weil r ein endlicher Morphismus ist. Nun hat die kanonische Abbildung $\Omega^q_X \to r_* \Omega^q_{X'}$ einen Schnitt, nämlich $\frac{1}{n} \cdot$ Spur. Somit ist $H^p(X, \Omega^q_X \otimes \mathcal{L})$ in $H^p(X, r_*\Omega^q_{X'} \otimes \mathcal{L})$ enthalten, q. e. d.

Der Satz läßt sich nicht für den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik $p \neq 0$ verallgemeinern. So hat beispielsweise MUMFORD[1]) ein Beispiel dafür angegeben, in dem mit unseren Bezeichnungen $H^1(X, \mathcal{L})$ von Null verschieden ist (X ist eine Fläche). Das liegt daran, daß der Frobeniusendomorphismus auf $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nicht injektiv zu sein braucht. Es wäre interessant, Bedingungen dafür zu finden, daß der Satz über Körpern mit der Charakteristik p gilt. So kann man sich überlegen, daß für den Fall einer Fläche vom allgemeinen Typ genau dann $H^0(X, \Theta) = H^0(X, \Omega_X \otimes \omega_X^{-1}) = 0$ ist, wenn die Abbildung $H^0(X, \Omega_X) \to H^0(D, \Omega_D)$ injektiv ist (dabei sei $\omega_X = \mathcal{O}_X(D)$ der kanonische Divisor auf X, den wir hier als „very ample" voraussetzen). Es bleibt jedoch offen, für welche Flächen diese Bedingung nicht erfüllt ist.

4. Hilbertschema

Wir wollen das vor uns stehende Problem an Hand des affinen Falls erklären.

Es sei $S = \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n] = \mathbf{P}^n \times S$ der projektive Raum über S und $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$, so daß $P(m) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \binom{m+\nu}{\nu}$ für $m \in \mathbf{Z}$ ist, wobei die $a_\nu \in \mathbf{Z}$ sind und $a_n > 0$ ist.

Wir betrachten den Funktor $Q^P = Q$ aus der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der Mengen (N sei eine feste natürliche Zahl):

$$S' \mapsto \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S'} \mid \mathcal{F} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S'}/\mathcal{G} \text{ ist } S'\text{-flach und besitzt das Hilbertpolynom } P\}.$$

Dabei soll also $\chi(\mathcal{F}_\xi(r)) = P(r)$ für die betrachteten Quotientengarben für alle $r \geqq 0$ und für alle geometrischen Punkte ξ von S' gelten. Da $\mathcal{F}$ S'-flach ist, ist $\chi(\mathcal{F}_\xi(r))$ auch tatsächlich unabhängig von dem betrachteten geometrischen Punkt ξ.

Wir fragen nun, ob der Funktor Q darstellbar ist, d. h, wir suchen ein S-Schema $H^P = H$ und eine universelle Untergarbe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times H}$; $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times H}/\mathcal{N}$ ist flach über H, so daß der Morphismus

$$\operatorname{Hom}_S(T, H) \to Q(T),$$
$$\varphi\colon T \to H \mapsto \varphi^*(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_T$$

bijektiv und funktoriell in den S-Schemata T ist. Die Idee für die Konstruktion eines den Funktor Q darstellenden Schemas ist die folgende. Es sei $\mathcal{G} \in Q(S)$. Dann ist $\mathcal{G}$ Untergarbe von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S} = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1\sim}$ und hat daher die Form $\mathcal{G} = I^\sim$, wobei I homogener Untermodul in $A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1} = H$ ist. Wir bezeichnen mit $I(r)$ bzw. $H(r)$ die Formen vom Grad r aus I bzw. H. Dann ist $H(r)/T(r)$ für hinreichend großes r frei vom Rang $P(r)$. Wesentlich ist nun, daß man ein numerisches Polynom F konstruieren kann, so daß $H/I^\sim$ m-regulär ist, $m = F(a_0, \ldots, a_n)$, wobei $a_0, \ldots, a_n$ die Koeffizienten des Hilbertpolynoms sind. Daraus folgt, daß für alle homogenen Untermoduln I, für die $I^\sim \in Q(S)$ gilt, der Modul $H(r)/I(r)$ frei vom Rang $P(r)$ für $r \geqq m$ ist. Dadurch können wir, indem wir dem Paar $(I(m) \subset H(m))$ die Plückerkoordinaten zuordnen, $\mathcal{G} \in Q(S)$ auf einen Punkt der Graßmannschen

[1]) D. MUMFORD, Pathologies III. Amer. J. Math. *89* (1967), 94—104. Die Fläche ist allerdings nicht singularitätenfrei.

