5. Ein Beispiel von Mumford

Wir werden jetzt nach einem Beispiel aus MUMFORD [2] zeigen, daß das Hilbertschema nicht reduziert zu sein braucht. Dazu werden wir zeigen, daß für gewisse Kurven γ im dreidimensionalen projektiven Raum keine algebraische Familie A mit reduziertem Parameterraum existiert, die diese Kurven enthält und für die die charakteristische Abbildung

$$T_a \xrightarrow{\varphi} H^0(N)$$

(a der Punkt aus A, der γ entspricht, T_a der Tangentenraum von a in A, N das Normalenbündel von γ in $\mathbf{P}^3$) surjektiv ist. Die charakteristische Abbildung werden wir gleich erklären. Für das Hilbertschema ist aber die obige Abbildung ein Isomorphismus. Damit kann das Hilbertschema nicht reduziert sein, denn anderenfalls wäre ja dadurch eine algebraische Familie gegeben, für die φ surjektiv ist.

Die charakteristische Abbildung

Es seien X, T Schemata, Z sei ein abgeschlossenes Unterschema von $X \times T$, i bezeichne die Einlagerung von Z in $X \times T$ und p bzw. q die Projektion von $X \times T$ auf T bzw. auf X. Ist $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{X\times T}$ die Idealgarbe, die Z definiert, so ist die Folge

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\nu} i^*\Omega^1_{X\times T} \to \Omega^1_Z \to 0$$

exakt. Es ist

$$i^*\Omega^1_{X\times T} = q^*\Omega^1_X \otimes p^*\Omega_T,$$

und daher erhalten wir, wenn wir ν mit der Projektion $i^*\Omega^1_{X\times T} \to p^*\Omega_T$ komponieren, eine $\mathcal{O}_Z$-lineare Abbildung

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to p^*\Omega_T. \tag{1}$$

Ist $T \to \mathbf{A}^m$, $t \mapsto (t_1, \ldots, t_m)$ ein Etalmorphismus von T auf den m-dimensionalen affinen Raum (z. B. existiert ein solcher lokal, falls T glatt ist), so ist (1) gegeben durch

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t_i}\, dt_i.$$

Die Dualisierung von (1) ergibt

$$p^*\Theta_T \to \mathcal{N}_{Z/X\times T}$$

bzw. auf Grund der Adjunktion

$$\varphi_{Z/T}\colon \Theta_T \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}.$$

Setzen wir mit den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{d}_i = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$ so ist $\varphi_{Z/T}$ definiert durch

$$\varphi_{Z/T}(\mathfrak{d}_i) = \left(f \mapsto \frac{\partial}{\partial t_i}\middle| Z\right).$$

Für $t \in T$ liefert eine Tensorierung von $\varphi_{Z/T}$ mit $k(t)$ die Abbildung

$$\Theta_{T,t} \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0\big(Z_t, \mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)\big). \tag{2}$$

Nehmen wir an, daß die Abbildung $Z \to T$ flach ist (was in den uns interessierenden Fällen auch der Fall sein wird), so ist $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) = \mathcal{J}_t$ und in $\mathcal{O}_{X \times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ enthalten als das Z_t definierende Ideal. Somit haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{Z/X \times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times T}}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \\ &\to \mathcal{H}om\,(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t), \mathcal{O}_{Z_t}) = \mathcal{N}_{Z_t/X}. \end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \varphi_{Z/T,t} \colon \Theta_{T,t} &\to H^0(Z_t, \mathcal{N}_{Z_t/X}), \\ \mathfrak{d}_i &\mapsto \left(f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_i}(x, 0) \right). \end{aligned}$$

Wenn Z lokal vollständiger Durchschnitt ist, dann ist $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ lokal frei, und wir haben

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times T}}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_t, \mathcal{O}_{Z_t});$$

daher muß in diesem Fall, falls φ_t surjektiv ist, auch die Abbildung

$$p_* \mathcal{N}_{Z/X \times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0(Z_t, \mathcal{N}_{Z_t}) \tag{3}$$

surjektiv sein (siehe dazu die Folge (2)).

