III. Technik

In diesem Kapitel bringen wir einige allgemeine, für viele Konstruktionen grundlegende Techniken, die später benötigt werden bzw. teilweise schon in Kapitel I benutzt wurden. Außerdem wird ein Beispiel von MUMFORD gebracht, das zeigt, daß das Hilbertschema im allgemeinen nicht reduziert ist.
Die Literaturangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in Teil I dieser Arbeit.

1. Basiswechsel und Folgerungen

Unter einer *algebraischen Familie* verstehen wir einen flachen algebraischen Morphismus $V \to T$. Dabei spielt T die Rolle eines Parameterraumes, und die geometrischen Fasern $V_t = V \times_T \operatorname{Spec}(k)$ (wobei $t\colon \operatorname{Spec}(\bar{k}) \to T$ ein geometrischer Punkt ist) sind die Elemente der Familie.
Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_V$-Modulgarbe, so bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_t$ die $\mathcal{O}_{V_t}$-Modulgarbe $\mathscr{F} \otimes_T \bar{k} = (1 \times t)^* \mathscr{F}$; allgemeiner sei für jeden Morphismus $h : S \to T$ mit $\mathscr{F}_S$ die Garbe $F \otimes_T \mathcal{O}_S = (1 \times h)^* \mathscr{F}$ auf $V_S = V \times_T S$ bzeichnet, mit p_S die Projektion $V_S \to S$. Es interessiert das Verhalten der Kohomologie $H^*(V_t, \mathscr{F}_t)$ bei variablem t; die diesbezüglichen Resultate stammen von GROTHENDIECK (vgl. [2], Kap. III, § 7), für den analytischen Fall von GRAUERT.
Eine leichter zugängliche Darstellung findet man bei MUMFORD [5], Lecture 7, und [6], § 5. Generell werde $\mathscr{F}$ als T-flache kohärente Garbe auf V vorausgesetzt, ferner sei $V \to T$ eigentlich und T Noethersch. Dann sind die folgenden Resultate (1) bis (4) die grundlegenden Fakten über Basiswechsel:

(1) $R^q p_* \mathscr{F}$ ist eine kohärente Garbe auf T; für jedes T-Schema $S \to T$ gibt es einen kanonischen Morphismus („Basiswechsel")

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

(induziert kozyklenweise durch die Abbildungen $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_S(U_S)$ für offene $U \subset V$ oder auf Grund der Theorie der δ-Funktoren).
Insbesondere erhält man für $t \in T$ Morphismen

$$(R^q p_* \mathscr{F}) \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t).$$

(2) Für gegebenes $q \in \mathbf{Z}$ gilt: Die Menge T_q aller $t \in T$, so daß

$$R^q p_* \mathscr{F} \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t)$$

surjektiv ist, ist offen. Für jeden beliebigen Morphismus $g\colon S \to T$ mit $g(S) \subseteq T_q$ ist dann

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

ein Isomorphismus.

(3) Auf dem offenen Unterschema $T_q \cap T_{q-1}$ (d. h., wenn

$$R^j p_* \mathscr{F} \otimes k(t) \to H^j(V_t, \mathscr{F}_t)$$

surjektiv für $j = q - 1$ und q ist) ist $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei, und $T_q \cap T_{q-1}$ ist als Teilmenge von T_q dadurch charakterisiert.

Die Aussagen (2) und (3) erhält man, indem man zeigt, daß man den Komplex $C^*(U, \mathscr{F})$ der alternierenden Čechschen Koketten bezüglich einer affinen Zariski-offenen Überdeckung $\{U \to V\}$ (wobei wir o. B. d. A. $T = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen können) durch einen endlichen projektiven Komplex $K^\bullet = (K^0 \to K^1 \to \cdots \to K^n)$ ersetzen kann, so daß für jedes affine T-Schema $S = \operatorname{Spec}(B) \to T$

$$H^*(V_S, \mathscr{F}_S) = H^p(K^\bullet \otimes_A B)$$

gilt (vgl. Mumford [6], § 5). Hieraus folgt weiterhin unmittelbar

(4) a) Die Funktion $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t) = \dim H^q(V_t, \mathscr{F}_t)$ ist halbstetig in dem Sinne, daß $\{t \mid h^q(\mathscr{F}_t) \leqq r$ für alle $r \in \mathbf{Z}\}$ in T offen ist.

b) Die Funktion $t \mapsto \chi(\mathscr{F}_t) = \sum_{q \geqq 0} (-1)^q h^q(\mathscr{F}_t)$ ist stetig auf T.

(5) Das offene Unterschema $T'_q = \{t \mid h^{q+1}(\mathscr{F}_t) = 0\}$ ist in T_q enthalten, und es ist

$$T'_q \subseteq T - \bigcup_{j>q} \operatorname{supp} R^j p_* \mathscr{F}.$$

Beweis. Es ist $T'_q \subseteq T_{q+1}$, und daher ist auf T'_q nach (2) und dem Lemma von Nakayama $R^{q+1} p_* \mathscr{F} = 0$, also lokal frei. Nach (3) ist $T_{q+1} \cap T_q$ die Teilmenge von T_{q+1}, auf der $R^{q+1} p_* \mathscr{F}$ lokal frei ist. Also ist $T'_q \subseteq T_{q+1} \cap T_q \subseteq T_q$. Für $n \gg 0$ ist $H^{n+1}(V_t, \mathscr{F}_t) = 0$ für alle t, also $T = T'_n \subseteq T_n$ (und somit $H^n(V_t, \mathscr{F}_t) = 0$), also $T = T'_{n-1} \subseteq T_{n-1}$ usw.

(6) Ist T reduziert und irreduzibel, so ist die Funktion $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t)$ genau dann konstant, wenn $T = T_q$ und $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei ist. In diesem Fall ist $T_{q-1} = T$.

Beweis. Es sei $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t)$ konstant; aus $T = T_q$ folgt dann (nach (2) und dem Lemma von Nakayama) leicht, daß $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei vom Rang $h^q(\mathscr{F}_t)$ ist.
Wir wollen daher zeigen, daß $T = T_q$ gilt. Offensichtlich ist T_q nicht leer, da der allgemeine Punkt von T darin enthalten ist. Wir können durch Lokalisierung annehmen, daß T Spektrum eines lokalen Ringes A ist und $T_q \subseteq T$ das punktierte Spektrum $\operatorname{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ enthält. Der lokale Ring A wird durch einen diskreten Bewertungsring B dominiert. Ist k (bzw. k') der Restklassenkörper von A (bzw. B), u ein Primelement von B, so ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} [H^q(V, \mathscr{F}) \otimes_A k] \otimes_k k' & \longrightarrow & H^q(V, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_A \mathscr{F}) \otimes_k k' \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' & \longrightarrow & H^q(V_B, \mathscr{F}_B / u \mathscr{F}_B) \end{array}$$

Um zu zeigen, daß $T_q = T$, d. h. $\mathfrak{m}_A \in T_q$, ist, genügt es offensichtlich, daß der untere Pfeil surjektiv ist. Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_B / u \mathscr{F}_B \to 0 \tag{*}$$

erhalten wir

$$H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \subseteq H^q(V_B, \mathscr{F}_B / u \mathscr{F}_B),$$