Mannigfaltigkeit Grass $(P(m), H(m))$ abbilden und haben damit eine injektive Abbildung $\varphi_S: Q(S) \to \mathrm{Grass}\,(P(m), H(m)) := G(S)$ erhalten (G bezeichnet hierbei das Graßmannschema). G ist ein projektives Schema, und um die Darstellbarkeit von Q nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß durch die φ_S eine abgeschlossene Einbettung φ von Q in G induziert wird.

Es sei p ein Punkt von G. Dann entspricht p einer Inklusion $I(m) \subseteq H(m)$, wobei $\dim\big(H(m)/I(m)\big) = P(m)$ gilt. Mit I_* werde das von $I(m)$ in H erzeugte homogene Ideal bezeichnet. Dann besteht also das Problem darin, algebraische Bedingungen dafür anzugeben, daß

1. $(H/I_*)^\sim$ flach über A ist und
2. $(H/I_*)^\sim$ das Hilbertpolynom P besitzt.

Satz. *Der Funktor Q ist durch ein projektives Schema, das wieder mit Q bezeichnet werden soll, und eine Q-flache Quotientengarbe $\mathscr{F}_Q = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}/\mathscr{G}_Q$ mit dem Hilbertpolynom P darstellbar.*

Beweis. Es sei $\mathscr{G} \in Q(S)$. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}/\mathscr{G} \to 0 \tag{0}$$

und wollen die Quotientengarbe mit $\mathscr{F}$ bezeichnen. Wegen Satz 2 aus Abschnitt 3 wissen wir, daß für $m \gg 0$ die Garbe $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}$ und die betrachteten $\mathscr{G} \in Q(S)$ m-regulär sind. Daraus folgt zusammen mit den Korollaren 1, 2, 4 zum Satz 1 aus Abschnitt 1, daß die Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to p_*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}(m)\big)^{N+1} \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0 \tag{1}$$

exakt ist.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{H}_S(m)$ den $\mathcal{O}_S$-Modul der Formen vom Grad m in $\mathcal{O}_S[T_0, \ldots, T_n]$. Es ist $p_*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}(m)\big) = \mathscr{H}_S(m)$ und $\mathscr{H}_S(m)^{N+1} \cong \mathcal{O}^{q+1}_S$ mit $q + 1 = (N+1)\binom{n+m}{m}$ ist. Damit erhalten wir aus (1) die exakte Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to \mathcal{O}^{q+1}_S \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0. \tag{2}$$

Es sei $p + 1 := P(m)$ und Grass (q, p) der Graßmannfunktor:

$$\mathrm{Grass}\,(q, p)\,(S) = \{\mathscr{N} \subset \mathcal{O}^{q+1}_S \mid \mathscr{N} \text{ kohärent, } \mathcal{O}^{q+1}_S/\mathscr{N} \text{ lokal frei vom Rang } p+1\}.$$

Wegen $m \gg 0$ ist $rk\big(p_*(\mathscr{F}(m))\big) = \chi\big(\mathscr{F}(m)\big) = P(m) = p + 1$, d. h., es ist $p_*\mathscr{G}(m) \in \mathrm{Grass}\,(q, p)\,(S)$. Andererseits ist $\mathscr{G}$ nach Satz 1 aus Abschnitt 3 durch $p_*\mathscr{G}(m)$ und damit auch $\mathscr{F}$ eindeutig bestimmt. (Es sei etwa S affin: $S = \mathrm{Spec}\, A$. Dann ist

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0\big(\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}(k)\big) = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1}.$$

Bezeichnet man mit G_0 den graduierten Untermodul, der über $A[T_0, \ldots, T_n]$ durch $H^0\big(\mathscr{G}(m)\big)$ erzeugt wird, so ist $\mathscr{G} = (G_0)^\sim$.) Damit haben wir eine Einlagerung $Q(S) \subseteq \mathrm{Grass}\,(q, p)\,(S)$ definiert. Aus den Sätzen über Basiswechsel folgt, daß diese Einlagerung auch funktoriell ist: $Q \subseteq \mathrm{Grass}\,(q, p)$.

