induzierten Abbildung $e \mapsto Y(e \otimes 1)$ von

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

ergibt, da $E_2^{ij} = 0$ für $j < n - r$, also

$$E_2^{r,n-r} \twoheadrightarrow E_\infty^{r,n-r} \subseteq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

gilt. Das liefert nach (*) mit $\omega = \omega_X$ eine Paarung $i \circ Y$:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes \mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n}), \tag{**}$$

und es gilt folgender

Satz (GROTHENDIECK [3]). *Ist $X \in \mathbf{P}^n$ rein r-dimensional und Cohen-Macaulaysch, so ist für alle $q \in \mathbf{Z}$ die Paarung (**) nicht ausgeartet.*

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -)$$

auf der Kategorie der $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$-Moduln. Die zu diesen Funktoren gehörige Spektralfolge ist

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -).$$

Ist $\mathcal{O}_X$ Cohen-Macaulaysch, so ist $dh_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X) = n - r$, also

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) = 0$$

für $j \neq n - r$, also

$$\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) = \mathrm{Ext}^{r-q+n-r}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{Ext}^{n-q}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}),$$

und die Behauptung ist damit auf den Serreschen Dualitätssatz für $\mathbf{P}^n$ reduziert, q. e. d.

3. Verschwindungssätze

Zur Konstruktion des Hilbertschemas ist es günstig, nach einer Idee aus MUMFORD [5], Lecture 14, zunächst einige Verschwindungssätze zu verallgemeinern.
Es sei k ein Körper, $\mathbf{P}^n = \mathrm{Proj}\, \mathbf{Z}\,[T_0, \ldots, T_n]$, $\mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n \times \mathrm{Spec}\,(k)$ und S ein über k algebraisches Schema.

Definition. Eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k$ heißt *m-regulär*, falls

$$H^i\big(\mathbf{P}_k, \mathcal{F}(m - i)\big) = (0)$$

für alle $i > 0$ gilt. Eine Familie $\mathcal{F}$ von kohärenten Garben auf $\mathbf{P}^n_k$ über S (d. h. eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k \times_k S = \mathbf{P}^n \times S$ heißt *m-regulär*, falls $\mathcal{F}_\xi = (1 \times \xi)^* \mathcal{F}$ für jeden geometrischen Punkt $\xi \in S(\bar{k})$ m-regulär ist.

Satz 1. *Es sei $\mathscr{F}$ eine kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}^n \times S$ und p die Projektion von $\mathbf{P}^n \times S$ auf den zweiten Faktor. Dann gilt:*

a) $R^i p_* \mathscr{F}(k - i) = 0$ *für* $k \geqq m$, $i > 0$

(folglich ist $\mathscr{F}$ auch k-regulär für $k \geqq m$).

b) $\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu p_* \mathscr{F}(m) = p_* \mathscr{F}(m + 1)$

(folglich ist $\bigoplus_{k \geq m} p_* \mathscr{F}(k)$ durch $p_* \mathscr{F}(m)$ über $\mathbf{Z}[T_0, \ldots, T_n]$ erzeugt).

Beweis. Basiswechsel führt dazu, daß folgendes zu beweisen ist. Es sei $S = \operatorname{Spec}(k)$ und $\mathscr{F}$ kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}_k^n = \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_n]$. Dann gilt

a') $H^i(\mathscr{F}(k - i))$ für $k \geqq m$, $i > 0$.

b') $\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) = H^0(\mathscr{F}(m + 1))$.

Wir werden den Beweis durch Induktion über n führen.

Für $n = 0$ sind a') und b') offensichtlich. Wir nehmen daher an, daß a') und b') für $n - 1$ erfüllt sind.

