen, daß der Vergißfunktor $H_{r,g}^0 \to M_g^0$ darstellbar glatt und surjektiv ist. Ist $j: S \to M_g^0$ ein Schnitt, so ist $H_{r,g}^0 \times_{M_g^0} S$ der Funktor der Isomorphismen des $\mathbf{P}_S^n$ mit dem $\mathbf{P}\big(\omega_{C/S}^{\otimes r}\big)$, wobei C die Kurve ist, die dem Morphismus j entspricht. Daraus erhalten wir das gewünschte Resultat.

2.6. Man kann aus $H_{r,g}^0$ das Feld der algebraischen Kurven zurückgewinnen. Dazu bemerken wir, daß die Gruppe $PGL(k)$ auf dem Hilbertschema und folglich auf $H_{r,g}^0$ operiert.

Es sei G eine glatte algebraische Gruppe von endlicher Darstellung über einem Basisschema S, weiter sei T ein S-Schema. Mit G_T bezeichnen wir die Gruppe $G \times_S T$. Ein Morphismus $p: E \to T$ heißt ein *prinzipalhomogener Raum*, wenn G_T auf E operiert und der Morphismus $G_T \times_T E \to E \times_T E$ ein Isomorphismus ist. Ist E im Sinne der Etaltopologie lokal isomorph zum prinzipalhomogenen Raum G_T, so nennen wir E *isotrivial*.

Es sei X ein S-Schema, auf dem G operiert. Wir definieren das klassifizierende Feld $[X/G]$. Die Kategorie der Schnitte dieses Feldes über einem S-Schema T ist die Kategorie der isotrivialen prinzipalhomogenen Räume $E \to T$, versehen mit einem G-Morphismus $E \to X$. Wir wollen diesen Begriff veranschaulichen. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $[X/G]_k$ die Kategorie der Schnitte von X/G über Spec (k). Da alle isotrivialen prinzipalhomogenen Räume über Spec (k) trivial sind, ist $[X/G]_k$ äquivalent zur Kategorie der G-Morphismen $G_k \to X$. Ein solcher Morphismus ist durch das Bild des Einselementes $1 \in G_k(k)$ in $X(k)$ eindeutig bestimmt. Offenbar sind zwei G-Morphismen $G_k \to X$ genau dann isomorph in $[X/G]_k$, wenn die entsprechenden Punkte in $X(k)$ im gleichen Orbit liegen. Die Isomorphieklassen von Objekten von $[X/G]_k$ entsprechen folglich bijektiv den Orbits von $X(k)$ unter der Wirkung von $G(k)$. Die Automorphismengruppen von Objekten entsprechen dabei den Stabilisatoren. Der prinzipalhomogene Raum $G \times_S X \xrightarrow{\mathrm{proj}} X$ versehen mit dem G-Morphismus $G \times_S X \xrightarrow{\mu} X$, der die Operation von G auf X definiert, entspricht einem Morphismus $q: X \to [X/G]$.

Das Faserprodukt von q mit einem Schnitt $T \to [X/G]$ ist offenbar das durch diesen Schnitt definierte Bündel $E \to T$. Der Morphismus q ist damit glatt und surjektiv. Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß $[X/G] \to [X/G] \times_S [X/G]$ der Bedingung (i) von § 1 genügt, wenn $G \times X \to X \times X$ quasikompakt, separiert und unverzweigt ist.

Man kann leicht zeigen, daß das klassifizierende Feld genau dann darstellbar ist, wenn $X/G = Y$ in der Kategorie der Schemata existiert und $X \to Y$ ein prinzipalhomogener Raum unter der Gruppe G ist.

Wie wir bereits in der Einleitung gesehen haben, ist eine Hauptschwierigkeit bei der Lösung von Modulproblemen die Bildung des Quotienten nach der Wirkung einer algebraischen Gruppe. Aus der Bemerkung erkennen wir, daß das Problem in der Kategorie der algebraischen Felder unter sehr schwachen Voraussetzungen eine Lösung hat. Es sei jetzt $C \to S$ eine glatte irreduzible Kurve vom Geschlecht g. Dem projektiven Bündel $\mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes x})$ entspricht ein prinzipalhomogener Raum $E \to S$ mit der Strukturgruppe $PGL(n)$. Durch Basiswechsel erhalten wir eine Kurve $C_E \xrightarrow{\pi'} E$. Da das Bündel $\mathbf{P}(\pi'_* \omega_{C_E/E}^{\otimes r})$ isomorph zu $p^* \mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes r})$ ist, erhalten wir eine kanonische Trivialisierung $\mathbf{P}(\pi'_* \omega_{C_E/E}^{\otimes r}) \cong \mathbf{P}^n$. Daher wird C_E durch einen eindeutig bestimmten Morphismus $E \to H_{r,g}^0$ induziert. Auf diese Weise erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Feld M_g^0 und dem klassifizierenden Feld $[H_{r,g}^0/PGL(n)]$.

3. Modulräume algebraischer Kurven

3.1. Definition. Es sei γ eine abstrakte Gruppe. Weiter sei $P: C/S \to P(C/S)$ ein Funktor aus der Kategorie der glatten irreduziblen Kurven C über S in die Kategorie der prinzipalhomogenen Räume über S mit der Gruppe γ, der mit Basiswechsel verträglich ist. P heißt *rigid*, wenn jeder Automorphismus einer Kurve C/S, der die Identität auf $P(C/S)$ induziert, trivial ist.

3.2. Definition. Es sei P ein rigider Funktor. Eine P-Kurve ist eine glatte irreduzible Kurve $C \to S$, zusammen mit einem Schnitt des Bündels $P(C/S)$.