Wir wollen noch einmal an die Plückerkoordinaten erinnern. Der Graßmannfunktor wird dargestellt durch eine projektive Mannigfaltigkeit

$$G(q, p) \subseteq \mathbf{P}^{\binom{q+1}{p+1}-1}.$$

Dabei wird $G(q, p)$ durch homogene Koordinaten $p_{i_0 \dots i_p}$, $0 \leqq i_0 < \cdots < i_p \leqq q$, beschrieben, wobei folgendes festgelegt werde: Die übrigen Koordinaten $p_{i_0 \dots i_p}$ (d. h. solche, für die nicht $0 \leqq i_0 < \cdots < i_p \leqq q$ erfüllt ist) seien dadurch bestimmt, daß $p_{i_0 \dots i_p}$ alternierend von den Indizes abhängen soll. Es gelten die Plückerrelationen

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \, p_{i_0 \dots i_{p-1} j_\nu} p_{j_1 \dots \check{j}_\nu \dots j_{p+1}} = 0$$

für alle Folgen $0 \leqq i_0 < \cdots < i_{p-1} \leqq q$, $0 \leqq j_0 < \cdots < j_{p+1} \leqq q$, durch die Grass (q, p) definiert wird als abgeschlossenes Unterschema eines projektiven Raumes.
Die Bijektion

$$\text{Grass}\,(q, p)\,(S) \xrightarrow{\omega} \text{Hom}\,(S, G(q, p))$$

ist lokal folgendermaßen definiert:
Es sei $\mathcal{N} \in$ Grass (q, p) (S). Dann ist $\mathcal{N}$ lokal (über S) durch $p + 1$ lineare Formen

$$g_i = \sum_{j=0}^{q} u_{ij} T_j, \qquad u_{ij} \text{ Funktionen auf } S, \quad i = 0, \dots, p,$$

gegeben:

$$\mathcal{N} = \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathcal{O}_S^{q+1} \mid g_i(t_0, \dots, t_q) = 0, i = 0, \dots, p\}.$$

Dann ist lokal $\omega(\mathcal{N}) = p: S \to G(q, p)$ definiert durch die Plückerkoordinaten

$$p_{i_0 \dots i_p} = \begin{vmatrix} u_{0i_0} & u_{0i_1} & \dots & u_{0i_p} \\ u_{1i_0} & u_{1i_1} & \dots & u_{1i_p} \\ & & \dots & \\ u_{pi_0} & u_{pi_1} & \dots & u_{pi_p} \end{vmatrix}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der $p + 1$ linearen Formen g_i, die $\mathcal{N}$ definieren, da bei einer anderen Wahl dieser $p + 1$ linearen Formen die gewonnenen Plückerkoordinaten sich nur um einen gemeinsamen umkehrbaren Faktor unterscheiden.
Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß die Injektion $Q \hookrightarrow$ Grass (q, p) eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Vorbereitung dieses Beweises dienen die folgenden Betrachtungen.
Es sei α ein Morphismus: $S \to G$. Da $G(q, p) := G$ den Funktor Grass (q, p) darstellt und $Q \hookrightarrow$ Grass (q, p), hat es Sinn, zu fragen, wann $\alpha \in Q(S)$ gilt. Dazu entspreche bei der Isomorphie Grass (q, p) $(G) \cong$ Hom (G, G) der Identität auf der rechten Seite die universelle Garbe $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}_G^{q+1}$. Wegen $\mathcal{N} \in$ Grass (p, q) (G) ist $\mathcal{O}_G^{q+1}/\mathcal{N}$ lokal frei vom Rang $p + 1$ (es war $m \gg 0$). Die Antwort auf die obige Frage gibt nun

Lemma 1. *$\alpha: S \to G$ ist ein Element von $Q(S)$ genau dann, wenn $\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\, \alpha^*(\mathcal{N})$ lokal frei vom Rang $m + l$ für alle $l \geqq 0$* ist.