Es sei h Linearform aus $k[T_0, \ldots, T_n]$, so daß $h \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ gilt. H sei die entsprechende Hyperebene in $\mathbf{P}_k^n$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(H)$, und die Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

ist exakt. Da H durch h definiert und $H \cap \operatorname{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$ ist, ist der Morphismus $\mathscr{F} \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(1) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)$ bzw. $\mathscr{F}(k - 1) \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(k)$ injektiv. Daher erhalten wir durch Tensorierung der obigen Sequenz mit $\mathscr{F}(k)$ die exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}(k - 1) \to \mathscr{F}(k) \to \mathcal{O}_H \otimes \mathscr{F}(k) = \mathscr{F}_H(k) \to 0. \tag{1}$$

Daraus gewinnen wir die exakten Folgen

$$H^i(\mathscr{F}(k)) \to H^i(\mathscr{F}_H(k)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(k - 1)).$$

Wir können daraus schließen, daß auch $\mathscr{F}_H$ m-regulär ist. Wegen $H \cong \mathbf{P}_k^{n-1}$ trifft für $\mathscr{F}_H$ die Induktionsvoraussetzung zu. Daher ist in der Sequenz

$$H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i - 1)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m - i)),$$

die wir aus (1) gewinnen, neben der ersten Gruppe auch die letzte Gruppe gleich Null. Damit ist $\mathscr{F}$ als $(m + 1)$-regulär nachgewiesen. Damit ergibt eine iterative Anwendung der eben benutzten Methode die Richtigkeit von a').

Wegen der Induktionsvoraussetzung b') für $\mathscr{F}_H$ ist im folgenden kommutativen Diagramm τ surjektiv:

$$\begin{array}{ccccc}
\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) & & \xrightarrow{\sigma} & & \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}_H(m)) \\
\downarrow{\scriptstyle\mu} & & & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\
H^0(\mathscr{F}(m)) & \xrightarrow{\otimes h} & H^0(\mathscr{F}(m + 1)) & \xrightarrow{\nu} & H^0(\mathscr{F}_H(m + 1))
\end{array}$$

Wegen $H^1(\mathscr{F}(m - 1)) = 0$ ist aber auch σ surjektiv. Daher ist

$$\nu(\operatorname{Im}(\mu)) = H^0(\mathscr{F}_H(m + 1)),$$

bzw. $H^0(\mathcal{F}(m+1))$ wird von $hH^0(\mathcal{F}(m))$ und von $\mathrm{Im}(\mu)$ erzeugt. Es ist aber $hH^0(\mathcal{F}(m)) \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$. Damit ist also

$$\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathcal{F}(m)) = H^0(\mathcal{F}(m+1))$$

gezeigt, q. e. d.

Bemerkung. Es sei $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$ eine exakte Folge von kohärenten flachen Garben über $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathcal{G}$ m-regulär. Dann ergibt sich unmittelbar aus der abgeleiteten Kohomologiesequenz, daß $\mathcal{E}$ genau dann m-regulär ist, wenn $\mathcal{F}$ m-regulär ist.

Satz 2. *Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ kohärente S-flache Garben auf $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Weiterhin seien $a_0, \ldots, a_n$ durch das Hilbertpolynom*

$$\chi(\mathcal{F}(m)) = \sum a_j \binom{m+j}{j}$$

von $\mathcal{F}$ bestimmt. Es existiert ein Polynom $F(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbf{Q}[t_0, \ldots, t_n]$, unabhängig von $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}$ m-regulär für $m \geqq F(a_0, \ldots, a_n)$ ist.

Beweis. Basiswechsel führt wieder dazu, daß der Satz für $S = \mathrm{Spec}\,(k)$ zu beweisen ist. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Da für $n = 0$ alles offensichtlich ist, können wir annehmen, daß Satz 2 für $n - 1$ richtig ist.
Um die Reduktion von n auf $n - 1$ durchführen zu können, suchen wir wieder eine geeignete Hyperebene H ($\cong \mathbf{P}_k^{n-1}$) in $\mathbf{P}_k^n$. Da für eine kohärente Garbe $\mathcal{M}$ die Menge $\mathrm{Ass}\,\mathcal{M}$ endlich ist, ist also auch $\mathrm{Ass}\,(\mathcal{E}) \cup \mathrm{Ass}\,(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ endlich, und daher gibt es eine Hyperebene H mit $H \cap \mathrm{Ass}\,(\mathcal{E}) \cup (\mathrm{Ass}\,(\mathcal{E}/\mathcal{F})) = \emptyset$. Es sei $\mathcal{F}_H := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$, $\mathcal{E}_H := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_H$ und H durch die Linearform $h \in k\,[T_0, \ldots, T_n]$ definiert.
Aus

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \xrightarrow{\otimes h} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0 \tag{1}$$

folgt $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}}(\mathcal{O}_H, \mathcal{E}/\mathcal{F}) = 0$, da wegen der obigen Wahl von H bzw. h gerade erreicht wird, daß h kein Nullteiler in $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ist. Damit folgt aus