3.3. Beispiele.

3.3.1. $p: C \to S$ sei eine glatte Kurve und k eine natürliche Zahl, die in $\mathcal{O}_S$ invertierbar ist. Dann ist $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ eine lokal konstante Etalgarbe mit der typischen Faser $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$. Das Cupprodukt definiert eine perfekte Paarung

$$R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \times R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \to R^2p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \cong \mu_k^{-1}.$$

Diese Paarung ist wohlbekannt aus der Theorie der abelschen Mannigfaltigkeiten. Es sei $\mathrm{Pic}^0_{C/S}$ die Picardgruppe der Kurve C. Der kanonische Morphismus $C \to \mathrm{Pic}^0_{C/S}$ definiert eine Polarisierung des abelschen Schemas $\mathrm{Pic}^0_{C/S}$, d. h. eine Abbildung $\mathrm{Pic}^0_{C/S} \xrightarrow{\Phi} = \widehat{\mathrm{Pic}^0_{C/S}}$ in das duale abelsche Schema.
Es sei ${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S})$ die Garbe der k-Teilungspunkte. Nach der Kummerschen Theorie hat man einen kanonischen Isomorphismus

$${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \cong R^1p_*\mu_k \cong (R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \otimes \mu_k.$$

Die angegebene Paarung erhält man aus der zu Φ assoziierten Riemannschen Form ${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \times_k (\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \to \mu_k$ durch Tensorierung mit μ_k^{-2} (siehe MUMFORD [4]).
Es sei jetzt $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g} \times (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g} \xrightarrow{\langle,\rangle} \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ eine beliebige nicht ausgeartete alternierende Bilinearform. Man sieht leicht, daß eine Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \gamma_1', \ldots, \gamma_g'$ von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ existiert, so daß $\langle\gamma_i, \gamma_j'\rangle = \delta_{ij}$, $\langle\gamma_i, \gamma_j\rangle = 0$, $\langle\gamma_i', \gamma_j'\rangle = 0$ ist. Diejenige Bilinearform, die der kanonischen Basis von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ entspricht, nennen wir die *kanonische symplektische Struktur*.
Wenn die Garben $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ und μ_k konstant sind, finden wir daher einen Isomorphismus $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \cong (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$, der das Cupprodukt auf die kanonische symplektische Struktur bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ abbildet. Das letzte muß man zulassen, da man verschiedene Isomorphismen $\mu_k \cong \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ wählen kann. Es sei G die Gruppe der Automorphismen von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$, die die kanonische symplektische Struktur bis auf eine Einheit invariant lassen. Durch $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ wird dann ein Prinzipalfaserbündel J_k mit der Gruppe G definiert. J_k heißt der *Jacobische Funktor der* Stufe k. Nach SERRE ist J_k für $k \geqq 3$ rigid. Eine Jacobstruktur auf der Kurve C/S kann man als einen Isomorphismus von $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ mit der konstanten Garbe $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ interpretieren, der die symplektische Struktur bis auf Multiplikation mit einer Einheit invariant läßt.

3.3.2. In diesem Beispiel legen wir die Kategorie der analytischen Räume zugrunde. Analog zum Beispiel 3.3.1. betrachten wir den Funktor $R^1p_*\mathbf{Z}$. In diesem Fall haben wir durch die Orientierung einen kanonischen Isomorphismus $R^2p_*\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$. Wir können daher anstelle von G die symplektische Gruppe selbst betrachten. Man erhält dann den Torellischen Funktor, der nach dem letzten Beispiel ebenfalls rigid ist. Explizit ist eine Torellistruktur ein Isomorphismus von $R^1p_*\mathbf{Z}$ mit der konstanten Garbe $\mathbf{Z}^{2g}$, der die symplektische Struktur respektiert.

3.3.3. Wir bleiben in der Kategorie der analytischen Räume. Es sei C_0 eine feste Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Für eine beliebige Riemannsche Fläche sei $I(X, C_0)$ die Menge aller die Orientierung erhaltenden Diffeomorphismen (oder Homöomorphismen) von X nach C_0 modulo Homotopieäquivalenz. Für unsere Kurve $p: C \to S$ bezeichne C_s die Faser in einem Punkt $s \in S$. Die Vereinigung $\bigcup I(C_s, C_0)$ kann man als Prinzipalfaserbündel unter der Gruppe $G = I(C_0, C_0)$

auffassen. Den dadurch definierten Funktor in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel nennt man den *Teichmüllerfunktor*. Er ist nach dem letzten Beispiel rigid.

3.3.4. Für den Begriff der Teichmüllerstruktur gibt es ein Analogon im Falle beliebiger Charakteristik.
Es sei P eine vorgegebene Menge von Primzahlen. Wir betrachten Schemata, für die die Charakteristiken der Restklassenkörper in P liegen. Für eine proendliche Gruppe bezeichnen wir mit $G^{(P)}$ den maximalen Quotienten von zu P primer Ordnung. Es sei $p: C \to S$ eine glatte, irreduzible Kurve mit einem Schnitt s. Nach GROTHENDIECK [4], Exp. X, Théorème 38, bilden die Fundamentalgruppen $\pi_1(C_x, s(x))^P$, wobei x einen geometrischen Punkt von S bezeichnet, ein lokales System $\pi_1(C/S, s)^P$ auf S, das wir als Proobjekt der Kateogrie der endlichen lokalen Systeme über S betrachten. Es sei G eine endliche Gruppe von zu P primer Ordnung. $\pi_1(C/S, s)^P$ wirkt mittels innerer Automorphismen auf $\mathrm{Hom}(\pi_1(C/S, s)^P, G)$. Der Quotient dieser Wirkung ist unabhängig von dem gewählten Schnitt s, und wir bezeichnen ihn mit $\mathrm{Hom}^{\mathrm{ext}}(\pi_1(C/S)^P, G)$. Wir definieren eine Teichmüllerstruktur als die Klasse eines surjektiven Morphismus von $\pi_1(C/S)^P$ nach G in $\mathrm{Hom}^{\mathrm{ext}}(\pi_1(C/S)^P, G)$.