Mit Hilfe der Sätze über Basiswechsel erhält man aus (3):

a) $p_* \mathcal{N}_{Z/X \times T}$ ist in einer Umgebung von t mit Basiswechsel verträglich,

b) $\varphi_{Z/T} \colon \Theta_T \to p_* \mathcal{N}_{Z/X \times T}$ ist in einer Umgebung von t surjektiv.

Dabei bedeutet b) gerade: Ist Z lokal durch $u_1 = \cdots = u_{m-d} = 0$ definiert, wobei $u_1, \ldots, u_m$ reguläre Parameter sind, dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t_j}(x, 0)\, x_j = f_k, \qquad f_k \text{ beliebig}, \ k = 1, \ldots, m-d, \quad f_k = 0, \quad k > m-d,$$

stets lösbar.

Wir wollen uns jetzt noch speziell mit dem infinitesimalen Fall beschäftigen. Dazu sei $T' = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$, $\varepsilon^2 = 0$. Es seien X, T, Z wie oben angegeben und α ein Morphismus von T' in T: $T' \xrightarrow{\alpha} T$. Wir setzen $Z' := Z \times_T T' \subseteq X \times T'$, und es sei p' die Projektion $p' \colon Z' \to T'$.

Dann folgt aus a), daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Theta_{T'} & \xrightarrow{\varphi_{Z'/T'}} & p'_* \mathcal{N}_{Z'/X \times T'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha^* \Theta_T & \xrightarrow{\alpha^* \varphi_{Z/T}} & \alpha^* p_* \mathcal{N}_{Z/X \times T} \end{array}$$

universell ist.

Ist $\operatorname{Spec}(k) \to \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$ der der Projektion $k[\varepsilon] \to k$ entsprechende Morphismus, so wird dadurch für jedes abgeschlossene Unterschema Z von $X \times I$ ein abgeschlossenes Unterschema Z_0 von X induziert.

Es sei Z flach über I. Wie wir oben gesehen haben, induziert Z einen Morphismus $\varphi_{Z/I} \colon \Theta_I \to p_* \mathcal{N}_{Z/X \times T}$. Es ist $\Theta_I = k$. Indem wir Z das Element $\varphi_{Z/I}(1) \in H^0(Z, \mathcal{N}_{Z/X \times I})$ zuordnen, ist ein Element aus $H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X})$ definiert, das wir mit $\varphi(Z/I)$ bezeichnen wollen. Wir haben also für ein fixiertes $Z_0 \subset X$ einen Morphismus

$$\varphi \colon \{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z \cap (X \times 0) = Z_0\} \to H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X})$$

erhalten.

Satz *φ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. 1. Wir wollen zunächst einen Morphismus ψ in umgekehrter Richtung angeben. Dazu sei $s \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$. Wir haben eine Idealgarbe $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_{X\times T} = \mathcal{O}_X[\varepsilon]$ anzugeben, die ein $Z \subset X \times I$ mit den geforderten Eigenschaften definiert. Es sei $Z_0 \subset X$ durch die Idealgarbe $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{O}_X$ definiert. Dann setzen wir

$$\psi(s) = \mathcal{J} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathcal{J}_0, s(f) = g \bmod \mathcal{J}_0\}.$$

a) Wie man unmittelbar sieht, ist $\mathcal{J}$ ein Ideal.

b) Außerdem ist das Bild der Abbildung $\mathcal{J}/\varepsilon\mathcal{J} \to \mathcal{O}_X[\varepsilon]/\varepsilon\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ gleich $\mathcal{J}_0$, da f gerade alle Elemente aus $\mathcal{J}_0$ durchläuft.

c) Die obige Abbildung ist injektiv. Denn für $f + g\varepsilon \mapsto 0$ ist $f = 0$, also folgt $s(f) = 0 = g \bmod \mathcal{J}_0$, d. h. $g\varepsilon \in \varepsilon\mathcal{J}$.

Somit haben wir vermittels $\mathcal{J}$ ein I-flaches Unterschema Z von $X \times I$ mit $Z \cap (X \times 0) = Z_0$ definiert.