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{F} \to 0$$

durch Tensorierung mit $\mathcal{O}_H$, daß $\mathcal{F}_H$ kohärente Untergarbe von $\mathcal{E}_H$ ist. Aus (1) ergeben sich wieder wie beim Beweis von Satz 1 für jedes m die exakten Folgen

$$0 \to \mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}(m+1) \to \mathcal{F}_H(m+1) \to 0. \tag{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}_H(m+1)) &= \chi(\mathcal{F}(m+1)) - \chi(\mathcal{F}(m)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left[\binom{m+i+1}{i} - \binom{m+i}{i}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{m+i}{i},\end{aligned}$$

und nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Polynom G, unabhängig von $\mathcal{F}_H$, so daß die kohärente Untergarbe $\mathcal{F}_H$ von $\mathcal{E}_H$ $G(a_1, \ldots, a_n)$-regulär ist. Wir setzen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$. Dann ergibt sich aus (2) für $m \geqq m_1 - 2$

$$\begin{aligned}0 &\to H^0(\mathcal{F}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m+1)) \xrightarrow{l_{m+1}} H^0(\mathcal{F}_H(m+1)) \\ &\to H^1(\mathcal{F}(m)) \to H^1(\mathcal{F}(m+1)) \to 0\end{aligned} \tag{3}$$

bzw. für $i \geqq 2$ und $m \geqq m_1 - 1$

$$0 \to H^i(\mathcal{F}(m)) \to H^i(\mathcal{F}(m+1)) \to 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt $H^i(\mathcal{F}(m-i)) = 0$ für $i \geqq 2$, da ja nach einem Theorem von SERRE $H^i(\mathcal{F}(m)) = 0$ für $m \gg 0$ und $i \geqq 1$ ist. Das bedeutet, daß bezüglich $H^2, H^3, \ldots$ die Garbe $\mathcal{F}$ m_1-regulär ist. Daher haben wir jetzt H^1 zu untersuchen. Da es nach (3) einen surjektiven Morphismus $H^1(\mathcal{F}(m)) \to H^1(\mathcal{F}(m+1))$ gibt, ist

$$\dim H^1(\mathcal{F}(m)) \geqq \dim H^1(\mathcal{F}(m+1)). \tag{5}$$

Es sei $m_2 := m_1 + \dim H^1(\mathcal{F}(m_1 - 1))$, und wir behaupten, daß $\mathcal{F}$ m_2-regulär ist. Da nach dem Obigen $H^i(\mathcal{F}(m_2 - i)) = 0$ ist für $i \geqq 2$, ist noch $H^1(\mathcal{F}(m_2 - 1)) = 0$ zu zeigen. Das folgt aber aus dem folgenden Sachverhalt: In (5) kann das Gleichheitszeichen genau dann gelten, wenn $\dim H^1(\mathcal{F}(m)) = 0$ ist.

Beweis. Da $H^1(\mathcal{F}(m)) = 0$ ist für $m \gg 0$, genügt es zu zeigen, daß aus $\dim H^1(\mathcal{F}(m)) = \dim H^1(\mathcal{F}(m+1))$

$$\dim H^1(\mathcal{F}(m+1)) = \dim H^1(\mathcal{F}(m+2))$$

folgt. Aus (3) folgt aber, daß $\dim H^1(\mathcal{F}(m)) = \dim H^1(\mathcal{F}(m+1))$ für $m > m_1 - 2$ genau dann gilt, wenn l_{m+1} surjektiv ist. Damit ist also zu zeigen, daß l_{m+2} surjektiv ist, falls l_{m+1} surjektiv ist.
Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{F}(m+1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{F}(m+2)) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle l_{m+2}} \\ H^0(\mathcal{F}_H(m+1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) & \xrightarrow{q} & H^0(\mathcal{F}_H(m+2)) \end{array}$$