3.4. Es sei P ein rigider Funktor. Wir bezeichnen mit M_P^0 das Feld aller glatten irreduziblen Kurven mit einer P-Struktur. Dann existiert ein kanonischer Vergißmorphismus $M_P^0 \to M_g^0$. Es sei $x: S \to M_g^0$ ein Schnitt, der einer Kurve C/S entspricht. Offenbar ist das Faserprodukt $S \times_{M_g^0} M_P^0$ die Garbe der P-Strukturen auf C/S und folglich isomorph zu $P(C/S)$. Das bedeutet, daß der Vergißmorphismus repräsentierbar und etal ist. Daraus folgt unmittelbar, daß M_P^0 ein algebraisches Feld ist und, da es keine Automorphismen in den Fasern besitzt, sogar ein algebraischer Raum.
Nimmt man für P den Teichmüllerfunktor, so erhält man den klassischen Teichmüllerraum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht g.

3.5. Bekanntlich sind die algebraischen Räume M_P^0 bereits Schemata. Es sei J_n der Jacobifunktor der Stufe $n \geqq 3$. Dann ist M_{J_n} ein algebraischer Raum über $\mathrm{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$. Mit Hilfe der Theorie der Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten hat MUMFORD [4] folgendes Theorem bewiesen:

Theorem. *$M_{J_n}^0$, $n \geqq 3$, ist ein quasiprojektives Schema über* $\mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$.

Wir vergleichen jetzt die Funktoren M_P^0 für verschiedene P. Es sei P ein rigider Funktor in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel und $G \to H$ ein surjektiver Morphismus mit dem Kern K. Ferner sei Q der Funktor $P \times_G H = P/K$. Wir setzen voraus, daß K endlich ist. G operiert auf der Menge der P-Strukturen einer Kurve und damit auf dem algebraischen Raum M_P. Es sei $S \to [M_P/K]$ ein Schnitt des klassifizierenden Feldes, d. h. ein K-Morphismus $E \to M_P$, wobei E ein Prinzipalfaserbündel über S mit der Gruppe K ist. Einen K-Morphismus $E \to M_P$ kann man als eine P-Kurve C/E auffassen, auf der K operiert. Das bedeutet, daß C eine Kurve mit einem Abstiegsdatum relativ zu dem Morphismus $E \to S$ ist. Man prüft nach, daß man so einen Isomorphismus $[M_P/K] \cong M_Q$ erhält.
Ist $G \to H$ injektiv, so ergibt sich $M_Q = \bigsqcup_{H/G} M_P$. Es seien jetzt P und Q rigide Funktoren in die Kategorie der G- bzw. H-Prinzipalfaserbündel. Wir setzen voraus, daß G und H endliche Gruppen sind. Wendet man die erhaltenen Resultate auf die Homo-

morphismen $G \to G \times H \to H$ an, so erhält man, daß M_P quasiprojektiv ist genau dann, wenn M_Q quasiprojektiv ist. Aus dem Theorem von MUMFORD folgt unmittelbar:
Es sei P ein rigider Funktor aus der Kategorie $M_g^0 \times S$ in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel. Dann ist M_P ein Schema über S, das quasiprojektiv über jeder offenen Menge der Form $S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ (p Primzahl) ist.

3.6. Der grobe Modulraum M_g der Kurven vom Geschlecht g. Wir wissen, daß M_g^0 nicht durch ein Schema repräsentiert wird. Man kann sich fragen, ob wenigstens der Funktor F, der jedem Schema S die Isomorphieklassen von Objekten der Faser $(M_g^0)_S$ zuordnet, repräsentierbar ist. Die Existenz von nichttrivialen Automorphismen in (M_g^0) verhindert jedoch, daß F eine Garbe ist. Von GROTHENDIECK wurde bewiesen, daß auch die zu F assoziierte Garbe nicht repräsentierbar ist. Nach MUMFORD kann man aber ein schwaches Modulschema konstruieren.

Definition. M_g heißt ein *grobes Modulschema* der glatten Kurven vom Geschlecht g, wenn folgendes gilt:

(i) Es gibt einen Morphismus $M_g^0 \to M_g$, über den sich jeder andere Morphismus in ein Schema eindeutig faktorisieren läßt.

(ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper Ω ist die Menge der geometrischen Punkte $M_g(\Omega)$ gleich der Menge der Isomorphieklassen von Kurven über Ω.

Durch (i) und (ii) ist M_g offenbar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Zur Konstruktion definieren wir den Begriff eines geometrischen Quotienten.

Definition. Es sei G eine algebraische Gruppe, die auf einem Schema X operiert. Ein *geometrischer Quotient* ist ein G-invarianter Morphismus $p: X \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Y ist ein Quotient von X in der Kategorie der geometrischen Räume, d. h., Y hat die Quotiententopologie und es ist $p_* \mathcal{O}_X^G = \mathcal{O}_Y$.

(ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper Ω definiert p einen Isomorphismus von $X(\Omega)/G$ mit $Y(\Omega)$.

Nach GROTHENDIECK [4] gilt folgender

Satz. *Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem quasiprojektiven Schema X operiert. Dann existiert der geometrische Quotient X/G und ist quasiprojektiv.*

Wir benutzen die Bezeichnungen von 3.3.1. G ist eine endliche Gruppe, die auf dem quasiprojektiven Schema M_{J_n} ($n \geqq 3$) operiert. Folglich existiert der geometrische Quotient $Y_n = M_{J_n}/G$.

Wir zeigen, daß Y_n ein schwaches Modulschema über $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$ ist.

Zunächst hat man einen Morphismus $M_g^0 \to Y_n$. Dazu sei $S \to M_g^0$ ein Schnitt, der durch die Kurve $C \to S$ gegeben ist. Wenn man eine J_n-Struktur auf $C \to S$ wählen kann, erhält man einen Morphismus $S \to M_{J_n}$ und damit einen Morphismus $S \to Y_n$. Es ist klar, daß der letzte Morphismus von der gewählten Jacobistruktur unabhängig ist. Da man lokal stets eine Jacobistruktur wählen kann, erhält man allgemein einen Morphismus $S \to Y_n$ durch Zusammenkleben. Es sei $M_g^0 \to N$ ein beliebiger Morphismus in ein Schema N. Dann erhalten wir durch Komposition mit dem kanonischen Morphismus $M_{J_n} \to M_g^0$ einen G-invarianten Morphismus $M_{J_n} \to N$. Nach der Bedingung (i) für geometrische Quotienten läßt sich der letzte Morphismus auf eindeutige Weise über Y_n faktorisieren. Da die geometrischen Punkte $M_{J_n}(\Omega)$ genau die Isomorphieklassen von Kurven über Ω mit einer J_n-Struktur sind, folgt die Eigenschaft (ii) für das grobe Modulschema aus der entsprechenden für geometrische Quotienten.