Beweis. Ist $\alpha \in Q(S)$, so ist nach Satz 1 aus Abschnitt 3 die obige Bedingung erfüllt. Wir haben noch zu zeigen, daß, wenn $\mathcal{G}$ die durch α induzierte Untergarbe bezeichnet, die Quotientengarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}^{N+1}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P besitzt und S-flach ist. $\mathcal{G}$ wird durch α folgendermaßen induziert: Es sei $\mathcal{J}_*$ der Untermodul von $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]^{N+1}$ der durch $\alpha^*(\mathcal{N})$ erzeugt wird. Es ist dann $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{J}_*}$. Da der homogene Teil vom Grad $m + l$ von $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]$ gerade

$$\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\, \alpha^*(\mathcal{N}) =: \mathcal{F}_l$$

ist, hat $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P, und da $\mathcal{F}_l$ lokal frei ist, ist $\mathcal{F}$ S-flach, d. h., es ist $\alpha \in Q(S)$.

Bemerkung. Ist $N = 0$, $S = \operatorname{Spec} A$, so ist $\alpha^*\mathcal{N}$ ein Untermodul von $A[T_0, \ldots, T_n]$, bestehend aus Formen vom Grad m. Diese Formen definieren ein abgeschlossenes Unterschema X von $\mathbf{P}^n \times S$. Die obige α entsprechende Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\times S}$ ist dann gerade $\mathcal{O}_X$.

Lemma 2. *Es sei B ein Noethersches Schema, $\mathcal{H}_* = \mathcal{O}_B[T_0, \ldots, T_n]$, $\mathcal{M}_*$ ein $\mathcal{H}_*$-Modul, der von endlichem Typ und quasikohärent als $\mathcal{O}_B$-Modul ist. Außerdem sei $m \in \mathbf{Z}$ und $P \in \mathbf{Q}[t]$.*
Dann existiert ein lokal abgeschlossenes Schema $Z \subseteq B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{M}_{m+l} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_Z$ *ist für alle* $l \geqq 0$ *über* $\mathcal{O}_Z$ *lokal frei vom Rang* $P(m + l)$.

(ii) *Ist* $\alpha\colon S \to B$ *ein Morphismus, so daß* $\alpha^*\mathcal{M}_{m+l}$ *lokal frei vom Rang* $P(m + 1)$ *über* $\mathcal{O}_S$ *für alle* $l \geqq 0$ *ist, so läßt sich* α *über* Z *faktorisieren.*

Lemma 2 folgt aus den Behauptungen:

(I) $U = \{t \in B \mid rk_{k(t)}\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B(t)}} k(t) \subseteq P(n),\ n \geqq m\}$ ist eine offene Teilmenge von B.

(II) Zu jedem kohärenten Modul $\mathcal{M}$ vom Rang $\leqq r$ über einem Noetherschen Schema U existiert ein abgeschlossenes Unterschema Z von U mit den beiden folgenden Eigenschaften
a) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_Z$ ist lokal frei vom Rang r.
b) Ist $\alpha\colon S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}$ lokal frei vom Rang r ist, so läßt sich α über Z faktorisieren.

Wir nehmen an, daß (I) und (II) richtig sind, und betrachten die Garben $\mathcal{M}_{n+l}$ über der durch (I) definierten offenen Teilmenge U von B, die also wieder ein Noethersches Schema ist. Setzt man in (II) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n+l}$ und $r = P(m + 1)$, so gewinnt man abgeschlossene Unterschemata Z_l von U mit den Eigenschaften a) und b). Da U Noethersch ist, muß die absteigende Kette der $Z(l) := Z_0 \cap Z_1 \cap \cdots \cap Z_l$ stationär werden. Dann besitzt $Z(l) = Z(l + 1) = \cdots =: Z$ die im Lemma 2 geforderten Eigenschaften.

Beweis von (I): B ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten reduzierten Unterschemata B_i derart, daß $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_{B_i}$ flach über S ist. Da S nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, kann man sich auf die Situation beschränken, daß $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_n$ flach über S ist, wobei S zusammenhängend ist. In diesem Fall ist aber bekannt (siehe Verschwindungssätze), daß ein n_0 existiert, so daß für $n \geqq n_0$

$$rk_{k(t)}(\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)) = \chi(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) = HP(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) := R(n)$$

ist ($HP(n, \mathcal{F})$ soll das Hilbertpolynom für eine Garbe $\mathcal{F}$ bezeichnen). U_l sei die offene Menge

$$U_l = \{t \in B \mid rk_{k(t)}(\mathcal{M}_{m+v,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)) \leqq P(v) \text{ für } m \leqq v \leqq l\}.$$

Dann ist $U = \bigcap_{l\geqq 0} U_l$ und folglich genügt es zu zeigen, daß die absteigende Folge der U_l nach endlich vielen Schritten abbricht. Gibt es aber ein $n_1 \geqq n_0$, so daß $R(n_1) > P(n_1)$ ist, so ist $U_{n_1} = \emptyset$, und die Folge U_l ist damit stationär. Ist aber $R(n) \leqq P(n)$ für alle $n \geqq n_0$, so ist $U_{n_0} = U_{n_0+1} = \cdots$.