q ist surjektiv infolge der Induktionsvoraussetzung für $\mathcal{F}_H$ (und Satz 1), und p ist surjektiv, da l_{m+1} surjektiv vorausgesetzt wurde. Daher ist $q \circ p$ surjektiv und deshalb auch l_{m+2}.
Damit haben wir gezeigt, daß $\mathcal{F}$ $(m_1 + \dim H^1(\mathcal{F}(m_1 - 1)))$-regulär ist. Wegen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$ genügt es jetzt zum vollständigen Beweis von Satz 2, $H^1(\mathcal{F}(m_1 - 1))$ durch den Wert eines entsprechenden Polynoms H an der Stelle $(a_0, \ldots, a_n, m_1)$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathcal{F}(m_1 - 1)) &= \dim H^0(\mathcal{F}(m_1 - 1)) - \chi(\mathcal{F}(m_1 - 1)) \\ &\leqq \dim H^0(\mathcal{E}(m_1 - 1)) - \chi(\mathcal{F}(m_1 - 1)) \\ &\leqq H(a_0, \ldots, a_n, m_1) = H(a_0, \ldots, a_n, G(a_1, \ldots, a_n)). \end{aligned}$$

Damit hat also das Polynom

$$F(t_0, \ldots, t_n) = G(t_1, \ldots, t_n) + H(t_0, \ldots, t_n, G(t_1, \ldots, t_n))$$

die im Satz geforderten Eigenschaften.

Zum Abschluß dieses Abschnitts erwähnen wir den Verschwindungssatz von KODAIRA:

Satz. *Es sei X eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ und $\mathcal{L}^{-1}$ ein amples Linienbündel. Dann gilt $H^q(X, \Omega^p \otimes \mathcal{L}) = (0)$ für $p + q < \dim X$ (dabei ist Ω^p die Garbe der p-Differentialformen auf X).*

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion über die Dimension von X. Ist X eine Kurve, so ist der Satz klar (es kommt dabei ja nur darauf an zu zeigen, daß $H^0(X, \mathcal{L}) = (0)$ ist. Wir nehmen zunächst einmal an, daß $\mathcal{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann existiert ein effektiver und nichtsingulärer Divisor D mit $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{L}^{-1}$. Nach dem Satz von Bertini können wir annehmen, daß D irreduzibel ist. Für $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ gilt dann $H^p(D, \Omega^p \otimes \mathcal{L}') = (0)$ für $p + q < \dim X - 1$ (Induktionsvoraussetzung). Wir betrachten nun die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \Omega_X^q \to \Omega_X^q \to \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to \mathcal{L}' \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega_D \to 0. \tag{2}$$

Aus der zweiten erhalten wir

$$0 \to \Omega_D^{q-1} \otimes \mathcal{L}' \to \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega_D^q \to 0. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{tikzcd}
 & & H^p(D, \Omega_D^q) \\
H^p(X, \mathcal{L} \otimes \Omega_X^q) \arrow[r] & H^p(X, \Omega_X^q) \arrow[ur, "g_p"] \arrow[r, "h_p"] & H^p(D, \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D) \arrow[u, "a_p"'] \\
 & & H^p(D, \Omega_D^{q-1} \otimes \mathcal{L}') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dabei ist g_p die durch die Einschränkung induzierte kanonische Abbildung. Nach Induktionsvoraussetzung ist a_p Isomorphismus für $p + q < \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$. Aus der exakten Sequenz folgt die Behauptung, wenn wir nachweisen können, daß g_p auch Isomorphismus für $p + q = \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$ ist.
Während bisher der Beweis rein algebraisch verlief, benutzen wir nun transzendente Hilfsmittel.

(1) Satz von Lefschetz über Hyperebenenschnitte: *Es seien X, D wie zuvor; dann ist die kanonische Abbildung*

$$H^i(X, \mathbf{C}) \to H^i(D, \mathbf{C})$$

ein Isomorphismus für $i < n - 1$ und injektiv für $i = n - 1$.

(2) Hodge-Zerlegung:

$$H^i(X, \mathbf{C}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q).$$

(1) und (2) liefern nun genau die Bedingungen für g_p.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß wir uns stets an den Fall einer „very amplen" Garbe beschränken können. Es sei nun n eine natürliche Zahl, so daß $\mathcal{L}^{-n}$ „very ample" ist. Dann existiert eine n-fach zyklische Überlagerung $X' \xrightarrow{r} X$, so daß $r^*\mathcal{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann ist

$$H^p(X', \Omega_{X'}^q \otimes r^*\mathcal{L}) \cong H^p(X, r_*\Omega_{X'}^q \otimes \mathcal{L}),$$