Wegen der Eindeutigkeit des groben Modulschemas stimmen Y_m und Y_n über $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{mn}\right]\right)$ überein. Durch Zusammenkleben erhält man:

3.7. Satz. *Das schwache Modulschema M_g über* $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ *existiert und ist für jede Primzahl p quasiprojektiv über* $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$.

3.8. Der Teichmüllerraum. In diesem Punkt gehen wir kurz auf den Zusammenhang mit der transzendenten Theorie ein. Die Details findet man in den Arbeiten von Ahlfors [1], Bers [1] und Weil [1].

3.8.1. Uniformisierungssatz. *Es sei C_0 eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqq 2$. Dann existiert eine Fuchssche Untergruppe $\Gamma_0 \subset GL_2(R)$ ohne elliptische Elemente, so daß $H/\Gamma_0 \cong C_0$ ist, wobei H die obere Halbebene bezeichnet.*

Es sei $C \to M$ eine analytische Familie von Riemannschen Flächen, wobei M isomorph zu einem Polyzylinder ist. Weiter sei C_0 die Faser im Punkt $0 \in M$. Bekanntlich kann man einen Diffeomorphismus $\varkappa\colon C \to C_0 \times M$ finden, der mit der Projektion auf M verträglich ist. Es seien $t_1, \ldots, t_n$ Parameter in M, und z sei eine Uniformisierende von C_0. Es sei w eine Uniformisierende auf einer Faser C_s, wobei s genügend dicht bei 0 liegt.

Mit Hilfe von k können wir

$$dw = \alpha(z, t_1, \ldots, t_n)\, dz + \beta(z, t_1, \ldots, t_n)\, d\bar{z}$$

schreiben. Da die Formen $\alpha\, dz + \beta\, d\bar{z}, dt_1, \ldots, dt_n$ eine Basis für die (1, 0)-Formen einer komplexen Struktur sein müssen, rechnet man leicht nach, daß der Quotient $\mu(z, t_1, \ldots, t_n) = \dfrac{\beta}{\alpha}$ holomorph von $t_1, \ldots, t_n$ abhängen muß.

Wählt man $\varkappa$ so, daß die Orientierung erhalten bleibt, so folgt $|\mu| < 1$. Da dw eine komplexe Struktur auf H/Γ_0 definiert, muß es bis auf eine Konstante invariant unter Γ_0 sein.

Daraus erhält man, daß $\mu \dfrac{d\bar{z}}{dz}$ invariant unter Γ_0 ist, oder explizit

$$(*) \qquad \mu(A(z))\, \overline{A'(z)}/A'(z) = \mu(z) \quad \text{für alle} \quad A \in \Gamma_0.$$

Eine Funktion $\mu(z)$ (der Klasse L_2) mit $|\mu| < 1$, die der Bedingung $(*)$ genügt, heißt ein *Beltramidifferential* von Γ_0. Aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen folgt:

3.8.2. Es sei μ ein Beltramidifferential. Dann definiert die Riemannsche Metrik $dz + \mu\, d\bar{z}$ eine komplexe Struktur auf H/Γ_0, die wir mit C_0^μ bezeichnen. Es sei w^μ der Homöomorphismus, der H mit der alten komplexen Struktur auf H mit der neuen Struktur abbildet. w^μ ist eindeutig bestimmt bis auf einen gebrochen rationalen Isomorphismus von H, also eindeutig, wenn wir fordern, daß die Punkte $0, 1, \infty$

bei w^μ invariant bleiben sollen. Wir wollen diese Annahme im folgenden stets machen. Wenn dann μ holomorph oder glatt von Parametern abhängt, so auch w^μ. Die Faser C_0 und die Äquivalenzklasse von w^μ in $I(C_0, C_0^\mu)$ definieren einen Punkt des Teichmüllerraumes $T_g(\mathbf{C})$.
In der analytischen Theorie wird die komplexe oder glatte Struktur auf der Menge $T_g(\mathbf{C})$ durch folgende Bedingung definiert:

(T) Wenn $\mu(z, t)$ holomorph oder glatt von Parametern t abhängt, ist die Abbildung $t \mapsto (C_0^{\mu(z,t)}, w^{\mu(z,t)}) \in T_g(\mathbf{C})$ holomorph bzw. glatt.

Es ist aus den Betrachtungen am Anfang dieses Abschnittes klar, daß eine analytische Struktur auf $T_g(\mathbf{C})$, die der Bedingung (T) genügt, mit der in 3.4. definierten übereinstimmen muß.

3.8.3. Eine glatte Einbettung des Teichmüllerraumes. Es sei μ ein Beltramidifferential. Die gebrochen linearen Transformationen $A \in \Gamma_0$ induzieren auf der oberen Halbebene H mit der komplexen Struktur w^μ gebrochen lineare Transformationen A^μ:

$$w^\mu(A(z)) = A^\mu(w^\mu(z)).$$

Wenn Γ_0^μ die Gruppe der Transformationen A^μ bezeichnet, gilt $C_0^\mu = H/\Gamma_0^\mu$.
Wir wählen jetzt für Γ_0 Erzeugende A_j, B_j, $j = 1, \ldots, g$, die nur der Relation $\prod_{j=1}^{g} (A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}) = 1$ genügen. Wenn wir alles mit einer geeigneten Matrix konjugieren, können wir, da keine der auftretenden Transformationen elliptisch ist, annehmen, daß A_g die Fixpunkte 0, 1 und B_g den Fixpunkt ∞ hat. Ein solches System von Erzeugenden nennt man *normalisiert.* Man überzeugt sich sofort, daß man A_g und B_g aus den A_j und B_j, $j = 1, \ldots, g - 1$, erhalten kann. Da jede gebrochen rationale Transformation von drei Parametern abhängt, hängt ein normalisiertes System von Erzeugenden von $6_g - 6$ reellen Parametern ab. Wir fassen die normalisierten Systeme daher als Teilmenge des $\mathbf{R}^{6g-6}$ auf.
Es sei $S \to T_g$ ein glatter Punkt des Teichmüllerraumes, der lokal durch ein Beltramidifferential gegeben ist, wie wir es am Anfang dieses Abschnittes beschrieben haben.
Die Abbildung

$$\mu \mapsto (A_j^\mu, B_j^\mu), \quad j = 1, \ldots, g - 1,$$

definiert dann einen Punkt $S \to \mathbf{R}^{6g-6}$. Die so erhaltene Abbildung $T_g \to \mathbf{R}^{6g-6}$ ist eine offene Einbettung.