Beweis von (II): Da $\mathscr{M}$ kohärent ist, hat man lokal eine Darstellung $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r \to \mathscr{M} \to 0$. Ist $\alpha: S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathscr{M}$ lokal frei ist, so ist in der exakten Folge $\mathcal{O}_U^q \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_U^r \otimes \mathcal{O}_S \to \mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_S \to 0$ der erste Homomorphismus Null, da der zweite Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Das besagt aber, daß das geforderte abgeschlossene Unterschema Z von U durch das Ideal definiert wird, welches durch die Koeffizienten erzeugt wird, die den Homomorphismus $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r$ induzieren.

Mit Lemma 1 und Lemma 2 ist bewiesen, daß der Funktor Q darstellbar ist und daß das darstellende Objekt, welches wieder mit Q bezeichnet wird, ein lokal abgeschlossenes Unterschema der Graßmannmannigfaltigkeit G ist.

Daß aber Q auch ein abgeschlossenes Unterschema von G ist, folgt aus

Lemma 3. *Es sei C ein eindimensionales reguläres Schema (d. h. eine Kurve), C_0 ($\neq \emptyset$) ein offenes Unterschema, $a: C_0 \to Q$, $b: C \to G$ Morphismen, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann existiert ein Morphismus $c: C \to Q$, so daß das resultierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, "c"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis. Durch Lokalisierung gelangt man zu der Situation, daß $C = \operatorname{Spec}(R)$, $C_0 = \operatorname{Spec}(R_f)$ ist, wobei R eindimensionaler Ring und $f \in R$ ist. Setzt man $H = R[T_0, \ldots, T_n]$, so ist b (b ist Punkt von G mit Wert in C) derart durch einen Untermodul $M \subset H(m)^{N+1}$ definiert, daß $H(m)^{N+1}/M$ R-frei ist. Wegen a) gilt für alle $l \geqq 0$, daß

$$[H(l) \otimes_R (H(m)^{N+1}/M)]_f = H(m+l)_f^{N+1}/H(l)\, M_f$$

und frei vom Rang $P(m+l)$ ist. Wegen der Flachheit des Quotientenmoduls gilt das dann auch für ganz Spec (R), und daher gibt es wegen der Universaleigenschaft von Q einen Morphismus c mit den gewünschten Eigenschaften, q. e. d.

Bemerkungen.

a) Schränkt man den Funktor $Q^p(N)$ auf die Kategorie der S-Schemata ein, d. h., es sei in der Kategorie der S-Schemata

$$Q_S^P(N)\,(T) = \{\mathscr{H} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1} \mid \mathscr{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1}/\mathscr{H} \text{ ist } T\text{-flach, } HP(n, \mathscr{F}) = P(n)\},$$

so ist dieser Funktor ebenfalls darstellbar, und aus der Universalitätseigenschaft folgt, daß er durch $Q^p(N) \times S$ dargestellt wird.

b) Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich in der folgenden Weise. Wir betrachten wieder die Kategorie der S-Schemata. Dort sollen jetzt aber nicht mehr die Untermoduln von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$ für das Schema T/S zugrunde gelegt werden. Wir gehen vielmehr aus von einem Quotientenmodul $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$, der zu einer Untergarbe $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}$ gehört. Mit $\mathcal{E}_T$ werde für ein S-Schema T die Garbe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ auf $\mathbf{P}^n \times T$ bezeichnet. Dann definieren wir einen Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ durch

$$Q^p_S(\mathcal{E})\,(T) = \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_T \mid \mathcal{F} = \mathcal{E}_T/\mathcal{H} \text{ ist } T\text{-flach}, \; HP(n, \mathcal{F}) = P(n)\}.$$

Behauptung. $Q^p_S(\mathcal{E})$ ist darstellbar durch ein abgeschlossenes Unterschema von $Q^p_S(N)$.