2. Wir zeigen jetzt, daß $\varphi\psi(s) = s$ gilt. Dazu sei $Z := \psi(s)$. Wir erinnern noch einmal daran, wie

$$\varphi(Z/I) \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

definiert ist. Man geht aus von der Abbildung

$$\mathcal{J} \to i^*\Omega^1_{X\times I}, \qquad p^*\Omega^1_I = \mathcal{O}_Z d\varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0} d\varepsilon,$$

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Wegen

$$\mathcal{H}om\,(\mathcal{O}_Z d\varepsilon, \mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{O}_Z\varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon,$$

$$u \mapsto u(d\varepsilon)$$

ergibt sich aus der obigen Abbildung durch Dualisierung

$$\varphi_{Z/T}\colon \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon \to \mathcal{H}om\,(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z),$$

$$h\varepsilon \mapsto (f + g\varepsilon \mapsto hg).$$

φ war aber gerade bestimmt durch den Wert für $h = 1$, d. h., wir erhalten die Abbildung $\big(Z := \psi(s)\big)$

$$f + g\varepsilon \mapsto g = s(f),$$

d. h., es ist $\varphi(Z/I) = s$.

Damit ist nachgewiesen, daß φ surjektiv ist.

3. Wir haben noch zu zeigen, daß φ injektiv ist. Es sei also $\varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I)$, wobei Z durch $\mathcal{J}$ und Z' durch $\mathcal{J}'$ definiert werde. Da aber

$$S := \varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I) = \big(f \mapsto s(f)\big) \in \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

ist mit

$$s(f)\,(x_0) = \frac{\partial(f + \varepsilon g)}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) = g(x_0),$$

ergibt sich

$$\mathscr{I} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathscr{I}_0,\ \varphi(Z/I)\,(f) \equiv g \bmod \mathscr{I}\} = \mathscr{I}',$$

d. h. $Z = Z'$.

Insbesondere erhalten wir aus dem Satz, da ja

$$\begin{aligned}\{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z_0 = Z \cap (X \times 0)\} &= \mathrm{Hilb}_X(I) \times_{\mathrm{Hilb}(k)} Z_0 \\ &= \text{Tangentenraum des Hilbertschemas in } Z_0\end{aligned}$$

ist, daß $H^0(Z_0, \mathscr{N}_{Z_0/X})$ der Tangentenraum des Hilbertschemas von X in Z_0 ist.

Wir wollen uns jetzt mit dem eingangs erwähnten Beispiel beschäftigen. Es sei $C \subset \mathbf{P}^3 \times H$ die universelle Familie glatter Kurven in $\mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t) = 14t - 23$ (d. h. Kurven vom Geschlecht 24 und vom Grad 14 in $\mathbf{P}^3$). Wir werden zeigen:

(i) Es gibt ein nichtleeres offenes Unterschema $U \subseteq H$, so daß U_{red} glatt ist und $\dim U = 56$.

(ii) Es gibt Punkte $u \in U$, in denen der Tangentialraum $T_u(U)$ die Dimension 57 hat.

Hilfssatz 1. *Es sei $V_0 \subset \mathbf{P}^3$ eine glatte kubische Fläche, E eine Gerade auf V_0 und H ein Hyperebenenschnitt. Dann hat das lineare System $|4H + 2E|$ keine Basispunkte, die Kurven aus diesem System haben das Hilbertpolynom $Q_0(t)$ (in $\mathbf{P}^3$).*

Beweis. Die letzte Behauptung folgt nach der Adjunktionsformel und aus $\omega_{V_0} = \mathscr{O}_{V_0}(-H)$. Da $|4H| + 2E \subseteq |4H + 2E|$ ist, können höchstens auf E Basispunkte liegen. Die Folgen

$$0 \to \mathscr{O}_{V_0}(4H + E) \to \mathscr{O}_{V_0}(4H + 2E) \to \underbrace{\mathscr{O}_E \otimes \mathscr{O}_{V_0}(4H + 2E)}_{\cong \mathscr{O}_E(2)} \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{O}_{V_0}(4H) \to \mathscr{O}_V(4H + E) \to \underbrace{\mathscr{O}_E \otimes \mathscr{O}_{V_0}(4H + E)}_{\cong \mathscr{O}_E(3)} \to 0$$

und

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1) \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(4) \to \mathscr{O}_V(4H) \to 0$$

sind exakt. Hieraus folgt

$$H^1\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(4H)\big) = H^1\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(4H + E)\big) = 0$$

und

$$E \cdot |4H + 2E| = |\mathscr{O}_E(2)|_E,$$

q. e. d.