3.8.4. Die Kontraktibilität des Teichmüllerraumes. Wir haben gesehen, daß man die Punkte des Teichmüllerraumes in der Form (S_0^μ, w^μ) repräsentieren kann. Dabei können verschiedene μ den gleichen Punkt des Teichmüllerraumes repräsentieren. Genauer definieren μ und μ' den gleichen Punkt, wenn $w^\mu(w^{\mu'})^{-1}$ homotop zu einer holomorphen Abbildung ist.
Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt der Theorie TEICHMÜLLERS.

Definition. Ein *Teichmüllerdifferential* ist ein Beltramidifferential der Form $\mu(z) = \varkappa \dfrac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}$, wobei $\varkappa$ eine reelle Zahl, $0 \leqq \varkappa < 1$ und $f(z)\, dz^2$ ein holomorphes quadratisches Differential auf C_0 ist.

3.8.5. Jeder Punkt des Teichmüllerraumes hat eine eindeutige Darstellung (S_0^μ, w^μ), wobei μ ein Teichmüllerdifferential ist. μ ist dabei eindeutig bestimmt durch die

Extremaleigenschaft, daß

$$\max_{z \in H} |\mu(z)| \leqq \max_{z \in H} |\mu'(z)|$$

ist für alle $\mu'(z)$, die den gleichen Punkt des Teichmüllerraumes definieren. Wir zeigen jetzt, daß daraus die Kontraktibilität des Teichmüllerraumes folgt.
Es sei $(\Omega_1, \ldots, \Omega_{6g-6}) = \Omega$ eine reelle Basis des Raumes $H^0(C_0, \omega_{C_0}^{\otimes 2})$ der quadratischen Differentiale. Für alle Vektoren $x \in \mathbf{R}^{6g-6}$, $|x| < 1$, entspricht dem Teichmüller-differential $|x|(x\bar{\Omega})/|x\Omega|$ ein Punkt $\gamma(x)$ des Teichmüllerraumes. Nach 3.8. ist die Abbildung $x \to \gamma(x)$ eine eineindeutige differenzierbare Abbildung der Einheitskugel im $\mathbf{R}^{6g-6}$ auf den Teichmüllerraum $T_g \subset \mathbf{R}^{6g-6}$. Nach dem Theorem von Hopf über die Gebietsinvarianz ist j dann ein Homöomorphismus.

4. Die Kompaktifizierung des Feldes der Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$

Zunächst definieren wir den Begriff „eigentlich“ für algebraische Felder.
Es sei P eine Eigenschaft für Morphismen $f: X \to Y$ von Schemata, die lokal auf X und Y bezüglich der Etaltopologie ist. Wir sagen, daß ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ von algebraischen Feldern *die Eigenschaft P hat*, wenn für ein und folglich für jedes Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & \mathcal{F}_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ Y & \xrightarrow{y} & \mathcal{F}_2 \end{array}$$

wobei x und y surjektive Etalmorphismen sind, f die Eigenschaft P hat (z. B. lokal v. e. T., flach, etale, glatt usw.). $\mathcal{F}_1$ heißt *quasikompakt* (*Noethersch* usw.) wenn ein surjektiver Etalmorphismus $x: X \to \mathcal{F}_1$ mit X quasikompakt (Noethersch usw.) existiert. $\varphi: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ heißt *quasikompakt*, wenn $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{F}_2} Y$ für alle quasikompakten Y quasikompakt ist. Wenn φ außerdem lokal von endlichem Typ ist, heißt φ *von endlichem Typ*.

4.1. Definition. Ein Morphismus $f: \mathcal{F} \to S$ eines algebraischen Feldes $\mathcal{F}$ in ein Noethersches Schema S heißt *eigentlich*, wenn f von endlichem Typ und separiert ist und für jeden Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[urr, "g"] \arrow[r] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

ein diskreter Bewertungsring V' mit dem Quotientenkörper K' existiert, der eine endliche Erweiterung von V ist, und ein Morphismus $\mathrm{Spec}(V') \to \mathcal{F}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(V') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[urr] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Für eigentliche Morphismen algebraischer Felder gelten wichtige Sätze der algebraischen Geometrie wie das Lemma von CHOW, der Zusammenhangssatz von ZARISKI und der Endlichkeitssatz.
Da es Kurven mit potentiell schlechter Reduktion gibt, existieren diskret bewertete Körper K und Morphismen $\operatorname{Spec}(K) \to M_g^0$, die sich nicht auf $\operatorname{Spec}(V')$ fortsetzen lassen, wobei V' irgendeine endliche Erweiterung des Bewertungsringes V von K ist. M_g^0 ist also nicht eigentlich über $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Um M_g^0 zu kompaktifizieren, müssen wir zu M_g^0 geeignete Kurven hinzufügen, die sich bei Reduktion potentiell gut verhalten.

4.2. Stabile Kurven.

Definition. Es sei S ein Schema. Eine *stabile Kurve* vom Geschlecht $g \geqq 2$ ist ein flacher eigentlicher Morphismus $\pi: C \to S$, dessen geometrische Fasern C_s wie folgt beschaffen sind:

(i) C_s ist reduziert, zusammenhängend und besitzt höchstens gewöhnliche Doppelpunkte.

(ii) Auf jeder nicht singulären rationalen Komponente E von C_s liegen mindestens drei Doppelpunkte von C_S.