Beweis. Wir bezeichnen den Funktor $Q^p_S(N)$ mit Q_0 und den Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ mit Q. Da sich jeder Quotient von $\mathcal{E}_T$ als Quotient von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$ darstellen läßt, gilt $Q \subseteq Q_0$. Wir haben zu zeigen, daß $Q \subseteq Q_0$ eine abgeschlossene Einlagerung ist. Dazu sei $\mathcal{H}$ die universelle Untergarbe von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$ mit dem flachen Quotienten $\mathcal{F} := \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$ (der das Hilbertpolynom P besitzt), die dem Funktor Q zugeordnet ist. $\mathcal{E}_Q = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Q$ ist Quotient von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$, und es sei $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\,(\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_Q)$. Weiterhin sei $I = (\mathcal{K} + \mathcal{H})/\mathcal{H}$, und mit φ werde die Injektion $I \hookrightarrow \mathcal{F}$ bezeichnet. Da $\mathcal{F}$ die universelle Quotientengarbe bezüglich des Funktors Q ist, gilt für ein S-Schema T

$$Q(T) = \left\{u \in Q_0(T) \mid \left((1 \times u)^* I \xrightarrow{(1 \times u)^*(\varphi)} (1 \times u)^* \mathcal{F}\right) = 0\right\}.$$

Hierbei bezeichnet 1 die identische Abbildung von $\mathbf{P}^n$. Wir haben weiter oben gesehen, daß für $m \gg 0$, wenn wir $q = (N+1)\binom{n+m}{n}$ setzen, eine Surjektion $\mathcal{O}^q_{\mathbf{P}^n \times Q} \twoheadrightarrow I(m)$ existiert und $\varphi(m)$ bzw. φ eindeutig durch

$$\psi\colon \mathcal{O}^q_Q \to p_* I(m) \to p_* \mathcal{F}(m)$$

bestimmt ist. Es ist also $(1 \times u)^*\,(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $u^*(\psi) = 0$ ist, und wir können damit das Verschwinden von $(1 \times u)^*\,(\varphi)$ durch das Verschwinden von ψ ausdrücken. Da aber $p_*\mathcal{F}(m)$ wegen $m \gg 0$ lokal frei ist, wird das Verschwinden von $\mathcal{O}^q_Q \to p_*\mathcal{F}(m)$ lokal durch das Verschwinden der Koeffizienten einer Matrixdarstellung von ψ ausgedrückt. Die entsprechenden Gleichungen definieren damit Q als abgeschlossenes Unterschema von Q_0, q. e. d.

c) Man kann auch von einem projektiven Schema X über S ausgehen, eine kohärente Garbe $\mathcal{E}$ auf X fixieren, $\mathcal{E}_T$ durch $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ definieren und damit wie in b) einen Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ auf der Kategorie der S-Schemata erhalten.

Behauptung. $Q^p_S(\mathcal{E})$ ist durch ein projektives S-Schema darstellbar.

Beweis. Wir wählen eine solche Überdeckung $\{S_\alpha\}$ von S, so daß $X \mid S_\alpha \subseteq \mathbf{P}^n \times S$ ist. Die entsprechenden Funktoren $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ sind nach b) durch projektive Schemata $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ darstellbar (wir behalten die alte Bezeichnung bei). Infolge der Universaleigenschaft der $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ kann man sie zu einem projektiven S-Schema $Q^p_S(\mathcal{E})$ zusammenkleben, so daß $Q^p_S(\mathcal{E}) \mid S_\alpha = Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ ist und $Q^p_S(\mathcal{E})$ den betrachteten Funktor darstellt, q. e. d.

Insbesondere ergibt sich also daraus: Es existiert eine universelle flache Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}_Q$ $\left(Q := Q^p_S(\mathcal{E})\right)$ mit dem Hilbertpolynom P, und für $n \gg 0$ ist

(i) $p_*\left(\mathcal{F}(n)\right)$ lokal frei auf Q vom Rang $q = P(n)$ (hierbei bezeichnet p die Projektion von $X \times_S Q$ auf den zweiten Faktor)

und

(ii) $\overset{q}{\wedge}\left(p_*(\mathcal{F}(n))\right) = \mathcal{L}$ „very ample" bezüglich S).