Nach Bertinis Sätzen gibt es eine nichtleere offene Teilmenge in $|4H + 2E|$, die den glatten Kurven dieses linearen Systems entspricht.

Hilfssatz 2. *Ist V_0 wie oben und $C_0 \subset V_0$ eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, so ist* $\dim |C_0| = 37$.

Beweis. Nach Serres Dualitätssatz ist $\dim H^2\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(C_0)\big) = 0$. Aus der Adjunktionsformel folgt

$$\deg \mathscr{O}_{C_0} \otimes \mathscr{O}_{V_0}(C_0) = (C_0^2) = 46 + (C_0 \cdot H) = 60,$$

also $H^1(C_0, \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0)) = 0$, woraus wegen der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0} \to \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to 0$$

das Verschwinden von $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(C_0))$ folgt. Nach dem Satz von RIEMANN-ROCH ist

$$\dim |C_0| = (C \cdot (C + H))/2 = 37,$$

q. e. d.

Hilfssatz 3. *Eine Kurve $C_0 \subset \mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ liegt auf höchstens einer kubischen Fläche.*

Beweis. Die Kurve kann nicht in einer Ebene oder Quadrik liegen, da sich glatte Kurven vom Geschlecht 24 nicht in $\mathbf{P}^2$ einbetten lassen. Also ist jede kubische Fläche, die C_0 enthält, irreduzibel; der Schnitt zweier solcher Flächen hätte den Grad 9, C_0 hat aber den Grad 14.

Hilfssatz 4. *Die Menge H' aller $t \in H$, so daß C_t auf einer kubischen Fläche liegt, ist abgeschlossen in H, ebenso die Menge $H'' \subseteq H'$ aller t, so daß C_t auf einer singulären kubischen Fläche liegt. Ist $U' = H' \setminus H''$, so ist* $\dim U' = 56$ *und U'_{red} glatt. Es gibt Komponenten von U', auf denen* $\dim T_u(H) > 56$ *gilt.*

Beweis. Die Idealgarben $I_t = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_{C_t})$ sind die Fasern der H-flachen Idealgarbe $I = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times H} \to \mathcal{O}_C)$, und die Menge

$$H \setminus H' = \{t \in H;\, H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 0\}$$

ist offen, also ist H' abgeschlossen. Es sei $L' = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)|$ und $V \subset \mathbf{P}^3 \times L'$ die universelle Familie aller Divisoren vom Grad 3 in $\mathbf{P}^3$, $T' \subseteq H' \times L'$ die Menge aller (t, l) mit $C_t \subseteq V_l$. Offensichtlich ist T' abgeschlossen in $H' \times L'$; wir betrachten T' als reduziertes Unterschema. Nach Hilfssatz 3 ist die Projektion $T' \to H'$ bijektiv und projektiv, also ist $T' \to H'$ ein Homöomorphismus. Es sei $L \subseteq L'$ die offene Teilmenge aller glatten kubischen Flächen, $T = T' \cap (L \times H')$; das Bild von T in H' ist eine offene Teilmenge U' und entspricht genau den Kurven C_t, die auf einer glatten kubischen Fläche liegen.

Die Fasern der Projektion $T \to L$ sind disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen von linearen Systemen $|C_0|$ auf V_l, wobei C_0 eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ ist und auf V_l liegt, da auf rationalen Flächen lineare und algebraische Äquivalenz übereinstimmen. Somit ist nach Hilfssatz 2

$$\dim U' = \dim T = \dim L + \dim |C_0| = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)| + 37 = 56,$$

und T ist glatt (da L und $|C_0|$ glatt sind).

Wir berechnen schließlich $d = \dim T_u(H) = \dim H^0(C_u, N_{C_u|\mathbf{P}^3})$ (N = Normalenbündel).