(iii) $\dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s}) = g$.

Es gilt:

1. C ist lokal vollständiger Durchschnitt, da $\mathcal{O}_{C_s,O}$ in einem Punkt $O \in C_s$ vollständiger Durchschnitt ist und damit wegen der Flachheit auch $\mathcal{O}_{C,O}$.
2. Auf C existiert eine invertierbare Garbe mit folgenden Eigenschaften (siehe HARTSHORNE [1]):
   a) $\omega_{C/S}$ ist verträglich mit Basiswechsel.
   b) Es sei S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers; $z_1, \ldots, z_n$ seien die Doppelpunkte von C und x_i, y_i die beiden Punkte auf der Normalisierung C' von C, die über z_i liegen. Dann ist $\omega_{C,S}$ isomorph zum direkten Bild der Garbe der meromorphen Differentiale η auf C', die höchstens einfache Pole in den Punkten x_i, y_i haben, so daß
   $$\operatorname{res}_{x_i}(\eta) + \operatorname{res}_{y_i}(\eta) = 0$$
   ist.
   c) Wie in b) sei $S = \operatorname{Spec}(k)$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus
   $$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_C}(F, \omega_{C/S}) \cong \operatorname{Hom}_k\big(H^{1-i}(C, F), k\big)$$
   für jede köhärente $\mathcal{O}_C$-Garbe F.

Wie im Fall von glatten Kurven zeigt man ohne große Schwierigkeiten

4.3. Satz. *Es sei C/S eine stabile Kurve. Dann ist $\omega_{C/S}^{\otimes n}$ für $n \geqq 3$ sehr ampel und $\pi_*\big(\omega_{C/S}^{\otimes n}\big)$ lokal frei vom Rang $(2n-1)(g-1)$.*

Es sei H_g der Funktor der trikanonisch eingebetteten Kurven

$$H_g(S) = \left\{ \begin{array}{l} C \to S \text{ stabile Kurve und ein Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes 3}) \cong \mathbf{P}^{5g-6} \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Völlig analog zum Fall der glatten Kurven erhält man

4.4. Satz. *H_g ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}^{P_g(x)}_{\mathbf{P}^{5g-6}}$, *wobei $P_g(x) = (6x-1)(g-1)$ ist.*

Um zu zeigen, daß das Feld der stabilen Kurven algebraisch ist, müssen wir die Automorphismen untersuchen.

Lemma. $\mathrm{Hom}(\Omega, \mathcal{O}_C) = 0$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jedes Vektorfeld D auf C Null ist. D ist eine Derivation $D: \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C$, die man auf die Garbe der meromorphen Funktionen in eindeutiger Weise ausdehnen kann. Es sei $\mathfrak{c}$ der Führer von $\mathcal{O}_{C'}$ nach $\mathcal{O}_C$. Da D eine Derivation ist, folgt $\mathfrak{c}D(\mathcal{O}_C) \subseteq D(\mathfrak{c})\mathcal{O}_{C'} + D(\mathfrak{c})$. Daraus folgt leicht $D(\mathcal{O}_{C'}) \subset \mathcal{O}_{C'}$, Geometrisch bedeutet das, daß die Vektorfelder auf C eineindeutig den Vektorfeldern auf C' entsrpechen, die in den Punkten x_i, y_i verschwinden. Es sei C'_i eine Komponente von C'. Wir unterscheiden drei Fälle

a) $g(C'_i) \geqq 2$;

b) $g(C'_i) = 1$, D/C'_i verschwindet an mindestens einem Punkt von C'_i;

c) $g(C'_i) = 0$, D/C'_i verschwindet an drei Punkten von C'_i.

In allen drei Fällen folgt aus dem Satz von Riemann-Roch $D/C'_i = 0$ und damit $D = 0$.

Es seien X und Y Schemata von endlichem Typ über einem Basisschema S und $\mathscr{L}$ und $\mathscr{M}$ Garben auf X und Y die relativ sehr ampel sind. Wir definieren folgenden Funktor auf der Kategorie der S-Schemata:

$$\mathrm{Isom}_S\big((X, \mathscr{L})(Y, \mathscr{M})\big)(T) = \text{Isomorphismen } f: X_T \to Y_T \text{ mit } f^*\mathscr{M}_T = \mathscr{L}_T.$$

Aus der Theorie der Hilbertschema folgt, daß Isom durch ein quasiprojektives Schema über S repräsentiert wird. Wenn X und Y stabile Kurven sind, so gilt nach Eigenschaft a) der Garbe ω

$$f^*\omega_{Y_T/T} = \omega_{X_T/T}$$

für jeden Isomorphismus f. Also ist $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ in diesem Fall ein quasiprojektives Schema über S.

Wir beweisen jetzt die versprochene Verallgemeinerung von Lemma 2.4.

4.5. Satz. *Es seien X und Y stabile Kurven über einem Schema S. Dann ist* $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ *endlich und unverzweigt über S.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß Isom quasiendlich und unverzweigt ist. Dazu müssen wir beweisen, daß die geometrischen Fasern endlich und reduziert sind. Offenbar sind die geometrischen Fasern leer oder isomorph zu einem Schema der Form $\mathrm{Aut}_k(C)$, wobei C eine stabile Kurve über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist. Nach dem letzten Lemma ist der Tangentialraum von $\mathrm{Aut}_k(C)$ im Punkte id_C Null. Da $\mathrm{Aut}_k(C)$ quasiprojektiv ist, muß es dann ein endliches reduziertes Gruppenschema sein.

Nach einem bekannten Resultat von Chevalley bleibt zu beweisen, daß $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ eigentlich über S ist. Indem wir eine trikanonische Einbettung von X und Y wählen, erhalten wir einen Morphismus $S \to H_g \times H_g$. Nach Basiswechsel können wir annehmen, daß $S = H_g \times H_g$ und daß X und Y die Urbilder der universellen trikanonisch eingebetteten stabilen Kurve über H_g bei den beiden Projektionen von S auf H_g

sind. Mit Hilfe von Sätzen aus Grothendieck [2], Kap. II, zeigt man leicht die folgende Variante des Bewertungskriteriums für eigentliche Morphismen:
Es sei Z ein Schema über S und U eine offene und dichte Teilmenge von Z. Z ist eigentlich über S, wenn für jeden diskreten Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

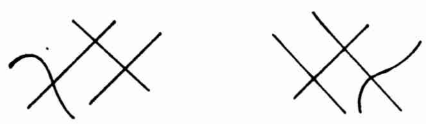
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] & Z \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(V) \arrow[rr] & & S \end{tikzcd}$$

ein Morphismus $\operatorname{Spec}(V) \to Z$ existiert, so daß das resultierende Diagramm kommutativ wird.
Wir zeigen weiter unten, daß H_g^0 dicht in H_g ist. Daraus folgt leicht, daß die offene Teilmenge von $\operatorname{Isom}_S(X, Y)$, die glatten Kurven entspricht, dicht ist. Folgender Satz zeigt, daß das Bewertungskriterium erfüllt ist.

4.6. Satz. *Es sei V ein diskreter Bewertungsring; s und η seien der spezielle und der allgemeine Punkt von* $\operatorname{Spec}(V)$. *Es seien ferner X und Y stabile Kurven über* $\operatorname{Spec}(V)$, *deren allgemeine Fasern glatt sind. Dann kann man jeden Isomorphismus $\varphi_\eta: X_\eta \to Y_\eta$ zu einem Morphismus $\varphi: X \to Y$ erweitern.*

Wir bemerken nachträglich, daß aus 4.5. folgt, daß die Bedingung „X_η und Y_η glatt" überflüssig ist.

Beweis. Da X_s nur gewöhnliche Doppelpunkte hat, haben die Singularitäten von X die Form $x \cdot y = \pi^n$, wobei π ein lokaler Parameter von V ist. Aus der Bedingung „X_η glatt" folgt $n \geqq 1$. Bläst man die Singularitäten auf, so erhält man folgende Konstellation von $n - 1$ projektiven Geraden:



Nach Aufblasung aller Singularitäten von X erhält man daher eine singularitätenfreie Fläche ohne ausgezeichnete Kurven erster Art, also das minimale Modell von X_η. Umgekehrt erhält man X aus dem minimalen Modell in eindeutiger Weise, indem man alle Kurven, die in einer Konstellation der angegebenen Art vorkommen, zusammenbläst. Da $\varphi_\eta: X_\eta \to Y_\eta$ einen Isomorphismus der minimalen Modelle induziert, erhält man den gewünschten Isomorphismus $\varphi: X \to Y$.

Analog zu 2.4. erhält man aus 4.6.

4.7. Satz. *Das Feld M_g der stabilen Kurven ist algebraisch.*

Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt der Theorie der stabilen Kurven.

4.8. Satz (über stabile Reduktion). *Es sei V ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K, und C sei eine geometrisch irreduzible glatte Kurve über K. Dann existiert eine endliche Erweiterung K' von K und eine stabile Kurve C über dem ganzen Abschluß V' von V in K', deren allgemeine Faser isomorph zu $C \otimes_K K'$ ist.*

Man kann 4.8. aus einem entsprechenden Resultat über abelsche Mannigfaltigkeiten folgern, das zuerst von GROTHENDIECK und MUMFORD bewiesen wurde. Einen elementaren Beweis ohne den schwierigen Apparat haben ARTIN und WINTERS [1] gegeben.

Nach den Bemerkungen am Anfang dieses Abschnitts erhalten wir aus 4.8.

4.9. Satz. *Das algebraische Feld der stabilen Kurven M_g ist eigentlich über* Spec ($\mathbf{Z}$).

5. Die Irreduzibilität des Modulraumes der glatten Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$

Der natürliche Morphismus $M_g^0 \to M_g$ ist darstellbar und eine offene Einbettung. Wir untersuchen zunächst das entsprechende lokale Problem.

5.1. Lemma. *Es sei C/k eine stabile Kurve. Dann ist* $\mathrm{Ext}^2(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$.

Beweis. Wir benutzen die Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p\big(X, \mathcal{E}xt^q(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$$

und zeigen $E_2^{pq} = 0$ für $p + q = 2$. Das ist trivial für $q \neq 2$. Da C lokal ein vollständiger Durchschnitt ist, haben wir lokal eine Resolution

$$0 \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \to \Omega^1_{\mathbf{A}^n/k} \otimes \mathcal{O}_C \to \Omega^1_{C/k} \to 0.$$

Daraus folgt $\mathcal{E}xt^2 = 0$.

Im folgenden ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und C eine stabile Kurve über k. Wir betrachten die formale semiuniverselle Deformation $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ von C über dem Wittring $\mathfrak{o}_k$.
Wegen $\mathrm{Ext}^0(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$ ist diese Deformation sogar universell und wegen $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$ folgt aus der Deformationstheorie, daß die Basis $\mathcal{M}$ formal glatt ist, d. h. $\mathcal{M} = \mathrm{Spf}\, \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$, wobei $N = \dim \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$ ist. Die invertierbare Garbe $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ ist ampel. Nach GROTHENDIECKS Existenzsatz findet man deshalb ein eindeutig bestimmtes projektives flaches Schema über Spec(A), wobei $A = \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$ ist, dessen Komplettierung $\mathcal{C}$ ist und das wir im weiteren ebenfalls mit $\mathcal{C}$ bezeichnen. Es sei z_i ein Doppelpunkt von C und $\mathcal{O}_i/A_i$ die verselle Deformation der k-Algebra $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,C}$ über dem Wittring. Wir haben $\hat{\mathcal{O}}_{z_i} = k[[u_i, v_i]]/u_i \cdot v_i$. Nach einem allgemeinen Resultat über die versellen Deformationen von vollständigen Durchschnitten (vgl. Kap. III) gilt

$$\mathcal{O}_i \cong k[[u_i, v_i, t_i]]/(u_i v_i - t_i), \quad A_i \cong \mathfrak{o}_k[[t_i]].$$

Da $\hat{\mathcal{O}}_{Z,\mathcal{C}} \mid A$ eine Deformation von $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,C}$ ist, gibt es einen Morphismus $\varphi_i: A_i \to A$ derart, daß $\hat{\mathcal{O}}_{Z_i,\mathcal{C}} = A \otimes_{A_i} \mathcal{O}_i$ ist.