Es sei V_0 eine glatte kubische Fläche, C_0 eine glatte Kurve auf V_0 mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, N das Normalenbündel von C_0 in $\mathbf{P}^3$ und N' das Normalenbündel in V_0, N'' das auf C_0 eingeschränkte Normalenbündel von V_0 in $\mathbf{P}^3$. Dann haben wir eine kanonische exakte Folge $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ und Isomorphismen

$$N' \cong \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \quad \text{und} \quad N'' \cong \mathcal{O}_{V_0}(3H) \otimes \mathcal{O}_{C_0}.$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 2 folgt $\deg N' = 60$, also $H^1(C_0, N') = 0$, $\dim H^0(C_0, N') = 37$ und $d = 37 + \dim H^0(C_0, N'') = 56 + \dim H^1(C_0, N'')$ (wegen $\deg N'' = (C_0 \cdot 3H) = 42$). Hieraus berechnet man leicht $d = 57$, wenn $C_0 \in |4H + 2E|$

ist. Wählt man zunächst V_0 und dann $C_0 \in |4H + 2E|$ jeweils als allgemeines Element, so sieht man, daß C_0 einem allgemeinen Punkt einer Komponente von U' entspricht (da V_0 von 19 und C_0 über dem Definitionskörper von (V_0, E) von 37 Parametern abhängt). Auf einer solchen Komponente ist also $\dim T_*(H) > 56$.
Da T glatt ist und homöomorph zu U', ist jede Zusammenhangskomponente von U' irreduzibel; aus $\dim H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 1$ folgt daher, daß $p_*(I(3) \mid U'_{\mathrm{red}})$ lokal freie Untergarbe von $p_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}}(3))$ ist und mit Basiswechsel verträglich, also eine flache Familie von kubischen Flächen in $\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}$ definiert, die C/U'_{red} enthält. Dadurch wird ein zur Projektion $T \to U'_{\mathrm{red}}$ inverser Morphismus definiert, also ist U'_{red} glatt.

Hilfssatz 5. *Das Schema $H \setminus H''$ hat die Dimension* 56.

Beweis. Es genügt, die offene Menge der nicht auf einer kubischen Fläche liegenden Kurven zu untersuchen. Für eine solche Kurve C_0 ist jede sie enthaltende Fläche vom Grad 4 notwendig irreduzibel, und wegen $\dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, $\dim |\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 32$ gibt es ein Büschel solcher Flächen vom Grad 4. Der Basisort dieses Büschels hat die Form $C_0 + Q$, Q eine Kurve vom Grad 2 (wegen $\deg C_0 = 14$, $\deg V \cdot V' = 16$). Nach Bertinis Satz kann ein allgemeines Element V des Büschels höchstens auf $C_0 + Q$ Singularitäten haben, und da für die Multiplizitäten eines Punktes p auf $V \cap V'$

$$m(p, V)\, m(p, V') \leqq m(p, C_0 + Q)$$
$$(\leqq 3 \text{ und } = 1 \text{ auf } C_0 \setminus Q, \ \leqq 2 \text{ auf } Q \setminus C_0)$$

gilt, hat V höchstens einen isolierten singulären Punkt p. Dieser ist ein Doppelpunkt und kann nur auftreten, wenn Q eine Doppelgerade ist. Es sei jetzt $V \subset \mathbf{P}^3 \times S$ die universelle Familie der Flächen vierten Grades und $T \subseteq (H \setminus H') \times S$ die abgeschlossene Menge aller (t, s) mit $C_t \subseteq V_s$; dann ist $\dim (H \setminus H') \leqq \dim T - 1$ (die Faser von $T \to (H \setminus H')$ in t ist das lineare System der Quartiken durch C_t, also von einer positiven Dimension). Da nicht jede Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt Q enthält, ist das Bild der Projektion $T \to S$ von einer Dimension kleiner als $\dim S = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, die Fasern bestehen aus linearen Systemen $|C_0|$ (da lineare Äquivalenz wieder gleich algebraischer Äquivalenz ist). Nach dem Satz von Riemann-Roch ist $\dim |C_0| = p_a(C_0) = 24$ (K3-Flächen!), also $\dim (H \setminus H') < 57$, q. e. d.