5.2. Lemma. *$\varphi: A_1 \otimes_{\mathfrak{o}_k} \cdots \otimes_{\mathfrak{o}_k} A_n \to A$ ist formal glatt. Das bedeutet, daß Isomorphismen $A_i \cong \mathfrak{o}_k[[t_i]]$ und $A \cong \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$, existieren, so daß $\varphi(t_i) = t_i$ ist.*

Beweis. Die Tangentialabbildung von φ kann man mit der folgenden Abbildung identifizieren:

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) \to \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{z_i}}(\hat{\Omega}_{z_i}, \hat{\mathcal{O}}_{z_i}).$$

Aus der Sepktralsequenz von Lemma 5.1 erhält man leicht die Surjektivität.

Da $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,\mathscr{C}} \cong A \otimes_{A_i} \mathcal{O}_i$ hat man nach 5.2.

$$\mathcal{O}_{z_i,\mathscr{C}} \cong \mathfrak{o}_k[\![u_i, v_i, t_i, \ldots, t_N]\!]/(u_i v_i - t_i).$$

Es sei $H_g' = H_g \times \operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_k)$ das Schema der trikanonisch eingebetteten stabilen Kurven über dem Wittring. Ferner sei x ein Punkt von H_g', der der Kurve C entspricht, und $T = \operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{x,H_g'})$. Nach der Universalität von M hat man einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon T \to \operatorname{Spec}(A)$, der durch die universelle Kurve Z_g' über H_g' induziert wird. Wählen wir eine trikanonische Einbettung der Kurve C über $\operatorname{Spec}(A)$, so erhalten wir einen Schnitt s von f. Es sei G die Komplettierung von $PGL(5g-6)$ im Einselement. G operiert offenbar auf T, da $PGL(5g-6)$ auf H_g operiert. Berücksichtigt man, daß der Stabilisator von C in $PGL(5g-6)$ nach 4.5. reduziert und endlich ist, so folgt, daß $G \times M \to G \times T \xrightarrow{\mu} T$ ein Isomorphismus ist (siehe MUMFORD [4], Kap. 5, § 2). Also ist $f\colon T \to \operatorname{Spec}(A)$ formal glatt. Daraus folgt $\hat{\mathcal{O}}_{x,H_g} \cong \mathfrak{o}_k[\![t_1, \ldots, t_M]\!]$.
Da man die universelle Kurve $(Z_g')_T$ aus $\mathscr{C}$ durch Basiswechsel erhält, gilt weiter $\mathcal{O}_{Z_g', z_i} \cong \mathfrak{o}_k[\![t_1, \ldots, t_M, u_i, v_i]\!]/(u_i v_i - t_i)$. Die Menge der nicht glatten Punkte des Morphismus $Z_g' \to H_g'$ wird also lokal durch die Gleichung $t_1 \cdots t_n = 0$ beschrieben.

Definition. Es sei $p\colon X \to Y$ ein glatter Morphismus von endlichem Typ und $D \subset X$ ein relativer Cartierdivisor. Wir sagen, daß D *normale Schnitte* hat, wenn für alle $x \in D$ die lokale Gleichung $d = 0$ von D in der strikten Komplettierung $\tilde{\mathcal{O}}_{x,X}$ von $\mathcal{O}_{x,X}$ eine Darstellung $d = d_1 \cdots d_k$ besitzt, wobei $d_1, \ldots, d_k$ linear unabhängig in $m_{x,X}\tilde{\mathcal{O}}_{x,X}/m_{x,X}^2\tilde{\mathcal{O}}_{x,X} + m_{y,Y}\mathcal{O}_{x,X}$ sind.
Es sei S die Menge der Punkte von H_g, wobei der Morphismus $Z_g \to H_g$ nicht glatt ist. Man kann die oben durchgeführten Überlegungen wie folgt zusammenfassen.

5.3. Satz. *H_g ist ein glattes Schema über $\mathbf{Z}$ und S ein Divisor mit normalen Schnitten relativ zu $\mathbf{Z}$.*

5.4. Korollar. *Das Komplement von M_g^0 in M_g ist ein Divisor mit normalen Schnitten.*

Beweis. Es sei $x\colon X \to M_g$ ein Etalmorphismus. Wir müssen zeigen, daß $X_0 = x^{-1}(M_g^0)$ das Komplement eines Divisors mit normalen Schnitten ist. Wir betrachten den glatten Morphismus $X \times_{M_g} H_g \xrightarrow{x'} X$. Dann ist $x'^{-1}(X_0)$ das Urbild von H_g^0 bei dem Etalmorphismus $X \times_{M_g} H_g \to H_g$ und deshalb das Komplement eines Divisors mit normalen Schnitten. Da x' glatt ist, muß X_0 ebenfalls das Komplement eines solchen Divisors sein.

5.5. Satz. *Die geometrischen Fasern des Morphismus $M_g^0 \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ sind irreduzibel.*

Beweis. Da das Komplement von M_g^0 in M_g ein Divisor relativ zu $\mathbf{Z}$ ist, ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten (= irreduzible Komponenten, da p glatt ist) einer geometrischen Faser $(M_g^0)_\Omega$ gleich der Anzahl der Komponenten von $(M_g)_\Omega$. Auf den eigentlichen Morphismus $p\colon M_g \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ können wir den Zariskischen Zusammenhangssatz anwenden. Danach genügt es zu zeigen, daß eine der geometrischen Fasern zusammenhängend ist. Aus der analytischen Theorie wissen wir, daß der Teichmüllerraum T_g zusammenhängend ist. Damit ist auch $(M_g)_{\mathbf{C}}$ zusammenhängend, denn es existiert ein surjektiver Morphismus $T \to (M_g^0)_{\mathbf{C}}$.

5.6. Korollar. *Das schwache Modulschema M_g der Kurven vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist irreduzibel.*